F762
KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Institutul de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OFERTE - CERERE
VYMĚNA - WYMIANA
TAUSCH - СМЕНА

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

Országos Mű-zeti
Könyvtár
BUDAPEST

1-2

ANUL IV

IANUARIE–IUNIE 1953

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1-2

ANUL IV

IANUARIE—IUNIE 1953

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician D. POMPEIU – Redactor responsabil;
A. HALANAY; GH. MIHOC; N. TEODORESCU;
G. VRĂNCEANU

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul IV, Nr. 1—2 Ianuarie—Iunie 1953

SUMAR

	Pag.
GH. PIC, Despre quasi-centrul unui grup	7
TUDOR GANEA, Contractibilitatea produselor simetrice	23
D. BARBILIAN, Normalităţi involutive locale resp. globale	29
MIHAIL BENADO, Teoria abstractă a relaţiilor de normalitate	69
G. VRĂNCEANU, Asupra grupurilor de mişcare ale unui spaţiu riemannian cu patru dimenisuni	121
I. P. ELIANU, Cercetări asupra sistemelor de ecuaţii lineare cu derivate parţiale de tip Laplace	155
M. ANTONESCU, Asupra teoremei lui Hilbert din geometria lui Lobacevschi-Bolyai	197
V. DUMITRAŞ, Determinarea spaţiilor A_3 care admit o rotaţie în fiecare punct	213
CONST. C. POPOVICI, Asupra metodei iteraţiei, aplicată la un sistem de ecuaţii lineare	233

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome IV, Nos 1–2 Janvier–Juin 1953

SOMMAIRE

	Page
GH. PIC, Sur le quasi-centre d'un groupe	7
TUDOR GANEA, Contractilité des produits symétriques	23
D. BARBILIAN, Normalités localement ou intégralement involutives	29
MIHAIL BENADO, Théorie abstraite des relations de normalité	69
G. VRĂNCEANU, Sur les groupes de mouvement d'un espace de Riemann à quatre dimensions	121
I. P. ELIANU, Recherches sur les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du type de Laplace	155
M. ANTONESCU, Sur un théorème de Hilbert dans la géométrie non euclidienne de Lobatchewski - Bolyai	197
V. DUMITRAȘ, Sur les espaces A_3 qui admettent une rotation	213
CONST. C. POPOVICI, Sur l'itération des systèmes linéaires.	233

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том IV, № 1—2 Январь — июнь 1953

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Г. ПИК, О квазицентре группы	7
Т. ГАНЯ, Контрактильность симметрических произведений	23
Д. БАРБИЛИАН, Интегрально или локально инволютивные нормальности	29
М. БЕНАДО, Абстрактная теория соотношений нормальности	69
Г. ВРЭНЧАНУ, О группах движений четырехмерного риманова пространства	121
И. П. ЕЛИАНУ, О системах линейных уравнений с частными производными типа Лапласа	155
М. АНТОНЕСКУ, Об одной теореме Гильберта в неевклидовой геометрии Лобачевского-Больаи	197
В. ДУМИТРАШ, О пространствах A_3, допускающих вращение	213
К. К. ПОПОВИЧ, Об итерации линейных систем	233

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

DESPRE QUASI-CENTRUL UNUI GRUP

DE

GH. PIC

1. Cunoaşterea proprietăţilor unui grup este o problemă care prezintă multe dificultăţi; de aceea, pentru a putea spune ceva despre un grup, ne mulţumim de multe ori să indicăm proprietăţi ale subgrupurilor acestuia. O deosebită importanţă au proprietăţile unui subgrup normal şi ale grupului cât al acestuia, deoarece ele ne dau indicaţii privitoare la grupul întreg.

Dacă luăm ca subgrup normal centrul grupului, obţinem însă relativ puţine indicaţii, deoarece acesta nu este destul de cuprinzător. Situaţia se schimbă dacă în locul centrului alegem nucleul grupului, aşa cum a făcut R. B a e r [1]. In acest caz, simplul fapt că nucleul nu este abelian ne spune că grupul întreg nu poate conţine elemente aperiodice. De asemenea, se arată că grupul cât al grupului întreg şi al nucleului nu poate fi un ciclu finit.

Dacă în locul nucleului vom lua un alt subgrup şi mai cuprinzător, atunci vom obţine şi mai multe indicaţii privitoare la grupul întreg, dar şi stabilirea teoremelor care ne indică aceste proprietăţi devine mai dificilă. In lucrarea de faţă, ne propunem să cercetăm proprietăţile grupului în funcţie de natura quasi-centrului şi a grupului cât al quasi-centrului. Acest studiu nu a fost, după câte ştim, făcut până acum.

2. Vom înţelege prin quasi-centru, subgrupul normal definit de O. O r e [2], şi anume:

Quasi-centrul unui grup $\mathcal{G}$ este subgrupul generat de toate subgrupurile ciclice permutabile cu toate subgrupurile lui $\mathcal{G}$.

Aceasta înseamnă că, dacă s este o generatoare a quasi-centrului, iar t un element oarecare al grupului, atunci

$$s^{-1} ts = s^{\alpha} t^{\beta}$$

Din definiţia amintită, rezultă că quasi-centrul cuprinde nucleul grupului.

Atât în cazul centrului subgrupului comutator cât şi al nucleului, studiul acestor subgrupuri este uşurat de faptul că ele sunt nu numai subgrupuri normale ci, mai mult, ele sunt caracteristice. In cazul quasi-centrului, avem de asemenea:

T e o r e m a I. *Quasi-centrul este un subgrup caracteristic al grupului.*

In baza definiţiei automorfismului, un subgrup ciclic permutabil cu orice subgrup al grupului $\mathcal{G}$ este transformat într'un subgrup ciclic care se bucură

de aceeaşi proprietate. Propoziţia urmează acum din definiţia quasi-centrului dată mai sus.

Teorema II. *Quasi-centul $Q(\mathcal{G})$ al unui grup $\mathcal{G}$ este nilpotent.*

In cazul particular când quasi-centrul este abelian, propoziţia este evidentă; îl excludem în cele ce urmează.

Pentru a demonstra că quasi-centrul este nilpotent, este suficient să arătăm că orice element generator s, al cărui ordin este o putere a numărului prim p, este comutativ cu orice element t, al cărui ordin este o putere a numărului prim q diferit de p, şi că ordinul produsului a două elemente t_1 şi t_2, al căror ordin este o putere a numărului prim p, este din nou o putere a numărului prim p.

Vom demonstra aceasta în mai mulţi paşi.

a) s^p este comutativ cu t^q. Să considerăm grupul $\mathcal{H}$ generat de s şi t. Elementul s fiind generator al quasi-centrului, urmează că orice element al grupului poate fi scris sub forma $s^\alpha t^\beta$. Deoarece elementul s^p este de asemenea un element generator al quasi-centrului, urmează că s^p va fi numai atunci un generator independent al grupului $\mathcal{H}$, când vom putea scrie $s = s^{\alpha p} t^\beta$. Deoarece aceasta este evident imposibil, urmează că în niciun sistem de generatori independenţi nu va figura s^p. Analog se arată că din aceste sisteme nu face parte nici t^q. Prin urmare, s^p şi t^q fac parte din subgrupul lui Frattini. Din faptul că grupul lui Frattini este nilpotent,*) deducem proprietatea enunţată.

b) s şi t^q satisfac o relaţie de forma

$$st^q = (t^q)^{1+\mu q} s^{1+\lambda p} \tag{1}$$

s fiind generator al quasi-centrului, urmează că avem şirul de relaţii:

$$s(t^q)^i = (t^q)^{\alpha_i} s^{\beta_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1$$

Se vede uşor că niciunul dintre numerele β_i nu poate fi egal cu zero modulo p. Prin urmare, sau

α) între numerele β_i este unul egal cu 1 mod. p, şi atunci, alegând pe $(t^q)^i$ ca generatoare, vom avea o relaţie în care exponentul lui s are forma cerută de enunţ, sau

β) există cel puţin două valori i_1 şi i_2, astfel ca $\beta_{i1} \equiv \beta_{i_2} \bmod. p$. Atunci vom avea însă

$$s(t^q)^{i_1} [s(t^q)^{i_2}]^{-1} = (t^q)^{\alpha_{i_1}} s^{\beta i_1} [(t^q)^{\alpha_{i_2}} s^{\beta_{i_2}-1}$$

adică

$$s(t^q)^{i_1-i_2} s^{-1} = (t^q)^{\alpha_{i_1}} s^{\beta_{i_1}-\beta_{i_2}} (t^q)^{-\alpha_{i_2}}$$

Ţinând seama că $\beta_{i_1} - \beta_{i_2} \equiv 0 \pmod{p}$ şi că s^p este comutativ cu t^q, deducem o relaţie de forma

$$s(t^q)^i s^{-1} = (t^q)^\alpha (s^p)^\gamma$$

Deci, alegând $(t^q)^i$ ca generatoare, obţinem o relaţie de forma

$$st^q = (t^q)^\alpha s^{1+p\gamma}$$

Alegerea lui $(t^q)^i$ ca generatoare este inadmisibilă numai atunci când i este un multiplu al lui q. In acel caz însă, vom avea, înmulţind cu $(t^q)^p$

$$s(t^q)^{i+p} s^{-1} = (t^q)^{\alpha'} (s^p)^{\gamma'}$$

şi alegând acum $(t^q)^{i+p}$ ca generatoare, vom ajunge la o concluzie analoagă.

*) Această proprietate rezultă cu uşurinţă dintr'o proprietate cunoscută acestui grup, indicată de exemplul la [5] p. 401.

Alegând potrivit o putere a lui s ca generatoare, ajungem, prin raţionamente asemănătoare cu cele precedente, la concluzia că subsistă relaţia (1).

c) s este comutativ cu t^q. Din relaţia (1) rezultă

$$t^{-q} s^2 t^q = t^{\mu q^2} s^{1+\lambda p} \cdot t^{\mu q^2} s^{1+\lambda p}$$

şi, ţinând seamă că s^p şi t^{q^2} sunt comutativi

$$t^{-q} s^2 t^q = t^{2\mu q^2 + \mu_2 q^3} s^{2+\lambda_2 p}$$

şi, în general

$$t^{-q} s^i t^q = t^{i\mu q^2 + \mu_i q^3} s^{i+\lambda_i p}$$

In particular, dacă $i = p$, vom avea

$$t^{-q} s^p t^q = t^{\mu p q^2 + \mu_p q^3} s^{p + \lambda_p p}$$

Fie q^k ordinul lui t. Atunci, ţinând seamă că s^p şi t^q sunt comutativi, deducem că

$$\mu \equiv 0 \pmod{q^{k-2}}$$

Ţinând seamă de acest rezultat, deducem că

$$t^{-q} s^q t^q = s^{q+\lambda_q p}$$

şi alegând s^q ca generatoare, vom avea prin urmare

$$t^{-q} s t^q = s^{1+\lambda p}$$

De aici

$$t^{-q} s^p t^q = s^{p+\lambda p^2}$$

Fie p^l ordinul lui s. Atunci s^p şi t^q fiind comutativi, deducem

$$\lambda \equiv 0 \pmod{p^{l-2}}$$

şi, prin urmare

$$t^{-pq} s t^{pq} = s$$

Alegând acum în locul lui t^q pe t^{pq} ca generatoare, ajungem la rezultatul enunţat.

d) t este comutativ cu s^p. Acest rezultat se stabileşte analog cu cel precedent.

e) s şi t sunt comutativi. Raţionamente analoage cu cele precedente ne arată existenţa unei relaţii de forma

$$s t s^{-1} = t^{1+\lambda q} s^{\mu p}$$

Ţinând seamă de rezultatele precedente, deducem de aici

$$s t^i s^{-1} = t^{i+i\lambda q} s^{i\mu p}$$

şi

$$s t^q s^{-1} = t^{q+\lambda q^2} s^{\mu p q}$$

Prin urmare, s şi t^q fiind comutativi

$$\lambda \equiv 0 \pmod{q^{k-2}} \quad \mu \equiv 0 \pmod{p^{l-1}}$$

adică, forma relaţiei întrebuinţate de noi va fi

$$sts^{-1} = t^{1+\lambda' q^{k-1}}$$

De aici, se deduce că

$$s^p\, ts^{-p} = t^{1+\lambda' q k-1 p}$$

s^p fiind comutativ cu t, urmează că

$$\lambda' \equiv 0 \pmod{q}$$

de unde propoziţia enunţată.

Pentru a termina demonstraţia teoremei, va trebui să arătăm că produsul a două elemente t_1 şi t_2 al căror ordin este o putere a numărului prim p, este din nou o putere a numărului prim p. După cum se vede imediat, va fi destul să arătăm că propoziţia subsistă în cazul când t_1 este o generatoare a quasi-centrului, iar t_2 un element oarecare al cărui ordin este o putere a numărului prim p. Mai precis, vom arăta prin inducţie completă că, dacă ordinul lui t_1 şi t_2 este o putere a lui p, cel mult egală cu p^k, atunci t_1 fiind element generator al quasi-centrului, urmează, după cum vom vedea în curând, că subsistă o relaţie de forma

$$t_1^{-1}\, t_2\, t_1 = t_1^{\alpha p}\, t_2^{1+\beta p} \tag{1'}$$

Prin urmare, dacă t_1 şi t_2 sunt cel mult de ordin p, atunci t_1 şi t_2 sunt comutativi şi deci propoziţia subsistă dacă $k = 1$. Să presupunem acum că propoziţia este stabilită pentru elementele al căror ordin este cel mult egal cu p^{k-1}.

Din (1') rezultă că

$$(t_1 t_2)^2 = t_1 t_2 t_1 t_2 = t_1^{2+\alpha p}\, t_2^{2+\beta p}$$

$$(t_1 t_2)^3 = t_1^{2+\alpha p}\, t_2^{2+\beta p}\, t_1 t_2 = t_1^{3+\alpha_3 p}\, t_2^{3+\beta_3 p}$$

deoarece, dacă t_1 este un element generator al quasi-centrului, atunci şi t_1^p se bucură de această proprietate şi deci i se aplică consideraţiile de mai înainte. In general, vom avea

$$(t_1 t_2)^i = t_1^{i+\alpha_i p}\, t_2^{i+\beta_i p}$$

şi în particular, dacă $i = p$

$$(t_1 t_2)^p = t_1^{p+\alpha_p p}\, t_2^{p+\beta_p p}$$

t_1^p şi t_2^p fiind elemente al căror ordin este cel mult egal cu p^{k-1}, urmează, în baza ipotezei inducţiei complete, că produsul $t_1^{p+\alpha_p p}\, t_2^{p+\beta_p p}$ este cel mult de ordin p^{k-1}, deci $t_1\, t_2$ este de ordin, putere a lui p, cel mult egală cu p^k.

3. Ne propunem acum să cercetăm mai de aproape relaţiile ce există între elementele generatoare necomutative ale quasi-centrului a căror ordin este o putere a aceluiaşi număr prim p.

Fie s şi t două elemente generatoare ale lui $Q(\mathfrak{S})$. Atunci, între s şi t avem relaţia

$$s^{-1}\, ts = t^{\alpha}\, s^{\beta} \tag{1''}$$

Vom arăta că:

$\alpha - 1$ şi β sunt congruenţi cu zero mod. p

Să considerăm şirul de relaţii

$$s^{-\lambda}\, ts^{\lambda} = t^{\alpha_\lambda}\, s^{\beta_\lambda} \qquad 1 \leqslant \lambda < p$$

Observăm că niciunul dintre numerele α_λ nu poate fi congruent cu zero mod. p.

Intr'adevăr, dacă am avea

$$s^{-\lambda} ts^{\lambda} = t^{\alpha_\lambda p} s^{\beta} \tag{2}$$

atunci de aici ar urma că

$$t = s^{\lambda} t^{\alpha p} s^{-\lambda} \cdot s^{\beta}$$

adică

$$s^{\lambda} t^{\alpha p} s^{-\lambda} = ts^{-\beta}$$

Pe de altă parte, t^p şi s sunt de asemenea elemente generatoare ale quasi-centrului, deci

$$s^{\lambda} t^{\alpha p} s^{-\lambda} = t^{\sigma p} s^{\gamma\lambda}$$

Comparând aceste două relaţii, găsim

$$t = t^{\sigma p} s^{\gamma\lambda+\beta}$$

Aceasta ar însemna însă că grupul generat de t şi s ar fi generat şi de t^p şi s, ceea ce este absurd.

Să considerăm acum şirul relaţiilor (2) pentru $\lambda = 1,2, \ldots, p-1$. In baza celor stabilite mai înainte, rezultă că niciunul dintre numerele α_λ nu poate fi congruent cu zero mod. p. Dacă niciuna dintre valorile α_λ nu ar fi congruentă cu 1 mod. p, vor trebui să existe două numere întregi λ_1 şi λ_2, astfel ca $\alpha_{\lambda_1} \equiv \alpha_{\lambda_2} \equiv \alpha$ mod. p. Vom avea deci

$$s^{-\lambda_1} ts^{\lambda_1} = t^{\alpha} s^{\beta\lambda_1}$$

$$s^{-\lambda_2} ts^{\lambda_2} = t^{\alpha+\gamma p} s^{\beta\lambda_2}$$

Din ultima deducem că

$$ts^{-\beta\lambda_2} = s^{\lambda_2} t^{\alpha} s^{-\lambda_1} s^{\lambda_2} t^{\gamma p} s^{-\lambda_2}$$

astfel încât

$$s^{-(\lambda_1-\lambda_2)} ts^{\lambda_1-\lambda_2} = ts^{-\beta\lambda_2} s^{-\lambda_2} t^{\gamma p} s^{\lambda} s^{\beta\lambda_1}$$

şi deoarece $s^{-\lambda_2} t^{\gamma p} s^{\lambda_2}$ trebue să fie de forma $t^{\sigma p} s^{\tau}$, urmează că am ajuns la concluzia că

$$s^{-(\lambda_1-\lambda_2)} ts^{\lambda_1-\lambda_2} = t^{1+\sigma' p} s^{\tau'}$$

în contradicţie cu ipoteza că niciunul dintre numerele α din relaţiile (1'') nu este congruent cu 1 (mod. p).

Analog, se arată că $\beta \equiv 0$ mod. p. Putem rezuma rezultatele obţinute în următoarea

T e o r e m a III. *Două generatoare s şi t ale quasi-centrului al căror ordin este o putere a aceluiaşi număr prim p, satisfac o relaţie de forma*

$$sts^{-1} = t^{1+ap^k} s^{bp^h} \tag{3}$$

unde nici a nici b nu sunt divizibili cu p.

Ne propunem acum să cercetăm forma relaţiei satisfăcute de s şi t^{p^l} ştiind că s şi t satisfac relaţia (3). Vom avea

$$st.t^{p-1} = t^{1+ap^k} s^{1+bp^h} t^{p-1}$$

$$= t^{1+ap^k} s^{bp^h} t^{1+ap^k} s^{1+bp^h} t^{p-2} = \ldots =$$

$$= \left(t^{1+ap^k} s^{bp^h}\right)^p s$$

Aplicând consideraţiile care au dus la stabilirea formulei (3), deducem că

$$st^{p} = t^{p+a'p^{k+1}}\, s^{1+b'p^{k+1}}$$

unde

$$a' \equiv a \text{ şi } b' \equiv b \quad \text{mod. } p.$$

In general, vom avea:

$$st^{p^l}\, s^{-1} = t^{p^l+a''p^{k+l}}\, s^{b''p^{k+l}} \qquad a'' \equiv a;\ b'' \equiv b \text{ mod. } p. \tag{4}$$

Analog se arată că

$$s^{p^l}\, ts^{-p^l} = t^{1+a'''p^{k+l}}\, s^{b'''p^{k+l}} \qquad a''' \equiv a;\ b''' \equiv b \text{ mod. } p \tag{4'}$$

Invers, ne propunem să arătăm că:

Teorema IV. *Dacă quasi-centrul unui grup este generat de două elemente şi dacă elementele s şi t ale quasi-centrului satisfac o relaţie de forma* (3), *atunci ele pot fi considerate ca generatoare ale quasi-centrului, dacă atât s, cât şi t sunt permutabili cu orice element al grupului. Face excepţie cazul* $p = 2$, $k = 1$.

Va trebui deci să arătăm că oricare ar fi λ_1, λ_2 şi μ, putem determina totdeauna două numere întregi α şi β astfel ca

$$t^{\lambda_1}\cdot t^{\lambda_2}\, s^{\mu} = (t^{\lambda_2}\, s^{\mu})^{\alpha}\, (t^{\lambda_1})^{\beta}$$

Observăm că putem totdeauna presupune că $\mu = 1$, căci în loc să considerăm ca generatoare ale grupului pe s, putem privi ca atare pe s^{μ}. De asemenea, vom putea presupune pe $\lambda_1 = 1$.

Pe de altă parte deducem din (3) că

$$st^{\lambda}\, s^{-1} = t^{\lambda+a'\lambda p^{k}}\, s^{\lambda b'p^{h}}$$

Deci $\qquad a' \equiv a;\ b' \equiv b \text{ mod. } p$

$$(t^{\lambda}\, s)^2 = t^{\lambda}\, s\, t^{\lambda}\, s = t^{2\lambda+a'\lambda p^{k}}\, s^{2+b'\lambda p^{h}}$$

$$(t^{\lambda}\, s)^3 = t^{2\lambda+a'\lambda p^{k}}\, s^{2+b'\lambda p^{h}}\, t^{\lambda}\, s = t^{3\lambda+\binom{3}{2}a'\lambda p^{k}}\, s^{3+\binom{3}{2}b'\lambda p^{h}}\, t^{a''p^{k+h}}\, s^{b''p^{2h}}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\

Analog, se poate arăta că se pot determina totdeauna două numere întregi γ şi δ, astfel ca

$$s^{\xi_1} \cdot (t^{\eta}\ s^{\xi_2}) = (t^{\eta}\ s^{\xi_2}) \cdot (s^{\xi_1})^{\delta}$$

Consideraţii analoage cu cele făcute de mine în lucrarea indicată la [4] ne conduc la excluderea cazului $p = 2,\ k = 1$.

4. Să cercetăm acum cazul când o componentă primară a quasi-centrului este generată de trei elemente $s_1,\ s_2,\ s_3$.

Vom preciza natura relaţiilor prin care sunt legaţi s_1 cu s_2, s_2 cu s_3, s_3 cu s_1 în cazul când grupurile ciclice generate de aceste elemente nu au, două câte două, subgrupuri comune.

Observăm că în baza teoremei III subsistă următoarele relaţii de forma

$$\begin{cases} s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_{21} p^{k_{21}}}\ s_1^{1+\alpha_{12} p^{k_{12}}} \\ s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_{32} p^{k_{32}}}\ s_2^{1+\alpha_{23} p^{k_{23}}} \\ s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_{13} p^{k_{13}}}\ s_3^{1+\alpha_{31} p^{k_{31}}} \end{cases} \tag{5}$$

De aici deducem

$$s_1 s_2 s_1^{-1} = s_2^{1+\alpha_{21} p^{k_{21}}}\ s_1^{\alpha_{12} p^{k_{12}}}$$

$$s_1 s_3 s_1^{-1} = s_1^{-\alpha_{13} p^{k_{13}}}\ s_3^{1-\alpha_{31} p^{k_{31}}}$$

şi pe urmă că

$$s_1 \cdot (s_3 s_2) \cdot s_1^{-1} = s_1^{-\alpha_{13} p^{k_{13}}} \cdot \left(s_3^{1-\alpha_{21} p^{k_{31}}}\ s_2^{1+\alpha_{21} p^{k_{21}}}\right) s_1^{\alpha_{12} p^{k_{12}}}$$

Să formăm grupul cât generat de $s_3^{p^{k_{32}}+k_{23}}\ ;\ s_3^{p^{2k_{32}}}\ ;\ s_2^{p^{k_{23}}+k_{32}}\ ;\ s_2^{p^{2k_{23}}}$ sau, cu alte cuvinte, să luăm modulul lui $s_3^{p^{k_{32}}+k_{23}}\ ;\ s_3^{p^{2k_{32}}}\ ;\ s_2^{p^{k_{23}}+k_{32}}\ ;\ s_2^{p^{2k_{23}}}$. Atunci deducem că

$$\alpha_{31} + \alpha_{21} = 0 \qquad k_{31} = k_{21} = k_1$$

Analog, se arată că, luând modulul lui $s_1^{p^{2k_2}}\ ;\ s_1^{p^{2k_3}}\ ;\ s_2^{p^{2k_1}}\ ;\ s_2^{p^{2k_3}}\ ;\ s_3^{p^{2k_2}}\ ;\ s_3^{p^{2k_1}}\ ;$

$$s_1^{p^{k_1}+k_2}\ ;\ s_1^{p^{k_1}+k_3}\ ;\ s_2^{p^{k_2}+k_1}\ ;\ s_2^{p^{k_2}+k_3}\ ;\ s_3^{p^{k_3}+k_1}\ ;\ s_3^{p^{k_3}+k_2}$$

$$\begin{cases} s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}}\ s_1^{1-\alpha_2 p^{k_2}} \\ s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_2 p^{k_2}}\ s_2^{1-\alpha_3 p^{k_3}} \\ s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_3 p^{k_3}}\ s_3^{1-\alpha_1 p^{k_1}} \end{cases} \tag{6}$$

Să presupunem că am numerotat generatoarele $s_1,\ s_2,\ s_3$ astfel ca

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$$

Atunci relaţiile (5) se vor scrie

$$\begin{cases} s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu_{12} p^{2k_1}}\ s_1^{1-\alpha_2 p^{k_2}+\mu_{21} p^{k_1+k_2}} \\ s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_2 p^{k_2}+\mu_{23} p^{2k_1}}\ s_1^{1-\alpha_3 p^{k_3}+\mu_{32} p^{2k_1}} \\ s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_3 p^{k_3}+\mu_{13} p^{k_1+k_2}}\ s_3^{1-\alpha_1 p^{k_1}+\mu_{31} p^{2k_1}} \end{cases} \tag{7}$$

Se verifică cu uşurinţă că în formulele (7), valoarea numerelor μ se schimbă dacă înlocuim pe s_i cu o putere a lui s_i (cu excepţia cazului când s_i este de ordin p^{2h}), pe când forma ca atare a relaţiei nu se schimbă.

Să presupunem acum, ceea ce se poate demonstra otdeauna cu ajutorul metodelor întrebuinţate în [3], că am ales generatoarele s_2 şi s_3 astfel ca

$$s_2\ s_3 = s_3^{1+p^{k_2}}\ s_2^{1+p^{k_3}}$$

De aici se poate deduce că mod. $s_2^{p^{2k_2+k_3}}$ şi $s_3^{p^{2k_2+k_3}}$

$$(s_3 s_2)^{\lambda} = s_3^{\lambda+\binom{\lambda}{2}p^{k_2}+\binom{\lambda}{3}p^{2k_2}(1+\gamma' p)}\ s_2^{\lambda+\binom{\lambda}{2}p^{k_3}+\binom{\lambda}{3}p^{k_2+k_3}(1+\delta' p)} \tag{8}$$

Vom utiliza această formulă pentru calculul lui

$$s_1 (s_3\ s_2)\ s_1^{-1} = s_1\ s_3\ s_1^{-1} \cdot s_1\ s_2\ s_1^{-1}.$$

Observăm că, aşa cum am dedus relaţiile (6) şi (7), se poate arăta că şi

$$s_1 s_3 = s_3^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu'_{31} p^{2k_1}}\ s_1^{1-\alpha_3 p^{k_3}+\nu'\beta p^{k_1+k_2}}$$

aşa încât vom avea

$$s_1 s_3 s_1^{-1} = s_3^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu'_{31} p^{2k_1}}\ s_1^{-\alpha_3 p^{k_3}+\mu'_{13} p^{k_1+k_2}}$$

$$s_1 s_2 s_1^{-1} = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu_{21} p^{2k_1}}\ s_1^{-\alpha_2 p^{k_2}+\mu_{12} p^{k_1+k_2}}$$

Deci

$$s_1(s_3 s_2)\ s_1^{-1} = s_3^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu'_{31} p^{2k_1}}\ s_1^{-\alpha_3 p^{k_3}+\mu'_{13} p^{k_1+k_2}}\ s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu_{21} p^{2k_1}}\ s_1^{-\alpha_2 p^{k_2}+\mu_{12} p^{k_1+k_2}} =$$

$$= s_3^{1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu'_{31} p^{2k_1}}\ s_2^{(1+\alpha_1 p^{k_1}+\mu_{21} p^{2k_1})(1+\nu p^{\overline{k}})}\ s_1^{\alpha p^{\overline{k}}}$$

unde $\overline{k}$ este egal cu cel mai mic dintre numerele k_3+k_1 şi $2k_2+k_1$.

Ţinând seamă că s_1 este generator al quasi-centrului, ajungem la concluzia că relaţia de mai sus va trebui să se poată scrie şi sub forma

$$s_1 (s_3 s_2)\ s_1^{-1} = (s_3 s_2)^{\lambda}\ s_1^{\mu}$$

Inlocuind pe $(s_3\ s_2)^{\lambda}$ prin egalul dat de (8), ţinând seamă că înlocuind pe s_1 printr'o putere a lui s_1 formula (8) nu se schimbă, ca formă, ci se modifică numai numerele μ_{ik}, ajungem la concluzia că va trebui ca

$$s_3^{\mu'_{31} p^{2k_1}} = s_2^{p_{21} p^{2k_1}} = e$$

Deoarece însă numerele μ nu sunt divizibile cu p, după cum se arată înlocuind pe s_1 cu s_1^2 în relaţiile care dau pe $s_1\ s_3$ resp. $s_1\ s_2$, ajungem în sfârşit la concluzia că

$$s_1^{p^{2k_1}} = s_2^{p^{2k_1}} = e$$

Procedând analog, vom avea, calculând pe $s_3\ (s_1 s_2)\ s_3^{-1}$ că şi

$$s_1^{p^{k_1+k_2}} = e$$

aşa încât relaţiile (6) subsistă fără nicio restricţie. Am demonstrat astfe

Teorema V. *Dacă elementele* s_1, s_2, s_3 *sunt generatoare ale quasi-centrului şi dacă grupurile ciclice generate de aceste elemente nu au două, câte două, alt element comun decât* e, *atunci ele satisfac relaţii de forma* (6). *Forma acestor relaţii nu se schimbă, dacă înlocuim pe* s_i *printr'una din puterile lui.*

In cazul când grupurile ciclice generate de s_1, s_2, s_3 au, câte două, o intersecţie care cuprinde mai mult decât elementul unitate, relaţiile nu mai au forma simplă indicată mai sus. Deoarece însă, în ceea ce priveşte cercetările noastre privitoare la structura grupului, are importanţă numai faptul că quasi-centrul este abelian sau nu, omitem aceste rezultate. In cele ce urmează, ori de câte ori quasi-centrul va poseda un subgrup generat de două elemente s şi t care satisfac o relaţie de forma (3), vom spune că acesta are o componentă pseudo-cuaternionică.

5. Vom cerceta acum comportarea elementelor generatoare aperiodice ale quasi-centrului. Avem următoarea teoremă:

Teorema VI. *Generatoarele aperiodice ale quasi-centrului generează un grup abelian.*

Fie u şi v două elemente generatoare aperiodice ale quasi-centrului. Să presupunem mai întâi că grupurile ciclice generate de acestea au în comun numai elementul e.

Vom avea

$$uv = v^{\alpha} u^{\beta}$$

Dar şi v^{α} şi u^{β} sunt elemente generatoare ale quasi-centrului. Deci

$$v^{\alpha} u^{\beta} = (u^{\beta})^{\lambda} (v^{\alpha})^{\mu} = u \cdot v$$

ceea ce este posibil numai dacă $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$.

Avem deci de discutat 4 cazuri:

1) $\alpha = -1$, $\beta = 1$
2) $\alpha = -1$, $\beta = -1$
3) $\alpha = 1$, $\beta = -1$
4) $\alpha = 1$, $\beta = 1$

1. $\alpha = -1$, $\beta = 1$ adică $uvu^{-1} = v^{-1}$. Vom avea deci

$$(vu)^2 = vu\, vu = u^2 \tag{9}$$

Deoarece u este un element generator al quasi-centrului, vom avea

$$u \cdot (vu)\ u^{-1} = (vu)^{\alpha} u^{\beta}$$

adică, ţinând seamă de (9) punem $\alpha = 2\gamma + \varepsilon$, unde ε este egal cu zero sau unu.

Dacă $\varepsilon = 1$, atunci

$$u \cdot (vu)\, u^{-1} = vu \cdot u^{2\gamma} \cdot u^{\beta}$$

adică

$$uv = v \cdot u^{2\gamma+\beta+1}$$

în contradicţie cu ipoteza făcută iniţial.

Dacă însă $\varepsilon = 0$, atunci

$$u \cdot (\varphi u) \cdot u^{-1} = u^{2\gamma+\beta}$$

ceea ce este absurd.

Tot aşa se arată că trebue exclus cazul 3).

2). Vom avea

$$u\varphi = \varphi^{-1} u^{-1} \tag{10}$$

In acest caz, va trebui să putem determina totdeauna două numere α şi β, astfel ca

$$\varphi^{-1} \cdot (\varphi u) \cdot \varphi = (\varphi u)^{\alpha} \varphi^{\beta}$$

Insă

$$(\varphi u)^2 = \varphi u \cdot \varphi u = e$$

deci $\alpha = 1$ şi

$$\varphi^{-1} \cdot (\varphi u) \cdot \varphi = \varphi u \cdot \varphi^{\beta} \qquad u\varphi = \varphi \cdot u \cdot \varphi^{\beta}$$

şi

$$u = \varphi u \, \varphi^{\beta-1}$$

Insă din (10) deducem că $\varphi u = u^{-1} \varphi^{-1}$, astfel încât ultima relaţie devine

$$u = u^{-1} \varphi^{\beta-2} \qquad u^2 = \varphi^{\beta-2}$$

în contradicţie cu ipoteza iniţială făcută despre grupurile ciclice generate de u şi φ.

Ne rămâne deci ca singură posibilitate cazul 4), adică tocmai ceea ce s'a afirmat în teorema enunţată.

Să notăm cu (u) grupul ciclic generat de u şi analog cel generat de φ. Să cercetăm cazul când $(u) \cap (\varphi) = w \supset e$. Acest subgrup w va fi, după cum se ştie, aperiodic, iar grupurile $(u) / w = (u')$ şi $(\varphi) / w = (\varphi')$ vor fi grupuri ciclice finite. Pentru a stabili acum unele proprietăţi ale lui (u') şi (φ'), avem nevoie de următoarea lemă

L e m ă. Fie $\mathfrak{G}$ un grup şi $\mathfrak{N}$ un subgrup normal conţinut în $Q(\mathfrak{G})$. Atunci $Q(\mathfrak{G} / \mathfrak{N}) \supset Q(\mathfrak{G}) / \mathfrak{N}$.

Fie $s_1, s_2, \ldots$ elementele generatoare ale quasi-centrului. Aceste elemente nu aparţin toate lui $\mathfrak{N}$, căci atunci $Q(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{N}$ contrar ipotezei. Fie s_1 un astfel de generator. Atunci

$$(s_1 \mathfrak{N})^{-1} \cdot (a \mathfrak{N}) . (s_1 \mathfrak{N}) = s_1 \, a \, \mathfrak{N} \, s_1^{-1}$$

Insă s_1 fiind generator al quasi-centrului

$$s_1 \, a \, s_1 = a^k \, s_1^l$$

aşa încât

$$s_1 a \, \mathfrak{N} \, s_1^{-1} = a^k \, s_1^l \, \mathfrak{N} = (a \, \mathfrak{N})^k \, (s_1 \, \mathfrak{N})^l$$

deci $s_1 \, \mathfrak{N}$ este un generator al quasi-centrului lui $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Prin urmare, orice element generator s al quasi-centrului lui $\mathfrak{G}$, care nu este cuprins în $\mathfrak{N}$ este

totodată un generator al quasi-centrul lui $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Aceasta nu este însă în fond altceva decât enunţul lemei.

Să aplicăm acum această lemă în cazul când $Q(\mathfrak{G})$ este generat chiar de u şi v. Atunci, în baza lemei noastre u' şi v' vor fi generatoare ale quasi-centrului lui $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Fie ordinul lui u şi v $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ resp. $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$. Ridicând la puteri adecvate, vom putea obţine totdeauna puteri ale lui u' al cărui ordin să fie o putere a lui p_i, sau puteri ale lui v' al căror ordin să fie o putere a lui q_h. Să le notăm pentru simplificarea scrisului tot cu u' şi v'. Vom deosebi acum două cazuri, după cum ordinele lui u' şi v' sunt puteri a două numere prime distincte sau ale aceluiaşi număr prim.

a) Ordinele lui u' şi v' sunt puteri a două numere prime distincte. Atunci, în baza celor văzute la început, u' şi v' sunt comutative, deci $u = u' w^{\alpha}$ şi $v = v' w^{\beta}$ vor satisface o relaţie de forma

$$uvu^{-1} = v \cdot w^{\gamma}$$

Fie u^{δ} acea putere a lui u care ne dă un element al lui w. Atunci, din relaţia de mai sus rezultă că

$$u^{\delta} vu^{-\delta} = v \cdot w^{\gamma\delta}$$

însă u^{δ} fiind un element al lui w este comutativ cu v, deci $\gamma_{\delta} = 0$, adică $\gamma = 0$ şi u şi v sunt comutativi.

b) Ordinele lui u' şi v' sunt puteri ale aceluiaşi număr prim p. Dacă u' şi v' sunt comutativi, atunci ajungem ca mai înainte, la aceeaşi concluzie.

In caz contrar, u' şi v' vor satisface o relaţie de forma

$$u'v'(u')^{-1} = v'^{1+\lambda p^r} u'^{\mu p^s}$$

iar u şi v relaţia:

$$uvu^{-1} = v^{1+\lambda p^r} u^{\mu p^s} w^{\gamma}$$

Să presupunem că $v^{p^t} \in w$. Atunci

$$uv^{p^t} u^{-1} = v^{p^t + \lambda' p^{\gamma+t}} u^{\mu' p^{s+t}} w^{\delta}$$

Insă v fiind element al lui w, este comutativ cu u. Deci $\lambda' = \mu' = 0$. Insă, după cum am văzut, $\lambda \equiv \lambda'$ (mod. p), $\mu \equiv \mu'$ (mod. p), iar λ şi μ nu sunt divizibili cu p, deci şi λ şi μ sunt egali cu zero. Aceasta înseamnă însă că u' şi v' sunt comutativi.

Să cercetăm acum legătura ce există între elementele aperiodice ale quasi-centrului şi elementele de ordin finit ale acestuia în cazul că quasi-centrul nu este abelian. Ne propunem să demonstrăm următoarea.

Teorema VII. *Orice element generator aperiodic al quasi-centrului este comutativ cu orice element generator periodic al acestuia.*

Fie s un element generator al quasi-centrului de ordin finit, iar g unul aperiodic.

Vom arăta întâi că putem determina totdeauna o putere a lui g pe care o vom nota cu $\bar{g}$, astfel ca g să fie comutativ cu s.

Intr'adevăr, vom avea următorul şir infinit

$$s^{-1} g s = g^{k_1} s^{h_2}$$
$$s^{-1} g s = g^{k_2} s^{h_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s^{-1} g s = g^{ki} s^{hi}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Deoarece s este de ordin finit, urmează că există în acest şir două numere i_1 şi i_2 astfel ca $s^{hi_2} = s^{hi_1} = s^h$, adică

$$s^{-1} g^{i_1} s = g^{ki_1} s^h$$
$$s^{-1} g^{i_2} s = g^{ki_2} s^h$$

De aici deducem că

$$s^{-1} g^{i_1} s \cdot s^{-1} g^{-i_2} s = g^{ki_1} s^h \cdot s^{-h} g^{-ki_2} = g^{ki_1 - ki_2}$$

Notând $g^{i_1 - i_2} = \overline{g}$ şi ţinând seamă că $\overline{g}$ este aperiodic, urmează că

$$s^{-1} \overline{g} s = \overline{g}^{\pm 1}$$

Să arătăm că nu este posibil ca $s^{-1} gs$ să fie egal cu $\overline{g}^{-1}$. Intr'adevăr, să presupunem prin absurd contrariul. Atunci $\overline{g} s = s\overline{g}^{-1}$ şi deci $(s\overline{g})^2 = s\overline{g}\, s\overline{g} = s^2$. Pe de altă parte, avem

$$s^{-1} \cdot s\overline{g} \cdot s = s\overline{g}^{-1}$$

Deoarece s este element generator al quasi-centrului, urmează că putem determina totdeauna două numere α şi β, astfel ca

$$s\overline{g}^{-1} = s^{\alpha} \cdot (s\overline{g})^{\beta}$$

unde putem presupune, $(s\overline{g})^2$ fiind egal cu s^2, că β este egal sau cu 0 sau cu 1. Dacă $\beta = 1$, atunci $\overline{g}^{-2} = s_{\alpha}$, ceea ce este absurd, s fiind periodic, iar $\overline{g}$ aperiodic. Dacă însă $\beta = 0$, ajungem la o concluzie analoagă. Am stabilit astfel că $\overline{g}$ este comutativ cu s.

Aşa fiind, urmează că elementul $s\overline{g}$ este aperiodic. Deoarece demonstraţia dată pentru teorema VI este valabilă şi dacă numai unul dintre elementele u şi v este element generator al quasi-centrului, urmează că şi g şi $s\overline{g}$ sunt comutativi. Deci:

$$g^{-1} \cdot s\overline{g} \cdot g = g^{-1} sg \cdot g^{-1} \overline{g}\, g = g^{-1} sg \cdot \overline{g} = s\overline{g}$$

de unde

$$g^{-1} sg = s$$

Teorema VIII. *Dacă quasi-centrul nu este abelian, atunci el nu poate conţine elemente aperiodice.*

Quasi-centrul nefiind abelian, conţine o componentă pseudo-cuaternionică. Fie s şi t generatoarele ei şi să presupunem că satisfac o relaţie de forma

$$s^{-1} ts = t^{1+\alpha p^k} s^{\beta p^h} \qquad (11)$$

unde cel puţin unul dintre numerele α sau β este diferit de zero. Fie g un

element aperiodic al quasi-centrului. Atunci, în baza celor demonstrate mai înainte, el va fi comutativ atât cu s, cât şi cu t. Atunci rezultă din (11) că

$$s^{-1} \cdot gt \cdot s = gt \cdot t^{\alpha p^h} \cdot s^{\beta p^h}$$

Insă s este generatoare a quasi-centrului, astfel încât va trebuî să avem $s^{-1} \cdot gt \cdot s = (gt)^{\lambda} \cdot s^{\mu}$ în contradicţie cu cea precedentă dacă $\alpha \neq 0$. Vom proceda analog dacă $\alpha = 0$ şi $\beta \neq 0$.

О КВАЗИЦЕНТРЕ ГРУППЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для изучения свойств группы часто используют изучение нормальной подгруппы и соответствующей фактор-группы.

Чем более общей является нормальная подгруппа, тем больше указаний, касающихся всей группы, дадут подгруппа и фактор-группа. С этой целью можно взять не только ядро, как это сделал Баер, но и более общее ядро: квазицентр, введенный О. Оре, но который до настоящего времени не изучался. В настоящем сообщении было предпринято изучение этой нормальной подгруппы.

Определение: *Квазицентр группы $\mathcal{G}$ есть подгруппа, порождаемая всеми циклическими подгруппами, переставляемыми со всеми подгруппами $\mathcal{G}$.*

В этом определении понятие переставляемости употребляется в смысле, данном О. Оре в цитированной работе.

Из указанного выше определения явствует, что если s — образующая квазицентра, а t есть какой-либо элемент группы, тогда

$$s^{-1} ts = s^{\alpha} t^{\beta}.$$

В сообщении уточняется значение чисел и даются основные свойства квазицентра. Вначале для случая конечной группы и в дальнейшем для случая бесконечной группы.

Первым свойством является следующее

Теорема I. *Квазицентр есть характеристическая подгруппа.*

Следовательно для квазицентра сохраняется это свойство, которое существует как для ядра, так и для центра группы. Больше того, сохраняются и другие их свойства. Имеем:

Теорема II. *Квазицентр $Q(\mathcal{G})$ группы $\mathcal{G}$ нильпотентен.*

Значение чисел α и β из соотношения (I) уточняется в теореме III.

Теорема III. *Две образующие s и t квазицентра, порядок которых является степенью того же простого числа p, удовлетворяют соотношению вида*

$$sts^{-1} = t^{i+ap^h} s^{bp^h},$$

где ни a, ни b не делятся на p.

В случае трех образующих, порядок которых является степенью того же простого числа p, природу соответствующих соотношений трудно установить. Показывается следующее.

Теорема IV. *Если элементы s_1, s_2, s_3 суть образующие квазицентра и если порожденные этими элементами циклические группы имеют попарно в качестве общего элемента только единицы группы, то они удовлетворяют соотношениям вида:*

$$s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}} \; s_1^{1-\alpha_2 p^{k_2}}$$

$$s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_2 p^{k_2}} \; s_2^{1-\alpha_3 p^{k_3}}$$

$$s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_3 p^{k_3}} \; s_3^{1-\alpha_1 p^{k_1}}$$

В случае бесконечной группы, группа может содержать или бесконечность элементов конечного порядка, или может содержать элементы бесконечного порядка, или как будем их называть апериодические.

В отношении апериодических элементов устанавливаются поочередно следующие свойства.

Теорема V. *Апериодически образующая квазицентра порождает абелеву группу.*

Связь между апериодическими элементами квазицентра и апериодическими элементами конечного порядка дана теоремой VI.

Теорема VI. *Каждая апериодическая образующая квазицентра перестановочна с любой периодической образующей.*

Из этой теоремы вытекает в дальнейшем теорема VII.

Теорема VII. *Если квазицентр группы не является абелевым, тогда он не может содержать апериодических элементов.*

SUR LE QUASI-CENTRE D'UN GROUPE

(RÉSUMÉ)

Afin d'étudier les propriétés d'un groupe, on a souvent recours à l'étude d'un sous-groupe normal de ce dernier et du groupe-quotient.

La nature du sous-groupe et du groupe quotient fournira d'autant plus d'indications au sujet du groupe entier que le sous-groupe normal sera ample. Dans ce but, on peut utiliser non seulement le noyau, selon le procédé de Baer, mais un autre encore plus ample: le quasi-centre introduit par O. Ore qui n'a pas encore été étudié. L'objet de ce travail est justement l'étude de ce sous-groupe normal.

Le quasi-centre est un sous-groupe défini, comme ci-après:

Définition: *Le quasi-centre d'un groupe $\mathfrak{G}$ est le sous-groupe généré par tous les sous-groupes cycliques permutables avec tous les sous-groupes de $\mathfrak{G}$.*

Dans cette définition, la notion de permutabilité este celle que O. Ore a introduite [?].

La définition ci-dessus indique que, si s est une génératrice du quasi-centre, et t, un élément quelconque du groupe, alors

$$s^{-1} ts = s^{\alpha} t^{\beta}. \tag{1}$$

La valeur des nombres α et β est précisée dans ce travail et l'on y indique les principales propriétés du quasi-centre; d'abord, pour le cas du groupe fini, et ensuite pour le cas du groupe infini.

Une première propriété est que:

Théorème I. *Le quasi-centre est un sous-groupe caractéristique.* Par conséquent, on conserve, pour le quasi-centre, cette propriété qui subsiste pour le noyau aussi bien que pour le centre d'un groupe. Bien plus, on conserve encore d'autres propriétés de ces derniers. Nommément:

Théorème II. *Le quasi-centre Q ($\mathcal{G}$) d'un groupe $\mathcal{G}$ est nilpotent.*

La valeur des nombres α et β, de la relation (1), est précisée comme suit:

Théorème III. *Deux génératrices s et t du quasi-centre, dont l'ordre est une puissance de ce même nombre premier p, satisfont à une relation de la forme*

$$st\,s^{-1} = t^{1+ap^k}\,s^{bp^h}$$

où a, pas plus que b, ne sont divisibles par p.

Dans le cas de trois génératrices dont l'ordre est la même puissance du nombre premier p, la nature des relations satisfaites est plus malaisée à établir. En particulier, on montre que:

Théorème IV. *Si les éléments s_1, s_2, s_3 sont générateurs du quasi-centre, et si les groupes cycliques générés par ces éléments n'ont pas, deux par deux, d'autre élément commun que l'élément unité, alors elles satisfont aux relations de la forme:*

$$s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}}\,s_1^{1-\alpha_2 p^{k_2}}$$

$$s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_2 p^{k_2}}\,s_2^{1-\alpha_3 p^{k_3}}$$

$$s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_3 p^{k_3}}\,s_3^{1-\alpha_1 p^{k_1}}$$

Dans le caz d'un groupe infini, le groupe peut contenir une infinité d'éléments d'ordre fini ou encore contenir des éléments d'ordre infini (apériodiques).

En ce qui concerne les éléments apériodiques, on en établit, tour à tour, les propriétés suivantes:

Théorème V. *Les génératrices apériodiques du quasi-centre génèrent un groupe abélien.*

La liaison entre les éléments apériodiques du quasi-centre et les éléments d'ordre fini est donnée par le

Théorème VI. *Tout élément générateur apériodique du quasi-centre est commutatif avec tout élément générateur périodique de ce dernier.*

De ce théorème ressort ensuite le

Théorème VII. *Si le quasi-centre d'un groupe n'est pas abélien, il ne peut contenir d'éléments apériodiques.*

BIBLIOGRAFIE

1. R. Baer, Compositio Mathematica, 1934, v. 1, p. 254.
2. O. Ore, Duke Mathematical Journal, 1937, v. 3, p. 163.
3. Gh. Pic, Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Seria A, t. I, Nr. 10, Noembrie-Decembrie 1949, p. 973.
4. Gh. Pic, Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Filiala Cluj, Iulie-Decembrie 1951, an. II, Nr. 3 — 4, p. 43.
5. A. G. Curoş. Teoria grup, ed. a II-a, M., 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

CONTRACTIBILITATEA PRODUSELOR SIMETRICE

DE

TUDOR GÂNEA

1. Introducere

Fie X un spaţiu metric, cu distanţa d, şi 2^x mulţimea ale cărei elemente sunt părţile închise, nevide şi mărginite, din X. Se ştie că 2^x poate fi metrizat cu distanţa

$$\delta(A, B) = \max \left[\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right] \qquad (0)$$

ntrodusă în teoria mulţimilor de Acad. D. P o m p e i u [1].

2^x conţine submulţimea $X(n)$ a părţilor lui X ce conţin cel mult n puncte, n întreg $\geqslant 1$. Metrizat cu metrica indusă de (0), $X(n)$ poartă numele de *puterea simetrică de rang n a spaţiului X*. Puterea simetrică a unui spaţiu a fost cercetată prima oară de K. B o r s u k şi S t. U l a m [2], care au formulat în legătură cu această noţiune, câteva probleme. Deşi în privinţa lui 2^x se cunosc astăzi câteva rezultate fundamentale, problemele formulate în [2] relativ la $X(n)$ par a nu fi fost încă rezolvate.

Scopul acestei lucrări este de a rezolva următoarea problemă lăsată deschisă în [2][1]:

Dacă X este o retractă absolută, are $X(n)$ aceeaşi proprietate?

Răspunsul afirmativ, pentru spaţii X compacte şi de dimensiune finită rezultă din următoarea:

T e o r e m ă. *Dacă X este local contractibil şi local compact, $X(n)$ este local contractibil. Dacă X este contractibil şi compact, $X(n)$ este contractibil.*

2. Notaţii

Distanţa din X este notată cu d; distanţa din 2^x deci din $X(n)$, dată de (0), este notată cu δ.

Punctele din X sunt notate cu x cu diferiţi indici, punctele din $X(n)$ sunt notate cu ξ cu diferiţi indici:

$$\xi = \{x^1, \ldots, x^r\}, \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

[1] Problema 8, p. 878.

Prin sferă înţelegem, în această lucrare, totdeauna o sferă închisă; sfera de centru x şi rază r din X este notată prin $\delta(x, r)$; sfera de centru ξ şi rază ρ din $X(n)$ este notată prin $\Sigma(\xi, \rho)$. Sfera generalizată, de rază η şi având ca centru submulţimea $A \subset X$ notată prin $W\eta\ (A)$, deci

$$W_\eta\ (A) = \{x \mid x \in X,\ d(x, A) \leqslant \eta\}\ .$$

Se vede uşor că $\delta(A, B) \leqslant \eta$ este echivalent cu:

$$A \subset W_\eta(B) \quad \text{şi} \quad B \subset W_\eta(A).$$

I reprezintă segmentul [0,1] iar t un număr la 1 oarecare din I. Spaţiul E este local contractibil în punctul $p \in E$ dacă pentru orice vecinătate $V \ni p$, nu neapărat deschisă, există o vecinătate $U \ni p$, cu $U \subset V$, contractibilă în V la p; există deci

$$h : U \times I \to V$$

continuă, satisfăcând

$$h(x \times 0) = x \quad \text{şi} \quad h(x \times 1) = p \quad \text{pentru} \quad x \in U.$$

Spaţiul E este contractibil dacă transformarea identică este homotopă cu transformarea constantă.

Se ştie că orice spaţiu metric compact, finit dimensional şi local contractibil este o retractă de vecinătate absolută; orice spaţiu metric, compact, finit dimensional, local contractibil şi contractibil este o retractă absolută.

Dacă X este compact, $X(n)$ este compact [2]; de asemenea dacă X este compact şi finit dimensional, $X(n)$ are aceeaşi proprietate [2].

3. Contractibilitatea locală a spaţiului X (n)

Fie $\xi_0 = \{x_0^1, \ldots, x_0^m\} \in X(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$; fie $\varepsilon > 0$ şi $V = \Sigma(\xi_0, \varepsilon)$.

Fie $\eta > 0$ astfel încât

$$\eta < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\eta < \frac{1}{3} d(x_0^i, x_0^j) \quad \text{pentru} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m, \text{ dacă } m > 1, \tag{2}$$

$$S(x_0^i, \eta) \text{ este compactă}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$S(x_0^i, \eta) \text{ se poate contracta la } x_0^i \text{ în } S(x_0^i, \varepsilon). \tag{4}$$

Din (4) rezultă existenţa unei deformaţii ($1 \leqslant i \leqslant m$):

$$h^i(x \times t)\colon\ S(x_0^i, \eta) \times I \to S(x_0^i, \varepsilon)$$

$$h^i(x \times 0) = x, \quad h^i(x \times 1) = x_0^i.$$

Fie $U = \Sigma(\xi_0, \eta)$, deci $\xi_0 \in U \subset V \subset X(n)$.

Fie $\xi = \{x^1, \ldots, x^r\} \in U$, deci $1 \leqslant r \leqslant n$ şi $\delta(\xi, \xi_0) \leqslant \eta$. Rezultă

$$\xi \subset W_\eta(\xi_0) \tag{5}$$

$$\xi_0 \subset W_\eta(\xi). \tag{6}$$

Din (5) rezultă că, pentru orice $k \in \{1, \ldots, r\}$ există un $i_k \in \{1, \ldots, m\}$, *unic determinat în virtutea lui* (2), astfel încât

$$x^k \in S(x_0^{ik}, \eta). \tag{7}$$

Fie atunci

$$g(\xi \times t) = \{h^{i1}(x^1 \times t), \ldots, h^{ik}(x^k \times t), \ldots, h^{ir}(x^r \times t)\}.$$

Deoarece $1 \leqslant r \leqslant n$, $g(\xi \times t) \in X(n)$ şi g este evident univocă.

Din

$$h^{ik}(x^k \times t) \in S(x_0^{ik}, \varepsilon) \qquad (1 \leqslant k \leqslant r)$$

rezultă

$$g(\xi \times t) \subset W_\varepsilon(\xi_0). \tag{8}$$

Fie $i \in \{1, \ldots, m\}$; din (6) rezultă existenţa cel puţin a unui $k \varepsilon \{1, \ldots, r\}$ astfel încât

$$x_0^i \in S(x^k, \eta) \text{ deci } x^k \varepsilon\, S(x_0^i, \eta),$$

deci

$$i_k = i. \tag{9}$$

Rezultă

$$h^{ik}(x^k \times t) = h^i(x^k \times t) \in S(x_0^i, \varepsilon),$$

deci

$$x_0^i \in S[h^{ik}(x^k \times t), \varepsilon],$$

deci

$$\xi_0 \subset W_\varepsilon[g(\xi \times t)]. \tag{10}$$

Din (8) şi (10) rezultă

$$\delta[\xi_0, g(\xi \times t)] \leqslant \varepsilon,$$

deci

$$g(U \times I) \subset V. \tag{11}$$

In plus

$$g(\xi \times 0) = \{h^{i1}(x^1 \times 0), \ldots, b^{ik}(x^k \times 0), \ldots, h^{ir}(x^r \times 0)\} =$$
$$= \{x^1, \ldots, x^k, \ldots, x^r\} = \xi. \tag{12}$$

Din (9) rezultă

$$\{1, \ldots, m\} C \{i_1, \ldots, i_r\} \text{ deci } \{1, \ldots, m\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$$

deci

$$g(\xi \times 1) = \{h^{i1}(x^1 \times 1), \ldots, h^{ik}(x^k \times 1), \ldots, h^{ir}(x^r \times 1)\} =$$
$$= \{x_0^{i1}, \ldots, x_0^{ik}, \ldots, x_0^{ir}\} = \{x_0^1, \ldots, x_0^m\} = \xi_0. \tag{13}$$

Fie $\rho > 0$. Deoarece sferele $S(x_0^i, \eta)$ sunt compacte, există $\sigma = \sigma(\rho) > 0$, cu $\sigma < \eta$, astfel încât

$$(*) \quad \begin{cases} x', x'' \in S(x_0^i, \eta) \\ d(x', x'') \leqslant \sigma \\ |t' - t''| \leqslant \sigma \end{cases}$$

implică

$$(**) \quad d[h^i(x' \times t'), h^i(x'' \times t'')] \leqslant \rho \qquad \text{pentru } i = 1, \ldots, m.$$

Fie acum

$$\xi_1, \xi_2 \in U \quad \text{cu} \quad \delta(\xi_1, \xi_2) \leqslant \sigma$$

și

$$t_1, t_2 \in I \quad \text{cu} \quad |t_1 - t_2| \leqslant \sigma. \tag{14}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \{x_1^1, \ldots, x_1^r\}, && 1 \leqslant r \leqslant n, \\ &\xi_2 = \{x_2^1, \ldots, x_2^s\}, && 1 \leqslant s \leqslant n, \\ &\xi_1 \subset W_\sigma(\xi_2) \quad \text{și} \quad \xi_2 \subset W_\sigma(\xi_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Rezultă

$$g(\xi_1 \times t_1) = \{h^{i1}(x_1^1 \times t_1), \ldots, h^{ir}(x_1^r \times t_1)\}$$
$$g(\xi_2 t_2) = \{h^{j1}(x_2^1 \times t_2), \ldots, h^{js}(x_2^s \times t_2)\}$$

satisfăcând

$$x_1^k \in S(x_0^{ik}, \eta) \quad \text{și} \quad x_2^l \in S(x_0^{jl}, \eta).$$

pentru

$1 \leqslant k \leqslant r$ și $1 \leqslant l \leqslant s$, cu $1 \leqslant i_k, j_l \leqslant m$.

Fie $k \in \{1, \ldots, r\}$; din (15) rezultă existența unui

$$l = l_k \in \{1, \ldots, s\}$$

astfel încât

$$d(x_1^k, x_2^l) \leqslant \sigma. \tag{16}$$

Deoarece $\sigma < \eta$, (16) și (2) implică

$$i_k = j_l$$

Notând prin i această valoare comună, rezultă

$$h^{ik}(x_1^k \times t_1) = h^i(x_1^k \times t_1)$$
$$h^{jl}(x_2^l \times t_2) = h^i(x_2^l \times t_2).$$

Din (16), (14), (*) şi (**) rezultă acum

$$d\left[h^{ik}\left(x_1^k \times t_1\right), h^{jl}\left(x_2^l \times t_2\right)\right] = d\left[h^i\left(x_1^k \times t_1\right), h^i\left(x_2^l \times t_2\right)\right] \leqslant \rho$$

deci

$$h^{ik}\left(x_1^k \times t_1\right) \in S\left[h^{jl}\left(x_2^l \times t_2\right), \rho\right]$$

deci

$$g\left(\xi_1 \times t_1\right) \subset W_\rho\left[g\left(\xi_2 \times t_2\right)\right]. \tag{17}$$

La fel demonstrăm

$$g\left(\xi_2 \times t_2\right) \subset W_\rho\left[g\left(\xi_1 \times t_1\right)\right] \tag{18}$$

In virtutea lui (17) şi (18) rezultă

$$\delta\left[g\left(\xi_1 \times t_1\right), g\left(\xi_2 \times t_2\right)\right] \leqslant \rho\,,$$

deci

g este continuă. (19)

Din (11), (12), (13) şi (19) rezultă că $X(n)$ este local contractibil.

4. Contractibilitatea spaţiului X (n)

Deoarece X este contractil, există

$$h : X \times I \to X$$

satisfăcând

$$h(x \times 0) = x \quad \text{şi} \quad h(x \times 1) = x_0 \quad \text{pentru orice } x \in X.$$

Fie

$$g(\xi \times t) = \left\{h(x^1 \times t), \ \ldots, \ h(x^r \times t)\right\}$$

pentru

$$\xi = \left\{x^1, \ \ldots, \ x^r\right\} \in X(n)\,, \quad (1 \leqslant r \leqslant n)$$

şi

$$t \in I\,.$$

Rezultă

$$g\ X(n) \times I \to X(n)$$

$$g(\xi \times 0) = \left\{h(x^1 \times 0), \ \ldots, \ h(x^r \times 0)\right\} = \left\{x^1, \ \ldots, \ x^r\right\} = \xi$$

$$g(\xi \times 1) = \left\{h(x^1 \times 1), \ \ldots, \ h(x^r \times 1)\right\} = \left\{x_0, \ \ldots, \ x_0\right\} = \xi_0$$

Fie $\rho > 0$: deoarece X este compact, există $\sigma = \sigma(\rho) > 0$ astfel încât

$$d(x', x'') \leqslant \sigma \text{ şi } |t' - t''| \leqslant \sigma$$

implică

$$d[h(x' \times t'),\ h(x'' \times t'')] \leqslant \rho.$$

Fie

$$\xi_1,\ \xi_2 \in X(n) \text{ cu } \delta(\xi_1,\ \xi_2) \leqslant \sigma$$

și

$$t_1,\ t_2 \in I \text{ cu } |t_1 - t_2| \leqslant \sigma.$$

Rezultă

$$\xi_1 = \{x_1^1,\ \ldots,\ x_1^r\} \quad , 1 \leqslant r \leqslant n,$$
$$\xi_2 = \{x_2^1,\ \ldots,\ x_2^s\} \quad , 1 \leqslant s \leqslant n,$$

și

$$\xi_1 \subset W_\sigma(\xi_2) \quad , \quad \xi_2 \subset W_\sigma(\xi_1).$$

Pentru $x_1^k \in \xi_1$ există $x_2^l \in \xi_2$ cu $d(x_1^k, x_2^l) \leqslant \sigma$,

deci

$$d[h(x_1^k \times t_1), h(x_2^l \times t_2)] \leqslant \rho,$$

deci

$$g(\xi_1 \times t_1) \subset W_\rho[g(\xi_2 \times t_2)].$$

La fel rezultă

$$g(\xi_2 \times t_2) \subset W_\rho[g(\xi_1 \times t_1)].$$

deci g este continuă și contractibilitatea lui $X(n)$ este demonstrată.

КОНТРАКТИЛЬНОСТЬ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Если метрическое пространство X локально контрактильно и локально компактно, то его n-я симметрическая степень $X(n)$ [2] локально контрактильна. Если X контрактильно в себе и компактно, то $X(n)$ контрактильно в себе.

CONTRACTILITÉ DES PRODUITS SYMÉTRIQUES

(RÉSUMÉ)

Si X métrique est localement contractile et localement compact, sa n-ième puissance symétrique $X(n)$ [2] est localement contractile. Si X est contractile en soi et compact, $X(n)$ est contractile en soi.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pompeiu, Ann. de Toulouse, 1905, seria 2, v. 7, p. 264 — 315.
2. K. Borsuk a. St. Ulam, Bull. Am. Math. Soc. 1931, v. 37, p. 875 — 882.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1–2, 1953

NORMALITĂŢI INVOLUTIVE LOCALE RESP. GLOBALE

DE

D. BARBILIAN

In 1941, algebristul ceh W. Kořínek a avut cel dintâi ideea separaţiei nete între proprietatea câturilor conjugate ale rafinărilor Schreier - Curoş - Zassenhaus a două lanţuri normale de a fi încă normale şi proprietatea acelor câturi de a fi structural-isomorfe.

In 1948, independent de Kořínek [1], de a cărui contribuţie am luat cunoştinţă mai târziu şi numai prin referatul lui Köthe din Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik, am avut aceeaşi idee, pe care am urmărit-o în toate consecinţele ei, în lucrarea mai mare *Teoreme de descompunere transfinite în structuri*, nepublicată, dar larg folosită, atât în seminarul, cât şi în prelegerile noastre.

Articolul lui M. Benado, *Teoria abstractă a relaţiilor de normalitate*, publicat chiar în prezentul volum ne determină să publicăm articolul de faţă, pentru a da o mai largă circulaţie atât sistematizărilor ce le-am introdus în această ordine de idei, cât şi rezultatelor obţinute.

O primă contribuţie a noastră e generalizarea normalităţii lui W. Kořínek [1], prin înlocuirea fondului structural al termenilor câturilor normale, cu un fond semistructural. Prin aceasta, o sumă de teoreme de rafinare şi de descompunere, rebele vechiului tratament, primesc o demonstraţie în noua schemă.

Arătăm apoi că, sub protecţia unei axiome introduse de A. I. Uzcov [2], generalizată de Kořínek [1] şi, în sfârşit, de noi, teorema de rafinare *locală* Schreier - Curoş - Zassenhaus (aşa dar: pentru lanţuri normale în general transfinite, de ordonare arbitrară şi eventual fără extremităţi comune) este logic echivalentă cu normalitatea lui Kořínek astfel generalizată, pe care continuăm s'o numim normalitate unitară (cu toate că în lucrările noastre mai vechi [4], [6] acest termen este aplicat unei subspecii).

Alături de *normalitatea involutivă locală* (identică cu normalitatea unitară în cadrul axiomei Uzcov - Kořínek) introducem *normalitatea involutivă globală*, definită prin proprietatea a două câturi normale de a conduce sigur la câturi Zassenhaus de asemenea normale, când pot fi integrate în lanţuri normale descendent bine ordonate, de capăt superior comun, identic cu ultimul element al structurii resp. în lanţuri normale ascendent bine ordonate de capăt inferior comun, identic cu primul element al structurii. Tipul normalităţii involutive globale descendente îl constitue o anumită abstragere

a normalității lui A. I. Uzcov [2], numită de noi F — normalitate și introdusă prin lucrarea din 1948.

In fața acestor categorii de normalități stau întregirile lor până la *normalități involutive cu funcțiune Hölder* (aceasta înseamnă, de exemplu: cu isomorfism structural resp. isomorfism grupal resp. valorificare egală etc... a căturilor conjugate ale lui Zassenhaus).

In articolul său, publicat în prezentul număr al revistei, M. B e n a d o, slăbind normalitatea lui Uzcov în ceea ce privește axioma 2, a obținut o teoremă de rafinare *fără funcțiune Hölder* pentru lanțurile *finite*. Pentru lanțurile *transfinite*, tari-normale, descendent bine ordonate, a putut da o teoremă de rafinare numai *cu ajutorul unei anumite funcțiuni Hölder*.

Incât demonstrația noastră din 1948 a tecremei de rafinare, pentru lanțurile *transfinite* F — normale tari descendent bine ordonate, *liberă de orice funcțiune Hölder*, își păstrează toată actualitatea. Ea este de altfel mai simplă ca demonstrația lui M. B e n a d o pentru lanțurile finite.

Noțiunea de normalitate tare aparține lui A. G. C u r o ș [3]. Pentru a o face liberă de o teorie prealabilă a îndepărtării repetițiilor (necesară producerii unei teoreme Jordan-Hölder transfinite, însă de prisos în stabilirea unei teoreme de rafinare transfinite), noi am generalizat-o, lăsând la o parte cererea lui C u r o ș ca antecedentul, din enunțul axiomei, să fie esențial diferit de precedent și limitând-o numai la diferența de indici. M. B e n a d o în articolul său, adoptă și el această slăbire a normalității tari.

Alături de normalitatea involutivă globală descendentă F, am construit o *normalitate involutivă globală ascendentă* $\mathfrak{F}$. Dar principiul teoremelor de rafinare asociate apare considerabil modificat. Lanțurile normale folosite prezintă particularitatea de a avea capătul inferior, normal în capătul superior și de a admite o valorificare.

Normalitatea $\mathfrak{F}$ nu conduce la cături intermediare $\frac{U}{V}$ normale. Deci nu este capabilă de alte funcțiuni Hölder decât cele *relative* la $\mathfrak{F}$.

Am construit însă o altă normalitate involutivă globală, ascendentă, pe care am numit-o $\mathfrak{F}^*$ și în care căturile intermediare sunt normale. $\mathfrak{F}^*$ este capabilă de funcțiuni Hölder *proprii*.

Acest ultim paragraf este cel mai important și cel mai dificil de urmărit. Demonstrațiile, în principiul lor, se alătură demonstrației originare a teoremei de rafinare Schreier, dar tehnica e mult diferită. De altfel, noi stabilim nu o teoremă Schreier, ci o teoremă SKZ relativă la rafinări *construite*.

Sistematizarea pe care o introducem cu acest articol în noțiunea de normalitate și mai ales exemplele construite, credem că lămuresc complet raportul dintre *conținutul involutiv* și *conținutul Hölder* al acestei idei.

§ 1. Normalități involutive locale.

1° *Momentul involutiv și momentul Hölder al unei normalități.*

Fie Σ o structură și $\frac{A}{B}$ intervalul (numit uneori *cât*) a două elemente ordonate, dintr'însa.

O submulțime de intervale $\left(\frac{A}{B}\right)$ din structura Σ se numește *normalitate*.

Pentru a arăta că intervalul $\frac{A}{B}$ este normal (că aparține normalității), adoptăm scrierea

$$\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$$

Ne interesează acele normalități care se comportă ca normalitatea grupală în teorema de rafinare Schreier - Curoș - Zassenhaus (scurt: *SKZ*) și în consecința ei, teorema Jordan - Hölder.

Care sunt în această privință, proprietățile normalității grupale? Demonstrarea teoremei de rafinare se desparte în două momente, cum a subliniat întâi W. Kořínek [1] (mai puțin nomenclatura):

1. *Momentul involutiv.* Rafinările *SKZ* a două lanțuri normale de aceleași extremități sunt încă lanțuri normale.

2. *Momentul Hölder.* Câturile conjugate ale acestor rafinări sunt grupuri factoriale isomorfe.

Ne propunem să reluăm sistematic disocierea aceasta, lărgindu-i cadrul și adâncind posibilitatea racordării momentelor 1 și 2.

2° *Normalități involutive.*

O normalitate se numește *local-involutivă* când câturile lui Zassenhaus asociate unei perechi arbitrare de câturi normale sunt normale.

Sau, ceea ce e tot una: când rafinările *SKZ* a două lanțuri normale arbitrare sunt normale.

Aceasta înseamnă că, pentru

$$\frac{M}{m} = \mathfrak{N}, \qquad \frac{N}{n} = \mathfrak{N} \tag{1}$$

dar altfel arbitrare, avem, în mod obligatoriu

$$\frac{m \cup (M \cap N)}{m \cup (M \cap n)} = \mathfrak{N}, \qquad \frac{n \cup (N \cap M)}{n \cup (N \cap m)} = \mathfrak{N} \tag{2}$$

O normalitate se numește *descendent global-involutivă* când, pentru câturi normale (1) normal accesibile ultimului element $\mathcal{G}$ al structurii prin lanțuri între $\mathcal{G}$ și M resp. N descendent bine ordonate, avem sigur (2). Pe scurt spus: când câturile conjugate Zassenhaus nu ale oricărei perechi de câturi normale, ci ale perechilor integrate în lanțuri normale descendent bine ordonate, de același capăt superior, sunt normale.

Dual, avem noțiunea de normalitate *ascendent global-involutivă*.

Este clar că orice normalitate local-involutivă este și global-involutivă, fără ca reciproca să fie obligatoriu adevărată.

3° Funcţiune Hölder relativă la o normalitate.

Introducem transformarea următoare, a unui interval nu numaidecât normal $\frac{A}{B}$ al structurii Σ:

$$\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{C \cup A}{C \cup B}, \qquad C \cap A = C \cap B$$

unde

$$\frac{D}{C} = \mathfrak{N}, \qquad D \supset A$$

Punem

$$\frac{A^*}{B^*} = \Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$$

Transformatul lui $\frac{A^*}{B^*}$ printr'o operaţie Φ de «parametri» C^*, D^*, îl însemnăm cu

$$\frac{A^{**}}{B^{**}} = \Phi_{C^*}^{D^*}\left(\frac{A^*}{B^*}\right)$$

Spunem că normalitatea este înzestrată cu o funcţiune Hölder $\mathfrak{H}$ *relativă la acea normalitate* când câturile $\frac{A}{B}$, $\frac{A^*}{B^*}$ satisfac unei relaţii sau unei mulţimi de relaţii însemnate simbolic prin

$$\mathfrak{H}\left(\frac{A}{B}, \frac{A^*}{B^*}\right) = 0$$

simetrice şi transitive.

Aceasta înseamnă că relaţiile

$$\mathfrak{H}\left(\frac{A}{B}, \frac{A^*}{B^*}\right) = 0, \quad \mathfrak{H}\left(\frac{A^*}{B^*}, \frac{A}{B}\right) = 0$$

sunt echivalente şi că

$$\mathfrak{H}\left(\frac{A}{B}, \frac{A^*}{B^*}\right) = 0, \quad \mathfrak{H}\left(\frac{A^*}{B^*}, \frac{A^{**}}{B^{**}}\right) = 0$$

implică

$$\mathfrak{H}\left(\frac{A}{B}, \frac{A^{**}}{B^{**}}\right) = 0.$$

Realizările acestei funcţiuni Hölder sunt felurite. Aceste realizări pot fi obţinute luând împreună una sau mai multe din relaţiile următoare:

a) Integritatea: proprietatea a două intervale de a fi în acelaşi timp ne-nule (sau, ceea ce este tot una: nule).

b) Asemănarea lui Ore a două intervale.
c) Isomorfismul de structură a două intervale.
In structurile valorificate:
d) Egalitatea valorilor a două intervale.
In structurile grupale:
e) Echivalența claselor de resturi (stângi) a două intervale.
f) Isomorfismul grupal a două intervale normale.

§ 2. Normalitatea unitară (cu fond semistructural).

4° *Axioma lui Uzcov-Kořínek.*

Fie Σ o structură și $\sigma^{\cap}$ o semistructură subordonată lui Σ (aceasta înseamnă: $\sigma^{\cap} \subset \Sigma$ iar secțiunea în $\sigma^{\cap}$, aceeași cu secțiunea în Σ) relativă la secțiune.

Introducem următoarele axiome:

Axioma semistructurii.

$$\text{Dacă } \frac{A}{B} = \mathfrak{N} \qquad \text{atunci } A \to \sigma^{\cap} \ , \quad B \to \sigma^{\cap}$$

Axioma lui Uzcov-Kořinek (*K U*)

Dacă A, $B \in \sigma^{\cap}$, există atunci două elemente A' și B' cu

$$\begin{matrix} A' \to \sigma^{\cap} & & B' \to \sigma^{\cap} \\ A' \to A \cap B \ , & & B' \to A \cap B \\ \dfrac{A}{A'} = \mathfrak{N} & & \dfrac{B}{B'} = \mathfrak{N} \end{matrix}$$

Pentru $\sigma^{\cap} = \Sigma$, iar $A' = B'$ axioma a fost introdusă de U z c o v [2]. Pentru $\sigma^{\cap} = \Sigma$, cu A', B' eventual diferiți, a fost introdusă de K o ř í n e k [1].

Inrudirea ipotezei *UK* în cazul particular al lui Uzcov, cu noțiunea de filtru este relevantă.

5° *Normalitatea unitară,*

Normalitatea definită prin axioma semistructurii 0 din alineatul 4° și prin următoarele două alte axiome:

1. Dacă $\dfrac{A}{B} = \mathfrak{N}$, iar $C \in \sigma^{\cap}$, atunci $\dfrac{C \cap A}{C \cap B} = \mathfrak{N}$

2. Dacă $\dfrac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\dfrac{D}{C} = \mathfrak{N}$ cu $A \subset D$ atunci

$$\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N},$$

o numim *normalitate unitară.*

Pentru $\sigma^{\cap} = \Sigma$ această normalitate a fost găsită de Kořínek [1] în 1941. In 1946, am regăsit-o [4] legată însă de funcțiunea Hölder a isomorfismului

de structură şi am numit-o normalitate unitară, deşi se cuvenea să poarte numele lui K o ř í n e k, a cărui contribuţie nu o cunoşteam atunci. In 1950, abia, m'am ridicat la concepţia generală ($\sigma^{\frown} \leqslant \Sigma$) de mai sus. Deoarece prin lucrările seminarului nostru, normalitatea unitară a intrat în literatură, nu găsim potrivit să-i schimbăm numele pe care, acum, este îndreptăţită să-l poarte (normalitatea lui Kořínek intrând aici ca o specializare).

Totuşi este un caz când normalitatea unitară se reduce la normalitatea lui Kořínek:

T e o r e m ă[1]). Dacă semistructura $\sigma^{\frown}$ e complectă şi cu ultim element, normalitatea unitară se reduce la normalitatea lui Kořínek.

D e m o n s t r a ţ i e. In ipoteza din enunţ se ştie că $\sigma^{\frown}$ poate fi organizată ca structură σ, cu aceeaşi secţiune $\cap$ ca Σ, dar cu reuniune $\cup$ în general diferită de reuniunea $\cup$ din Σ. In axioma 2 (singura în care intervine reuniunea) avem, în virtutea axiomei 0:

$$C \cup A \to \sigma^{\frown}, \qquad C \cup B \to \sigma^{\frown}, \qquad A, B, C \to \sigma^{\frown}$$

Dar orice înfăşurător simultan al lui A şi C din $\sigma^{\frown}$ conţine evident pe $C \cup A$. Dacă (x_λ) este mulţimea tuturor acestor înfăşurători, avem (printre (x_λ) intră ultimul element al lui $\sigma^{\frown}$, deci mulţimea e nevidă):

$$x_\lambda \supset (A \cup C)$$

In virtutea lui (4) însă, urmează

$$x_{\lambda_0} = A \cup C$$

Aşa dar

$$\cap\, x_\lambda \subset (A \cup C)$$

In definitiv

$$\cap\, x_\lambda = A \cup C$$

Prin definiţie, însă

$$\cap\, x_\lambda = A \cup C$$

încât

$$A \cup C = A \cup C.$$

La fel

$$B \cup C = B \cup C.$$

Prin urmare peste tot, în axiomele 0, 1, 2, ale normalităţii unitare (inclusiv axioma $U\ K$) nu intră decât operaţii şi elemente ale structurii $\sigma \supset \sigma^{\frown}$.

Avem deci de a face cu o normalitate Kořínek relativă la structura $\Sigma = \sigma$.

Teorema e demonstrată.

O b s e r v a ţ i a I. Ipoteza existenţei unui ultim element pentru $\sigma^{\frown}$ e totdeauna realizată în teoria rafinărilor şi a descompunerilor lanţurilor

---

[1]) Ideea acestei teoreme o datorăm lui M. B e n a d o, care a recunoscut reducţiunea: în cazul particular al structurii grupale Σ a unui inel O, când $\sigma^{\frown}$ este semistructura tuturor subinelelor din O iar $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$ înseamnă: B ideal bilateral în subinelul A.

Este curios că, pornind tocmai dela acest exemplu, care se dovedeşte neveritabil, am imaginat normalităţile cu fond semistructural.

normale *de aceleași extremități*. Acolo intervine numai subsemistructura $\mathcal{G} \cup \sigma^{\frown}$, unde $\mathcal{G}$ este capătul superior al lanțului, cu ultim element $\mathcal{G}$.

Observația II. Reiese din teorema precedentă că exemplele de normalitate unitară care nu sunt normalități ale lui Kořínek trebue căutate printre normalitățile unitare de semistructură $\sigma^{\frown}$ (resp. $\mathcal{G} \cap \sigma^{\frown}$) necomplectă.

6° *Normalitățile local-involutive în cadrul* $0 + UK$.

Teoremă. In cadrul $0 + UK$, cea mai generală normalitate local-involutivă este normalitatea unitară.

Demonstrație. Să arătăm mai întâi că, în cadrul menționat, o normalitate local-involutivă este o normalitate unitară.

Fie

$$\frac{A}{B} = \mathfrak{N} \quad , \qquad C \in \sigma^{\frown} . \tag{1}$$

Deci

$$B \to \sigma^{\frown} , \quad C \in \sigma^{\frown} .$$

Conform axiomei UK există în $\sigma^{\frown}$ un element c cu

$$c \to C \cap B , \quad \frac{C}{c} = \mathfrak{N} . \tag{2}$$

In virtutea definiției normalității local-involutive, amândouă câturile lui Zassenhaus ale perechii $\frac{A}{B}, \frac{C}{c}$ sunt normale, de exemplu câtul

$$\frac{c \cup (C \cap A)}{c \cup (C \cap B)} = \mathfrak{N}$$

sau, ținând seamă de (2) și de incluziunea evidentă $C \cap B \subset C \cap A$:

$$\frac{C \cap A}{C \cap B} = \mathfrak{N} . \tag{1'}$$

Comparând (1) cu (1'), conchidem că axioma 1 a normalității unitare este verificată.

Mai departe, considerăm câturile

$$\frac{D}{C} = \mathfrak{N} \qquad \frac{A}{B} = \mathfrak{N} , \quad D \supset A$$

și unul din câturile lui Zassenhaus relativ la această pereche:

$$\frac{C \cup (D \cap A)}{C \cup (D \cap B)} = \mathfrak{N}$$

In virtutea cererii $D \supset A$, el se mai scrie

$$\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N} \tag{3'}$$

Comparând (3) şi (3'), vedem că axioma 2 a normalităţii unitare este şi ea verificată *(independent de cadrul* $0 + UK$*)*.

Necesitatea este probată. Să probăm suficienţa.

Presupunem deci unitară normalitatea şi considerăm câturile normale

$$\frac{M}{m} = \mathfrak{N}, \quad \frac{N}{n} = \mathfrak{N}$$

In virtutea axiomei 0 urmează $M \to \sigma^{\cap}$. In virtutea axiomei 1

$$\frac{M \cap N}{M \cap n} = \mathfrak{N}$$

Avem $M \supset M \cap N$. Deci, în virtutea axiomei 2:

$$\frac{m \cup (M \cap N)}{m \cup (M \cap n)} = \mathfrak{N}$$

In acelaşi fel

$$\frac{n \cup (N \cap N)}{n \cup (N \cap m)} = \mathfrak{N}$$

Deci, normalitatea este local-involutivă.

Cu aceasta totul este dovedit.

O b s e r v a ţ i e . In demonstrarea suficienţei, axioma $U\ K$ nu a intervenit.

§ 3. Funcţiunea Hölder a normalităţii unitare

7° *Normalitatea câtului intermediar a două câturi unitar-normale.*

T e o r e m ă. Dacă într'o normalitate unitară avem

$$\frac{M}{m} = \mathfrak{N}, \quad \frac{N}{n} = \mathfrak{N}.$$

atunci câtul intermediar al lui Zassenhaus al perechii $\frac{M}{m}, \frac{N}{n}$ este normal:

$$\frac{M \cap N}{(M \cap n) \cup (N \cap m)} = \mathfrak{N}.$$

D e m o n s t r a ţ i e . Am arătat în 6°, formula (4), că

$$\frac{M \cap N}{M \cap n} = \mathfrak{N}, \quad \frac{M \cap N}{m \cap N} = \mathfrak{N}.$$

Dar, $M \cap N \supset M \cup N$. Aplicând axioma 2, obţinem

$$\frac{(M \cap n) \cup (M \cap N)}{(M \cap n) \cup (N \cap m)} = \mathfrak{N}.$$

sau

$$\frac{U}{V} = \frac{M \cap N}{(M \cap n) \cup (N \cap m)} \mathfrak{N}.$$

8° *Exprimarea câturilor lui Zassenhaus ca transformate* Φ_C^D *ale câtului intermediar*

Avem $M \supset U$. Prin urmare, putem aplica axioma 2 câtului $\frac{M}{m} = \mathfrak{N}$ și câtului intermediar $\frac{U}{V} = \mathfrak{N}$. Obținem

$$\frac{m \cup U}{m \cup V} = \frac{m \cup (M \cap N)}{m \cup (M \cap n)} \mathfrak{N} \tag{1}$$

(în felul acesta este redemonstrată normalitatea câturilor lui Zassenhaus).

Dar avem, evident

$$m \cap U = m \cap N \subset V$$

sau, secționând cu m în amândoi membrii incluziunii:

$$m \cap U \subset m \cap V.$$

Este clar însă că

$$m \cap U \supset m \cap V.$$

In definitiv

$$m \cap U = m \cap V. \tag{1'}$$

Relațiile (1), (1') arată că avem pentru câturile lui Zassenhaus a două câturi unitar-normale, expresiile

$$\Phi_m^M\left(\frac{U}{V}\right), \quad \Phi_n^N\left(\frac{U}{V}\right). \tag{2}$$

O b s e r v a ț i e. Teoria câtului intermediar al lui Zassenhaus pentru normalitatea lui Kořínek este cunoscută (mai puțin introducerea simbolului (Φ_m^M, Φ_n^N). Era însă indispensabilă verificarea proprietăților simple 7° și 8° în cadrul mai larg al normalității unitare.

9° *Funcțiunea Hölder a normalității unitare.*

Existența reprezentărilor (2) din 8° ale câturilor lui Zassenhaus permite introducerea pentru normalitatea unitară a unei funcțiuni Hölder mai generală decât cea din 3°, fiindcă este definită pe o submulțime a argumentelor acesteia.

O funcțiune Hölder care leagă un cât unitar normal $\frac{A}{B}$ cu transformatul său $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ se numește *funcțiune Hölder a normalității unitare.*

In virtutea axiomei 2, rezultă că al doilea argument $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ e de asemenea unitar-normal.

E clar că orice funcţiune Hölder *relativă* la normalitatea unitară (funcţiunea definită în 3°) este şi o funcţiune Hölder *a* normalităţii unitare. Nu însă, reciproc.

Astfel, din exemplele dela sfârşitul alineatului 3° numai *f)* este o funcţiune Hölder propriu zisă *a* unei normalităţi unitare (normalitatea grupală).

Celelalte funcţiuni Hölder *a)—e)* din 3° sunt *relative* la normalitatea unitară (sau la normalităţi mai generale). Evident, ele pot deveni, pentru normalităţi speciale, funcţiuni Hölder *ale acelor* normalităţi dacă nu sunt verificate de toate câturile $\frac{A}{B}$, ci numai de câturile acelor normalităţi (unitare).

Alt exemplu decât *f)* de funcţiune Hölder veritabilă *a* unei normalităţi unitare este următorul:

g) Isomorfismul inelar a două câturi bilateral-ideale.

Normalitatea unitară care admite pe *g)* ca funcţiune Hölder se organizează astfel.

Se consideră totalitatea subinelelor unui inel O. Ele formează o semistructură $s^\cap$. Fie o semistructură $\sigma^\cap \subset s^\cap$ subordonată lui $s^\cap$, iar $\left(\frac{X}{Y}\right)$ o familie de intervale din $\sigma^\cap$ satisfăcând cererilor

$$\alpha)\ Y \text{ ideal bilateral în } X$$

$$\beta)\ Y \cup (X \cap \sigma^\cap) \subset (X \cap \sigma^\cap).$$

Dacă Σ e structura tuturor submodulelor lui O, se poate dovedi că $\left(\frac{X}{Y}\right)$ formează o normalitate unitară de structură Σ şi semistructură $\sigma^\cap$.

Cu teorema II de isomorfism pentru inele se arată că avem în *g)* o funcţiune Hölder *a acestei* normalităţi unitare.

Normalitatea astfel construită e diferită de normalitatea lui Kořínek, dacă semistructura $\sigma^\cap$ nu e complectă.

Pentru $\sigma^\cap = s^\cap$, cererea $\beta)$ este identic satisfăcută, căci $s^\cap$ e complectă, iar reuniunea $\cup$ din Σ coincide cu reuniunea $\cup$ din structura generată de $s^\cap$. Deoarece $s^\cap$ are de asemenea ultim element (pe O), conform teoremei 5° avem o normalitate Kořínek (nota din alineatul 5°).

10° *Lemma lui Zassenhaus (a normalităţii unitare).*

Fie $\frac{M}{m} = \mathfrak{N}, \frac{N}{n} = \mathfrak{N}$ două câturi normale ale unei normalităţi unitare şi $\mathfrak{H}$ o funcţiune Hölder *a acesteia.*

In acest caz, câturile conjugate relative la perechea $\frac{M}{m}, \frac{N}{n}$ sunt normale şi legate de funcţiunea Hölder $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}\left(\frac{M}{m}, \frac{N}{n}\right) = 0.$$

Demonstraţie. Prima parte a lemei a fost demonstrată în 6°.

A doua parte rezultă imediat din 8° şi 9°.

Intr'adevăr, câturile lui Zassenhaus admit reprezentarea (2) din 8°, unde câtul intermediar $\frac{U}{V}$ e normal (7°). Deci, funcţiunea $\mathfrak{K}$ *aparţinând* normalităţii unitare, avem

$$\mathfrak{K}\left[\frac{U}{V}, \Phi_m^M\left(\frac{U}{V}\right)\right] = 0, \ \mathfrak{K}\left[\frac{U}{V}, \Phi_n^N\left(\frac{U}{V}\right)\right] = 0, \ \mathfrak{K}\left[\Phi_m^M\left(\frac{U}{V}\right), \Phi_n^N\left(\frac{U}{V}\right)\right] = 0.$$

Cu aceasta, totul e demonstrat.

Consecinţa I. *Teorema de rafinare Schreier-Curoş-Zassenhaus*, pentru două lanţuri unitar-normale generale (eventual transfinite): câturi conjugate normale şi de aceeaşi funcţiune $\mathfrak{K}$.

Consecinţa II. In virtutea echivalenţei din 6°, suntem îndreptăţiţi să afirmăm:

In cadrul axiomelor 0 şi UK, teorema de rafinare Schreier-Curoş-Zassenhaus e logic echivalentă cu normalitatea unitară, pentru toate perechile de lanţuri în care, prin absenţa unei bune ordonări descendente sau ascendente care să permită o inducţie transfinită sau prin situaţia generală a celor două lanţuri, fără extremităţi comune, ce nu permite racordarea, compararea câturilor intermediare trebue făcută *direct*.

Observaţie. A. H. Lifşiţ [5] a ajuns la caracterizarea unei normalităţi local-involutive care să fie absolut logic echivalentă cu teorema de rafinare (înafară de orice cadru preexistent) pentru toate *lanţurile*, cu preţul unei funcţiuni Hölder.

Rezultatul său apare întru câtva tautologic, deoarece normalitatea câtului intermediar figurează printre axiome alături de axioma 2. Am văzut însă, la începutul alineatului 8°, că din 2 şi $\frac{U}{V} = \mathfrak{N}$ urmează *imediat* normalitatea câturilor conjugate ale lui Zassenhaus. Deci, axioma 2 plus axioma $\frac{U}{V} = \mathfrak{N}$ sunt, în ceea ce priveşte suficienţa lor, aproape o parafrazare a lemei lui Zassenhaus. Ni se pare că analiza ar trebui împinsă mai departe, anume: normalitatea câtului intermediar, redusă la un număr de afirmaţii mai simple şi mai semnificative.

Necesitatea axiomei $\frac{U}{V} = \mathfrak{N}$ (a cărei independenţă de cadrul $0 + UK$ ar fi interesant de stabilit), este demonstrată de Lifşiţ cu ajutorul funcţiunei Hölder particulare, introduse.

§ 4. Funcţiunea Hölder uzuală.

11° *Exprimarea existenţei integrităţii prin relaţia Ore-Dedekind necomplectă.*

Trecerea dela teorema de rafinare $S\ K\ Z$ la teorema Jordan-Hölder e posibilă numai în cazul în care integritatea (proprietatea a) din 3°) *aparţine* normalităţii unitare. Zicem atunci că *normalitatea unitară* e *cu funcţiune Hölder uzuală.*

Numai atunci câturile conjugate ale rafinărilor S K Z sunt nule şi pot fi îndepărtate. In cazul transfinit, îndepărtarea repetiţiilor constitue pentru ea însăşi o întreagă teorie fundată de A. G. C u r o ş [3]. Un comentar amplu al acestei teorii se găseşte în lucrarea pentru diploma de stat, din 1951, a lui D. P o p a, premiată cu publicarea.

T e o r e m ă. Fie $\frac{A}{B}$ un cât, nu numaidecât normal şi $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ transformatul său, într'o normalitate oarecare.

Pentru ca $\frac{A}{B}$, $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ să admită proprietatea integrităţii (să fie simultan nule) este suficient ca relaţia Ore-Dedekind necomplectă

$$A \cap (C \cup B) = B \tag{1}$$

să fie împlinită.

D e m o n s t r a ţ i e. $\frac{A}{B} = 0$ implică totdeauna $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right) = 0$. Să arătăm că implicaţia inversă este şi ea satisfăcută. Pornim dela identitatea $C \cup A = C \cup B$, care este altă scriere pentru $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right) = 0$, şi secţionăm în amândoi membrii cu A. Rezultă

$$A = A \cap (C \cup B)$$

sau, în virtutea lui (1):

$$A = B,$$

adică $\frac{A}{B} = 0$.

O b s e r v a ţ i a I. In verificarea de mai sus, condiţia $C \cap A = C \cap B$, care sfârşeşte descrierea lui $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ nu a intervenit. Deci propoziţia e mai generală. Se referă la transformări $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ fără condiţie anexă.

O b s e r v a ţ i a II. Condiţia (1) este, într'un sens banal, şi necesară. Dar nu pentru toate câturile $\frac{A}{B} = \mathfrak{X}$, ci numai pentru acelea cu $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right) = 0$. Intr'adevăr, dacă $C \cup A = C \cup B$, iar această relaţie implică $A = B$, obţinem pe rând $A = A \cap (C \cup B)$, $B = A \cap (C \cup B)$.

Teorema ce urmează îşi propune tocmai să stabilească necesitatea relaţiei Ore-Dedekind, în normalităţile unitare cu funcţiune Hölder uzuală, pentru orice $\frac{A}{B}$. Pentru aceasta însă, trebue să complectăm acea relaţie cu incluziunile limitative, obişnuite.

12° *Necesitatea verificării relaţiei Ore-Dedekind complectă în normalităţile unitare cu funcţiune Hödler uzuală.*

Sunt două cazuri de considerat:
1. Funcţiunea Hölder uzuală este *relativă* la normalitate.
2. Funcţiunea Hölder uzuală *aparţine* normalităţii.

1) T e o r e m ă. Dacă integritatea este o funcţiune Hölder *relativă* la o normalitate (nu numai decât unitară), atunci pentru

$$\frac{D}{C} = \mathfrak{N},\ D \supset A$$
$$C \cap A = C \cap B \tag{1}$$

relaţia lui Ore-Dedekind complectă

$$A \cap (C \cup B) = B \tag{2}$$
$$C \cap A \subset B \subset A$$

e satisfăcută şi normalitatea este subspecie a α -normalităţii.

D e m o n s t r a ţ i a este o simplă aplicaţie a criteriului lui Curoş al α -normalităţii. Intr'adevăr, dacă alături de (1), cererea

$$C \cup A = C \cup B \tag{1'}$$

implică $A = B$ pentru orice cât $\frac{A}{B}$ cu $A \subset D$, conform acestui criteriu C este α -normal în substructura $X \subset D$. Ca atare, satisface definiţiei (2) a lui Ore-Dedekind, a α -normalităţii.

2) T e o r e m ă. Dacă integritatea este o funcţiune Hölder *aparţinând* normalităţii unitare, atunci pentru

$$\frac{A}{B} = \mathfrak{N},\ \frac{D}{C} = \mathfrak{N},\ D \supset A$$
$$C \cap A = C \cap B \tag{3}$$

relaţia Ore-Dedekind complectă

$$A \cap (C \cup B) = B$$
$$C \cap A \subset B \subset A \tag{4}$$

e satisfăcută.

D e m o n s t r a ţ i e. In virtutea axiomei 2 avem

$$\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N}.$$

Aşa dar, în virtutea axiomei 0:

$$(C \cup B) \to \sigma^{\cap}$$

iar în virtutea axiomei 1

$$\frac{(C \cup B) \cap A}{(C \cup B) \cap B} = \frac{A \cap (C \cup B)}{B} = \mathfrak{N}. \tag{5}$$

In virtutea quasi-modularităţii oricărei structuri avem

$$C \cup [A \cap (C \cup B)] \subset (C \cup A) \cap (C \cup B) = C \cup B.$$

Dar, ţinând seamă că termenii câtului din (5) formează interval, avem de asemenea

$$C \cup [A \cap (C \cup B)] \supset C \cup B.$$

In definitiv

$$C \cup [A \cap (C \cup B)] = C \cup B \tag{6}$$

Ceva mai mult, câtul (5), în virtutea lui (3) este anulat prin secţiune de C, iar $D \supset [A \cap (C \cup B)]$. Aşa dar, conform lui (6), putem scrie:

$$\Phi_C^D\left(\frac{A \cap (C \cup B)}{B}\right) = 0.$$

Deoarece integritatea este o funcţiune Hölder *a normalităţii* considerate, iar câtul din (5) normal, conchidem $\frac{A \cap (C \cup B)}{B} = 0$ adică

$$A \cap (C \cup B) = B \tag{7}$$

Pe de altă parte (3) este echivalent cu

$$C \cap A \subset B \subset A \tag{7'}$$

cum s'a mai arătat. Relaţiile (7) şi (7') stabilesc teorema.

Observaţie. Vom atrage atenţia la vreme, la sfârşitul alineatului respectiv, că normalitatea câtului (5) poate fi dovedită şi în cazul normalităţii global-involutive din paragraful viitor. Deoarece, din acel punct mai departe, consideraţiile sunt independente de felul normalităţii, enunţăm cu anticipaţie acest rezultat: *dacă integritatea este o funcţiune Hölder a F - normalităţii, atunci relaţia Ore-Dedekind complectă* (4) *e încă verificată*, în aceleaşi condiţii ca în teorema de mai sus.

13° *Consecinţe pentru structurile grupale.*

Intr'o lucrare [6] a noastră din 1947 am găsit următoarele două rezultate, dintre care, primul, este oarecum corelativul atomistic al rezultatului simplu din 11°.

1. Condiţia necesară şi suficientă ca, într'o structură grupală, clasele de resturi (stângi) de acelaşi reprezentant ale descompunerii, intervalelor $\frac{A}{B}$, $\frac{C \cup A}{C \cup B}$, să se corespundă biunivoc este relaţia necomplectă Ore-Dedekind:

$$A \cap (C \cup B) = B. \tag{1}$$

2. Condiţia necesară şi suficientă ca aceleaşi clase de resturi să se corespundă nelacunar este permutabilitatea

$$A \times (C \cup B) = (C \cup B) \times B. \tag{2}$$

Cu aceste propoziții putem dovedi, pe rând:

Teorema I. O normalitate unitară, în material grupal, care satisface axiomelor $0 + UK$ și admite echivalența claselor de resturi (stângi) ca proprie funcțiune Hölder este o quasi-normalitate cu fond semistructural $\sigma^{\cap}$.

Demonstrație. Fie

$$\frac{D}{C} = \mathfrak{N},\ A \in (D \cap \sigma^{\cap}).$$

Conform axiomei UK, există un $B \to (C \cap A)$ cu

$$\frac{A}{B} = \mathfrak{N}.$$

Potrivit ipotezei, mulțimile de clase de resturi stângi ale câturilor

$$\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right),\ \frac{A}{B},$$

coordonate prin condiția de a avea același reprezentant, sunt în reprezentare echivalentă. Deci 2. se verifică. Deoarece $B \to C$, această relație devine

$$A \times C = C \times A,$$
$$A \in (D \cap \sigma^{\cap}),$$

așadar normalitatea e o quasi-normalitate cu fond $\sigma^{\cap}$.

Observație. Când $\sigma^{\cap}$ coincide cu structura grupală totală, avem quasi-normalitatea lui Ore. Se știe că ea reprezintă o normalitate Kořínek de funcțiune Hölder *e)* (3°).

In cursul nostru [7] am demonstrat pentru quasi-normalitatea cu fond de semistructură $\sigma^{\cap}$ care satisface la cererea $\left(\frac{D}{C} = \mathfrak{N}\right)$:

$$C \cap (D \cap \sigma^{\cap}) \subset (D \cap \sigma^{\cap}), \tag{3}$$

că este o normalitate unitară cu funcțiune Hölder proprie *e)*.

Cererea (3) e satisfăcută dacă $\sigma^{\cap}$ coincide cu o substructură grupală.

Astfel încât teorema I are această semnificație: *caracterizarea* în cadrul $0 + U\ K$ a *quasi-normalității*, printre normalitățile unitare, *cu ajutorul funcției Hölder e)*.

Teorema II. Dacă o normalitate unitară, realizată grupal, satisface la cererea $\frac{D}{C} = \mathfrak{N}, \frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $D \supset A$ *implică* $A \times (C \cap B) = (C \cup B) \times A$ și dacă e cu funcțiune Hölder proprie, uzuală, această funcțiune poate fi extinsă până la echivalența *e)*.

Demonstrație. Intr'adevăr, conform lui 11°, avem pentru $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$:

$$A \cap (C \cup B) = B.$$

Folosind 1), câturile $\frac{A}{B}$ şi $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ rezultă cu reprezentare biunivocă a claselor de resturi. In virtutea lui 2. şi a cererii din enunţ, reprezentarea e nelacunară.

In definitiv, $\frac{A}{B}$ şi $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ admit o reprezentare echivalentă a claselor de resturi stângi.

Cu aceasta totul e demonstrat.

§ 5. Normalităţi involutive globale

14° *Lanţuri tari-normale.*

Fie Σ o structură cu ultim element[1]) $\mathfrak{G}$ complectă faţă de secţiune. Toate lanţurile (G_x) considerate în acest paragraf au acelaşi capăt superior

$$\mathfrak{G} = G_{x_\infty}$$

şi sunt *descendent bine ordonate.*

Aceasta înseamnă că $G_{x'} \supset G_{x''}$, pentru $x' > x''$, iar fiecare submulţime nedeşartă de indici $[x]$ are un ultim element. In particular urmează, — afară de cazul când (G_x) are un capăt inferior G_{x_0}, iar $x = x_0$, — că fiecare x are un anterior imediat $x-1$.

Presupunem că în Σ avem definită o normalitate $\mathfrak{N}$. Lanţul (G_x) se zice *normal* dacă pentru orice $x \neq x_0$ avem

$$\frac{G_x}{G_{x-1}} = \mathfrak{N}. \tag{1}$$

Un lanţ se zice *normal tare* când pentru fiecare $x \neq x_\infty$ avem un ulterior (nu numaidecât imediat) x^* astfel încât

$$\frac{G_{x^*}}{G_x} = \mathfrak{N},\ x^* > x.$$

In cazul $x = x' - 1$, e clar, în virtutea lui (1), că putem lua $x^* = x'$.

Lanţurile normale finite sunt evident tari.

Lanţurile normale infinite de tipul de ordonare al numerelor întregi negative (unde x_∞ corespunde lui 0, iar x_0 lui $-\infty$) în care cerem numai

$$\frac{G_{x_0^*}}{G_{x_0}} = \mathfrak{N}\quad x_0^* > x_0$$

sunt de asemenea tari.

---

[1]) S'ar părea că este o îngrădire în această cerere a ultimului element şi în rolul pe care-l joacă în axiomele F-normalităţii. In realitate, în teoremele de rafinare şi de descompunere se introduce totdeauna o structură cu ultim element, care joacă un rol privilegiat în problemă. E substructura $X \subset \mathfrak{S}$ unde $\mathfrak{S}$ e capătul superior, comun, al lanţurilor. Aceasta este în realitate, structura Σ de care e vorba aici.

Noțiunea de lanț normal tare este a lui C u r o ș [3], liberată aici de cererea $G_{x^*} > G_x$, care, pentru teorema de rafinare este inutilă. Chiar pentru teorema Jordan - Hölder este inutilă, căci teoria lui Curoș a îndepărtării repetițiilor remediază și la repetițiile ce se introduc prin eventualitatea $G_{x^*} = G_x$.

15° *F-normalitatea.*

O normalitate a unei structuri Σ cu ultim element $\mathfrak{G}$, satisfăcând următoarelor patru axiome, o numim *F*-normalitate:

0. Numărătorii tuturor câturilor care figurează în ipotezele axiomelor 1, 2, 3, de mai jos, sunt accesibili la $\mathfrak{G}$ prin lanțuri normal-tari descendent bine ordonate.

1. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{C} = \mathfrak{N}$, atunci $\frac{B}{B \cap C} = \mathfrak{N}$.

2. Dacă $\frac{D}{C} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $D \supset A$, $C \cap B = C \cap B$, atunci $\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N}$.

3. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{C} = \mathfrak{N}$, atunci $\frac{A}{B \cup C} = \mathfrak{N}$.

Pentru claritatea discuției ce urmează, să accentuăm numerele care arată axiomele normalității unitare din 4°. Deci, axiomele acelei normalități devin 0′, 1′, 2′.

O b s e r v a ț i a I. Inzestrarea *F*-normalității cu un fond de semistructură nu generalizează tipul de normalitate, așa cum am văzut (alineatul 5°) că se întâmplă cu normalitatea lui K o ř í n e k.

Intr'adevăr, acolo, elementul $C \in \sigma^{\cap}$ care intervine în axioma 1′, introduce direct fondul normalității în axiome. Deci, prin trecerea dela Σ la $\sigma^{\cap} \subset \Sigma$ (cel puțin în cazul unei semistructuri $\sigma^{\cap}$ necomplecte) întâlnim, fără a pierde niciuna din speciile introduse, specii noi.

In schimb, în axiomele *F*-normalității intră numai câturi normale. Deci adăugarea axiomei 0′ axiomelor $0 + 1 + 2 + 3$ particularizează tipul, căci ar constrânge termenii câturilor normale să rămână cuprinși într'o semistructură, în locul unei submulțimi arbitrare din Σ.

O b s e r v a ț i a II. Sistemul de axiome $0' + 1' + 2'$ al normalității unitare este echivalent cu $0' + 1' + 2 + 3$.

Intr'adevăr, se vede ușor că 2 și 3 sunt cazuri speciale ale lui 2′ (ultima, pentru $A = D$). Să arătăm că 2′ este o consecință a lui $1' + 2 + 3$.

Avem, ipotezele fiind acelea din 2′, în virtutea lui 1′:

$$\frac{A \cap D}{A \cap C} = \frac{A}{A \cap C} = \mathfrak{N}.$$

De aici, în virtutea lui 3:

$$\frac{A}{(A \cap C) \cup B} = \mathfrak{N}. \tag{1}$$

Dar, în virtutea quasi-modularității, urmează

$$\{(A \cap C) \cup B\} \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cap C.$$

Pe de altă parte, evident: $\{(A \cap C) \cup B\} \cap C \subset (A \cap C)$.

In definitiv

$$\{(A \cap C) \cup B\} \cap C = A \cap C \tag{2}$$

Deci, putem aplica în (1), (2) axioma 2:

$$\frac{C \cup A}{C \cup (A \cap C) \cup B} = \frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N}$$

Este deci probat că $1' + 2'$ este echivalent cu $1' + 2 + 3$.

Să presupunem că normalitatea F ar fi locală. In cazul acesta, axioma de accesibilitate 0 devine de prisos. Să întărim în schimb cadrul lui F cu $0' + K\ U$. Obţinem cadrul $K\ U + 0' + 1 + 2 + 3$. Dar în subcadrul $K\ U + 0'$, am demonstrat în 5°, orice normalitate locală este o normalitate unitară. Aşa dar cadrul $K\ U + 0' + 1 + 2 + 3$ trebue să fie echivalent cu cadrul $K\ U + 0' + 1' + 2 + 3$ (vezi mai sus). Insă 1 este o considerabilă slăbire a axiomei $1'$.

Fără a fi riguros dovedit (cercetarea ar cere construirea unui exemplu), apare foarte probabil că $U\ K + 0' + 1 + 2 + 3$ conţine ca propoziţie veritabil mai particulară pe $U\ K + 0' + 1' + 2 + 3$. De aici rezultă că F-normalitatea nu este obligatoriu local-involutivă.

Aşa dar, *dacă în cadrul F-normalităţii teorema de rafinare SKZ este demonstrabilă, F-normalitatea rezultă* (cu un mare grad de plauzibilitate) *veritabil global-involutivă.*

16° *Lemmele teoremei de rafinare pentru F-normalitate.*

L e m m a I. Fie (G_x) un lanţ F-normal tare, descendent bine ordonat de extremităţi

$$G_{x_\infty} = \mathfrak{G}, \quad G_{x_0} = g$$

iar $H \to \Sigma$, cu

$$\frac{\mathfrak{G}}{H} = \mathfrak{N}. \tag{1}$$

In aceste condiţii, urmează

$$\frac{G_x}{H \cap G_x} = \mathfrak{N} \tag{2}$$

pentru orice $x > x_0$.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru $x = x_\infty$, proprietatea (2) coincide cu ipoteza (1), deci e banal verificată. Presupunem (2) adevărată pentru toţi $x' > x$.

Deoarece (G_x) e F-normal tare, există un $x^* > x$ cu

$$\frac{G_{x^*}}{G_x} = \mathfrak{N}. \tag{3}$$

Ipoteza inductivă ne dă însă

$$\frac{G_{x^*}}{H \cap G_{x^*}} = \mathfrak{N}. \tag{4}$$

Dar G_{x^*} e normal accesibil la $\mathcal{G}$, deci putem aplica în (3) și (4) axioma 1. obținem

$$\frac{G_x}{(H \cap G_{x^*}) \cap G_x} = \frac{G_x}{H \cap G_x} = \mathfrak{N}.$$

Prin urmare (2) e valabilă și pentru x. Deoarece (x) e mulțime descendent bine ordonată, putem aplica inducția transfinită.

Conchidem că (2) e valabilă pentru orice x.

Lemma II. Dacă (G_x) este un lanț F-normal tare, descendent bine ordonat, iar H un element F-normal în $\mathcal{G}$.

$$\frac{\mathcal{G}}{H} = \mathfrak{N},$$

lanțul $(\Gamma_x) = H \cap (G_x)$ e de asemenea normal tare, descendent bine ordonat de extremități $\Gamma_{x_\infty} = H$ și $\Gamma_{x_0} = H \cap g$.

Demonstrație. Punem

$$H \cap G_x = \Gamma_x .$$

E clar că avem în (Γ_x) un lanț descendent bine ordonat, căci mulțimea indicilor a rămas aceeași iar pentru $x' > x''$ urmează $\Gamma_{x'} \supset \Gamma_{x''}$.

Rămâne să arătăm că (Γ_x) e F-normal tare.

Prin ipoteză (G_x) e F-normal tare, deci

$$\frac{G_{x^*}}{G_x} = \mathfrak{N}, \quad x^* > x, \tag{5}$$

$$x \in (x) - x_\infty .$$

Conform lemmei I putem scrie

$$\frac{G_{x^*}}{H \cap G_{x^*}} = \mathfrak{N}. \tag{5'}$$

Insă G_{x^*} e normal accesibil la $\mathcal{G}$. Deci, putem aplica în (5), (5'), axioma 1 Rezultă

$$\frac{H \cap G_{x^*}}{(H \cap {}_{x^*}) \cap G_x} = \frac{H \cap G_{x^*}}{H \cap G_x} = \mathfrak{N},$$

relație care se mai scrie

$$\frac{\Gamma_{x^*}}{\Gamma_x} = \mathfrak{N}. \tag{6}$$

In particular, punând în (5) $x - 1$ în locul oricărui x care nu este indice limită, putem lua (alineatul 15°), pentru $x^* = x$. Incât (6) devine

$$\frac{\Gamma_x}{\Gamma_{x-1}} = \mathfrak{N}. \tag{6'}$$

Citim pe (6) şi (6′) verificarea tuturor afirmaţiilor din enunţ.

L e m m a III[1]) Dacă (G_x) şi (H_y) sunt două lanţuri descendent bine ordonate, F-normale tari, de aceleaşi extremităţi:

$$G_{x_\infty} = H_{y_\infty} = G, \qquad G_{x_0} = H_{y_0} = g$$

atunci

$$\begin{matrix} H_{\bar{y}} \cap (G_x) \\ \bar{y} \in (y) - y_0 \end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix} G_{\bar{x}} \cap (H_y) \\ \bar{x} \in (x) - x_0 \end{matrix}$$

reprezintă de asemenea un lanţ descendent bine ordonat, F-normal tare, de extremităţi $H_{\bar{y}}$, g, resp. $G_{\bar{x}}$, g.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru $\bar{y} = y_\infty$ proprietatea e banal-verificată, căci

$$H_y \cap (G_x) = \mathfrak{G} \cap (G_x) = (G_x).$$

Presupunem proprietatea adevărată pentru toţi $y > \bar{y}$. Vrem să arătăm că este adevărată pentru $\bar{y}$.

Deoarece (H_y) e F-normal tare, există un $y^* > y$ cu

$$\frac{H_{y^*}}{H_{\bar{y}}} = \mathfrak{X}, \qquad y^* > y. \tag{7}$$

Potrivit ipotezei inductive lanţul

$$H_{y^*} \cap (G_x) \tag{8}$$

e F-normal tare, de extremităţi H_{y^*}, g. Având în vedere (7), lanţul (8) şi elementul $H_{\bar{y}} = H$ sunt în condiţiile lemmei II. Urmează deci că lanţul

$$H_{\bar{y}} \cap (H_{y^*} \cap (G_x)) = H_{\bar{y}} \cap (G_x)$$

e F-normal tare, de extremităţi $H_{\bar{y}}$, g.

Propoziţia e demonstrată prin inducţie transfinită descedentă.

O b s e r v a ţ i e. Lemmele I, II, III cer numai aplicarea axiomelor $0 + 1$ ale F-normalităţii. Deci, ele aparţin unei normalităţi mai generale.

Să observăm iarăşi că demonstraţia lemmei III nu foloseşte condiţia ca (G_x), (H_y) să aibă acelaşi capăt inferior g. Deci, enunţul rămâne valabil şi pentru cazul când (G_x), (H_y) au capete inferioare $g \neq h$ distincte.

17° *Verificarea globală a lemmei lui Zassenhaus.*

T e o r e m ă. Dacă

$$\frac{G_x}{G_{x-1}} = \mathfrak{X}, \qquad \frac{H_y}{H_{y-1}} = \mathfrak{X}$$

[1]) Teorema 2, III din articolul lui M. B e n a d o din acest volum se acopere cu această lemmă. Pentru a întâlni enunţul lui M. B e n a d o, este de ajuns să limităm lanţurile $H_{\bar{y}} \cap (G_x)$ şi $G_{\bar{x}} \cap (H_y)$ la termenul lor comun $H_{\bar{y}} \cap G_{\bar{x}}$.

sunt două câturi F-normale, de numărători normal-accesibili la G, ele verifică lemma lui Zassenhaus:

$$\frac{U}{V} = \frac{G_x \cap H_y}{(G_x \cap H_{y-1}) \cup (H_y \cap G_{x-1})} = \mathfrak{N} \tag{1}$$

$$\Phi_{G_{x-1}}^{G_x}\left(\frac{U}{V}\right) = \mathfrak{N}, \quad \Phi_{H_{y-1}}^{H_y}\left(\frac{U}{V}\right) = \mathfrak{N} \tag{2}$$

Demonstrație. Conform ipotezei există un lanț F-normal tare, descendent bine ordonat (G_x) resp. (H_y) de capăt superior $\mathcal{G}$ și de ultimi termeni $G_x \supset G_{x-1}$ resp. $H_y \supset H_{y-1}$.

Conform lemmei III și ultimei părți a observației ce o însoțește, lanțul

$$H_y \cap (G_x) \qquad (3) \quad \text{, resp.} \quad G_x \cap (H_y) \qquad (4)$$

e F-normal tare, descendent bine ordonat, de extremități H_y, $H_y \cap G_{x-1}$ resp. G_x, $G_x \cap H_{y-1}$. In particular, urmează

$$\frac{H_y \cap G_x}{H_y \cap G_{x-1}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{G_x \cap H_y}{G_x \cap H_{y-1}} = \mathfrak{N}. \tag{5}$$

Numărătorul $G_x \cap H_y$ al acestor câturi e normal accesibil la $\mathcal{G}$ prin reunirea lanțurilor $H_y \cap (G_x)$, (H_y) racordate în H_y: lanț de asemenea F-normal tare, descendent bine ordonat.

Deci în (5) și (6) putem aplica axioma 3. Obținem prima parte (1) a concluziei.

Dar, în orice structură:

$$G_{x-1} \cap U = G_{x-1} \cap V \qquad \text{resp.} \qquad H_{y-1} \cap U = H_{y-1} \cap V.$$

Deoarece câturile date și câtul intermediar (1) sunt normal accesibile la $\mathcal{G}$, putem aplica axioma 2. Obținem ultima parte (2) a concluziei.

E de observat că verificarea normalității câtului intermediar cere numai axiomele $0 + 1 + 3$.

18° *Teorema Schreier-Curoș-Zassenhaus.*

Teoremă. Dacă (G_x), (H_y) sunt două lanțuri F-normale tari, descendent bine ordonate, de aceleași extremități, rafinările lor SKZ (liberate de termenii paraziți G_{xy_0}, H_{yx_0}) sunt două lanțuri (G_{xy}), (H_{yx}) F-normale tari, descendent bine ordonate, cu câturile conjugate satisfăcând funcțiunii Hölder (eventuale) proprie normalității.

Demonstrație. Ordonând indicii diadici xy resp. yx întâi după y resp. x iar apoi după x, resp. y, se constată ușor că (G_{xy}) resp. (H_{yx}) e descendent bine ordonat [8] de extremități $\mathcal{G}$, g și conținând pe (G_x) resp. (H_y).

Relațiile (2) din 17° se scriu încă

$$\frac{G_{xy}}{G_{x,\,y-1}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{H_{yx}}{H_{y,\,x-1}} = \mathfrak{N}.$$

Deci (G_{xy}) și (H_{yx}) sunt lanțuri descendent bine ordonate, F-normale.

Să arătăm că sunt F-normale tari. Discuţia se împarte în două cazuri:
1) $y < y_\infty$.

Conform lemmei III, lanţul $G_x \cap (H_y)$ e descendent bine ordonat F-normal tare. Există deci un $y^* > y$ astfel încât

$$\frac{G_x \cap H_{y^*}}{G_x \cap H_y} = \mathfrak{N}. \tag{1}$$

Conform aceleiaşi lemme, lanţul $H_{y^*} \cap (G_x)$ e descendent bine ordonat, F-normal (tare). Deci

$$\frac{H_{y^*} \cap G_x}{H_{y^*} \cap G_{x-1}} = \mathfrak{N}. \tag{2}$$

Dar (alineatul 17°), $H_{y^*} \cap G_x$ e normal - accesibil la $\mathfrak{S}$. Aplicând în (1), (2) axioma 3 avem:

$$\frac{U}{V} = \frac{G_x \cap H_y}{(G_x \cap H_y) \cup (H_{y^*} \cap G_{x-1})} = \mathfrak{N},$$

cu

$$G_{x-1} \cap U = G_{x-1} \cap V$$

Aplicând 2 câturilor $\frac{G_x}{G_{x-1}} = \mathfrak{N}$, $\frac{U}{V} = \mathfrak{N}$ obţinem

$$\frac{G_{xy^*}}{G_{xy}} = \mathfrak{N}, \qquad y^* > y. \tag{3}$$

2) $x < x_\infty$, $y = y_\infty$

Deoarece (G_x) e normal tare, există un $x^* > x$ cu

$$\frac{G_x^*}{G_x} = \mathfrak{N}, \qquad x^* > x. \tag{4}$$

Dar

$$G_{x^* y_\infty} = G_{x^*}, \quad G_{x y_\infty} = G_x$$

deci (4) se scrie

$$\frac{G_{x^* y_\infty}}{G_{x^* y_\infty}} = \mathfrak{N}, \qquad x^* > x. \tag{3'}$$

Rezultatele (3), (3') se rezumă astfel. Pentru orice indice diadic $xy \in (xy) - x_\infty y_\infty$ există un indice $x^* y^*$ cu

$$\frac{G_{x^* y^*}}{G_{x^* y}} = \mathfrak{N} \quad x^* y^* > xy.$$

Deci (G^*_{xy}) e normal tare. La fel, (H_{yx}).

Cu aceasta totul e demonstrat.

O b s e r v a ț i e. Am anunțat în teorema 2) din 12°, că în F-normalitate, ca și în normalitatea unitară, dacă integritatea este o funcțiune Hölder proprie normalității, atunci relația lui Dedekind - Ore complectă (A, D *normal accesibili*):

$$\frac{D}{C} = \mathfrak{N} \quad \frac{A}{B} = \mathfrak{N}, \quad D \supset A$$

$$C \cap A \subset B \subset A$$

$$(B \cup C) \cap A = B$$

e verificată *pe normalitate*. Condiția, în baza teoremei generale 1), e și suficientă.

Potrivit observației din 12°, totul se reduce la verificarea normalității următorului cât

$$\frac{A \cap (B \cup C)}{B} = \mathfrak{N}.$$

Suntem în măsură să dăm acum demonstrația.

Conform ipotezei, există un lanț F-normal tare, ascendent bine ordonat (G_x) resp. (H_y) (de capăt superior $\mathcal{G}$), conținând ca ultim interval $A \supset B$, resp. $D \supset C$.

In virtutea lemmei III din 16°, lanțul

$$(\gamma_x) = C \cap (G_x) \text{ resp. } (\beta_y) = B \cap (H_y)$$

e F-normal tare, descendent bine ordonat de extremități C, $C \cap B$, resp. B, $C \cap B$.

Considerăm racordările de lanțuri

$$(G'_z) = (G_x) + (\beta_y), \quad (H'_t) = (H_y) + (\gamma_x)$$

Ele sunt de asemenea descendent bine ordonate, F-normale tari. Mai mult, au extremitățile comune $\mathcal{G}$, $B \cap C$.

Conform teoremei din acest alineat, rafinările lor SKZ sunt două lanțuri G_{zt}, H_{tz} de asemenea descendent bine ordonate, F-normale tari. Ele conțin căturile conjugate ale intervalelor $\frac{A}{B}$, $\frac{D}{C}$ respectiv conținute de (G_x), (H_y) deci, de (G'_z), (H'_t). Unul din aceste câturi este

$$\frac{C \cup A}{C \cup B}.$$

Conchidem că $C \cup B$ e normal accesibil. Aplicând acum lemma III lui $C \cup B$ și lui (G_x) rezultă că lanțul $(B \cup C) \cap (G_x)$ e F-normal. Dar (G_x) conține intervalul $\frac{A}{B}$. Ca atare,

$$\frac{(B \cup C) \cap A}{B} = \mathfrak{N}. \qquad q.e.d.$$

§ 6. Normalităţi involutive globale la stânga.

19° *Normalităţile* $\mathfrak{F}$ *şi* $\mathfrak{F}'$.

In acest paragraf, ne propunem să construim două tipuri de normalităţi involutive globale: normalitatea $\mathfrak{F}$ şi normalitatea $\mathfrak{F}'$, reconstituind prin inducţie transfinită la stânga, lemma lui Zassenhaus.

Dar, pe când $\mathfrak{F}'$ reconstitue complect această lemmă (inclusiv normalitatea câtului intermediar) şi face posibilă înzestrarea *a posteriori*, a normalităţii, cu orice funcţiune Hölder *proprie*, în schimb $\mathfrak{F}$ nu implică normalitatea câtului intermediar şi deci rămâne capabilă numai de funcţiuni Hölder *relative* la $\mathfrak{F}$.

Aceste normalităţi au următoarele axiome în comun:

0. Toţi numitorii câturilor din ipotezele axiomelor de mai jos sunt normal accesibili lui g prin lanţuri K (noţiune ce va fi definită în alineatul viitor).

1_0. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{C} = \mathfrak{N}$, $B \supset C$, atunci $\frac{B}{C} = \mathfrak{N}$.

2. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{D}{C} = \mathfrak{N}$, $A \subset D$, $C \cap A = C \cap B$, atunci $\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{N}$.

3. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{C} = \mathfrak{N}$, cu $\frac{B}{D} = \mathfrak{N}$, $\frac{C}{D} = \mathfrak{N}$, atunci $\frac{A}{B \cup C} = \mathfrak{N}$.

Normalităţile se deosebesc prin următoarele axiome:

Normalitatea $\mathfrak{F}$.

1. Dacă $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{C} = \mathfrak{N}$, cu $\frac{B}{D} = \mathfrak{N}$, $\frac{C}{D} = \mathfrak{N}$, atunci $\frac{B}{B \cap C} = \mathfrak{N}$.

Normalitatea $\mathfrak{F}'$.

4. Relaţia de normalitate este o funcţiune Hölder. Altfel spus, câturile $\frac{A}{B}$, $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ — ipotezele fiind acelea din 2 — sunt simultan $\mathfrak{F}'$-normale [1].

Să spunem că pentru teorema de rafinare finită, axioma 2, atât în $\mathfrak{F}$ cât şi în $\mathfrak{F}'$, poate fi slăbită, limitând-o la câturi cu $\frac{B}{M} = \mathfrak{N}$, $\frac{C}{M} = \mathfrak{N}$.

20° *Lanţurile Schreier normal tari. Lanţurile* K.

Fie (G_x) o mulţime de lanţuri de extremitate inferioară g: primul element al structurii şi de extremitate superioară $\mathfrak{G}$ variabilă. $\mathfrak{N}$ însemnând aici una, oarecare din normalităţile $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, numim *lanţ Schreier normal tare*, un lanţ care satisface la următoarele axiome:

α. E ascendent bine ordonat;

β. Cu $\frac{\mathfrak{G}}{g} = \mathfrak{N}$ (lanţ Schreier);

[1]) Lângă 4, axioma 2 dispare.

γ. Cu $\frac{G_{x+1}}{G_x} = \mathfrak{N}$ pentru orice $\bar{x} < x_\infty$ (lanţ normal);

δ. Pentru orice $x > x_0$ există un prim $\bar{x} < x$ astfel încât $\frac{G_x}{G_\xi} = \mathfrak{N}$ pentru toţi ξ cu $x > \xi \geqslant \bar{x}$ (lanţ normal tare).

E clar că γ se resoarbe în δ. Preferăm să menţinem pe γ pentru claritatea discuţiei.

Intervalul $x > \bar{x}$ se numeşte *intervalul maxim de tărie* al lui x; orice subinterval al său $x > \xi$: interval de tărie al lui x.

O mulţime de lanţuri Schreier normal tari, care satisfac în plus la cererile de mai jos, se numeşte *mulţime K de lanţuri*:

ε_0. Există o mulţime (a valorilor) bine ordonată $|K|$ astfel încât la orice lanţ $k \in K$ să fie asociat univoc un element $|k| \to |K|$ (valoarea lui k):

$$k \twoheadrightarrow |k| \qquad\qquad k \in K, \quad |k| \to |K|$$

Toate lanţurile Schreier, normal tari, valorificate în $|K|$, sunt în K.

ε_1. In $|K|$ sunt valorificate toate lanţurile Schreier normal tari finite, precum şi rafinările SKZ a două lanţuri de aceleaşi extremităţi, dar altfel arbitrare, din K.

ε_2. k şi $|k|$ sunt în acelaşi timp finiţi; în acest caz, $|k|$ reprezintă lungimea lui k.

ε_3. Dacă A este un element al structurii cu $\frac{\mathfrak{G}}{A} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{g} = \mathfrak{N}$, iar lanţul $A \cap (G_x)$ e lanţ Schreier normal tare, atunci $A \cap (G_x) \to K$ odată cu $(G_x) \to K$. Dacă $A \to (G_x)$, $A \neq \mathfrak{G}$ avem în plus $|A \cap (G_x)| < |(G_x)|$.

ε_4. Dacă $(G_x) \to K$, iar $(G_{x'})$ dedus din (G_x) prin extirparea unui interval de tărie atunci $(G_{x'}) \to K$, iar $|(G_{x'})| < |(G_x)|$.

T e o r e m ă. Dacă (G_x) e lanţ Schreier normal tare, iar $x_\infty > \xi \geqslant \bar{x}_\infty$ intervalul de tărie al ultimului indice, atunci $\frac{G_\xi}{g} = \mathfrak{N}$ pentru toţi ξ.

D e m o n s t r a ţ i a rezultă imediat din axioma 1_0, comună celor două normalităţi. Intr'adevăr, avem $\frac{\mathfrak{G}}{G_\xi} = \mathfrak{N}$, $\frac{\mathfrak{G}}{g} = \mathfrak{N}$, $G_\xi \supset g$. Deci $\frac{G_\xi}{g} = \mathfrak{N}$.

T e o r e m ă. Lanţurile $\mathfrak{F}$-normale, resp. $\mathfrak{F}'$-normale finite cu $\frac{\mathfrak{G}}{g} = \mathfrak{N}$ sunt lanţuri Schreier normal tari K.

D e m o n s t r a ţ i e. Axiomele $\alpha + \beta + \gamma$ sunt evident satisfăcute. Axioma δ coincide aici cu γ, căci nu există indici-limită. Axiomele $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ sunt banal satisfăcute.

T e o r e m ă. Lanţurile $\mathfrak{F}$-normale, resp. $\mathfrak{F}'$-normale finite şi infinite, de tipul de ordonare al numerelor întregi pozitive, cu $\frac{G}{g} = \mathfrak{N}$ sunt lanţuri Schreier normal tari K, dacă există un $\bar{x}_\infty$ destul de mare pentru care sublanţul (G_ξ) cu $x_\infty \geqslant \xi \geqslant \bar{x}_\infty$ este principal.

D e m o n s t r a ţ i e. Axiomele $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ sunt satisfăcute, cu $x_\infty > \xi \geqslant \bar{x}_\infty$ ca interval de tărie al lui x_∞.

Mulţimea numerelor întregi pozitive s'o închidem superior cu elementul ideal ∞. Luând această mulţime ca mulţime $|K|$ a valorilor, unde fiecărui lanţ infinit îi facem să corespundă valoarea ∞, axiomele $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ sunt şi ele satisfăcute.

21° *Lanţuri* λ_1, *resp.* λ_2.

Un lanţ ascendent bine ordonat aparţine tipului λ_1 resp. λ_2, după cum capătul superior $\mathfrak{G}$ este elementar (are anterior imediat) sau transcendent (nu are anterior imediat).

Structura Σ o presupunem complectă relativ la reuniune. Se poate arăta atunci că două lanţuri λ_i, λ_j $(i, j = 1, 2)$ au rafinări *SKZ* de tipul $\lambda_{\mathrm{Max}\,(i,\,j)}$.

Dacă lanţurile sunt dense, aşa dar dacă pentru fiecare indice transcendent avem

$$\cup\, G_{x'} = G_x$$
$$x' < x$$

iar structura ascendent slab-distributivă, rafinările lanţurilor λ dense sunt încă dense.

O structură Σ complectă faţă de reuniune se zice ascendent slab distributivă când pentru fiecare $B \in \Sigma$ şi fiecare mulţime total ordonată A_x avem

$$B \cap (\cup A_x) = \cap (B \cap A_x)$$

In acest cadru rafinările *SKZ* a două lanţuri λ dense sunt acoperitoare. Aceasta înseamnă că intervalul rafinat are ca extremităţi chiar extremităţile intervalului nerafinat (împrejurarea contrară se poate produce în cazul lanţurilor infinite din structuri ne (slab) distributive).

In cele ce urmează, vom presupune că structura fundamentală e complectă faţă de reuniune şi ascendent slab distributivă iar lanţurile Schreier K dense (un punct de vedere *mai particular pentru normalitate* este să ne menţinem la lanţuri K nedense).

Toate propoziţiile din acest alineat le luăm fără demonstraţie. Demonstraţia lor e cuprinsă în [8] şi în articolul mai lung *Teoreme de descompunere transfinite în structuri* care va apare mai târziu. (Dacă ne menţinem la lanţuri K nedense, singură teorema păstrării bineordonării trebue presupusă).

22° *Teorema de rafinare SKZ pentru* $\mathfrak{F}$*-resp.* $\mathfrak{F}'$*-normalitate.*

In cele ce urmează (G_{xy}), (H_{yx}) înseamnă rafinările *SKZ* liberate de termenii parazitari (G_{xy_0}), (H_{yx_0}), ale lanţurilor (G_x), (H_y) de extremităţi $\mathfrak{G}$ şi g dintre care g: primul element al structurii.

Demonstraţia care o dăm foloseşte principiul rafinării lui Schreier cu o tehnică schimbată. De aceea lanţurile au fost numite Schreier.

Pentru finit teorema a mai fost demonstrată de noi [6], în cadrul unei normalităţi înrudite cu $\mathfrak{F}'$-normalitatea [1]).

Vom folosi inducţie transfinită ascendentă prin raport cu valorile celor două lanţuri Schreier $|(G_x)|$ şi $|(H_y)|$.

---

[1]) Numită atunci « normalitate sub-unitară ». Cititorul va repara dela sine omisiunea axiomei 3 din tabloul dat atunci (p. 258).

In tot acest alineat, acolo unde normalitatea nu e precizată se înțelege atât $\mathfrak{F}$-normalitatea, cât și $\mathfrak{F}'$-normalitatea.

Lemma I. $|(G)| = 1$, $|(H_y)| \in |K|$.

Dacă (G_x), (H_y) sunt două lanțuri Schreier normale tari K, de aceleași extremități $\mathcal{G}$, g, rafinările lor SKZ sunt lanțuri Schreier normale (satisfăcând la $\alpha + \beta + \gamma$).

Demonstrație.

Lanțul (G_x) e de lungime 1, deci se reduce la $\mathcal{G} \supset g$. Constatăm că avem $(G_{xy}) = (H_y)$, $(H_{yx}) = H_y$. Concluzia se verifică banal.

Lemma II. $|(G_x)| = 2$, $|(H_y)| \in |K|$

Același enunț ca mai sus.

Demonstrație.

Cazul 1. $(H_y) =$ lanț λ_1.

Presupunem propoziția adevărată pentru toți (H_y) cu $|(H_y)| < s$ unde $s = |(H_y)|$, $s \in |K|$ oricare ar fi tipul λ_1 sau λ_2 al lui (H_λ). Ne propunem s'o verificăm pentru s.

Prin definiție, (H_y) fiind lanț λ_1, putem pune

$$\overline{y} = y_\infty - 1.$$

Insemnăm cu $(H_{y'})$ secțiunea lanțului (H_y) definită de indicii $y' < y_\infty$. Avem, ținând seamă că (H_y) e lanț Schreier normal:

$$(H_{y'}) = H_{\overline{y}} \cap (H_y),$$
$$\frac{H_\infty}{H_{\overline{y}}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{H_{\overline{y}}}{g} = \mathfrak{N}.$$

Deci aplicând cererea ε_3 putem scrie

$$|(H_{y'})| < |(H_y)| = s$$

căci $(H_{y'})$ satisface evident la $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Fie

$$\mathcal{G} \supset G_1 > g$$

lanțul Schreier, normal tare, de lungime 2 din acest caz.

Considerăm perechea de lanțuri

$$\mathcal{G} \supset (G_1 \cup H_{\overline{y}}) \supset G_1 \supset (G_1 \cap H_{\overline{y}}) \supset g, \tag{1}$$

$$\mathcal{G} \supset (G_1 \cup H_{\overline{y}}) \supset H_{\overline{y}} \supset (G_1 \cap H_{\overline{y}}) \supset g. \tag{2}$$

Conform ipotezei, avem

$$\frac{\mathcal{G}}{g} = \mathfrak{N}.$$

Ținând seamă de prima teoremă din 20° putem scrie

$$\frac{\mathcal{G}}{G_1} = \mathfrak{N}, \quad \frac{\mathcal{G}}{H_{\overline{y}}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{G_1}{g} = \mathfrak{N}, \quad \frac{H_{\overline{y}}}{g} = \mathfrak{N}. \tag{3}$$

Deci, aplicând axioma 3 (cu $D = g$) şi apoi axioma 1°:

$$\frac{\mathcal{G}}{G_1 \cup H_{\bar{y}}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{G_1 \cup H_{\bar{y}}}{g} = \mathfrak{N}. \tag{4}$$

In cazul $\mathfrak{F}$-normalităţii aplicând în (3) axioma 1, obţinem

$$\frac{G_1}{G_1 \cap H_{\bar{y}}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{H_{\bar{y}}}{G_1 \cap H_{\bar{y}}} = \mathfrak{N}. \tag{5}$$

In cazul $\mathfrak{F}'$-normalităţii, observăm că (4) şi axioma 1° ne dau

$$\frac{G_1 \cup H_{\bar{y}}}{G_1} = \mathfrak{N}, \quad \frac{G_1 \cup H_{\bar{y}}}{H_{\bar{y}}} = \mathfrak{N}.$$

Pe de altă parte primii membri din (5) transformaţi respectiv prin $\Phi^{\mathcal{G}}_{H_{\bar{y}}}$, $\Phi^{\mathcal{G}}_{G_1}$, ne dau tocmai (5′). Prin urmare, în baza axiomei 4, relaţiile (5) sunt încă valabile.

In sfârşit din $\frac{G_1}{g} = \mathfrak{N}, \frac{G_1}{G_1 \cap H_{\bar{y}}} = \mathfrak{N}, g \subset G_1 \cap H_{\bar{y}}$ în virtutea axiomei 1° comună atât lui $\mathfrak{F}$ cât şi lui $\mathfrak{F}'$, conchidem

$$\frac{G_1 \cap H_{\bar{y}}}{g} = \mathfrak{N}. \tag{6}$$

Citim pe (3), (4), (5), (6), că lanţurile (1), (2) sunt normale, cu g normal în fiecare din termeni. Pe de altă parte, lanţurile sunt finite. Conform cererilor ε_0 şi ε_1, urmează că avem în (1), (2) lanţuri Schreier, normal tari, din mulţimea K.

Din (2) extragem lanţul parţial de lungime 2:

$$H_{\bar{y}} \supset (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset g. \tag{7}$$

Conform relaţiilor de normalitate de mai sus şi cererilor ε_1, ε_0, rezultă că (7) aparţine lui K.

In virtutea ipotezei inductive lanţul (7) şi lanţul K:

$$(H_{y'}) \tag{7'}$$

admit rafinări SKZ care *sunt de asemenea lanţuri* [1]) K. Un calcul uşor arată că aceste rafinări decurg astfel:

$$H_{\bar{y}} \supset \ldots . H_{y'+1} \cup (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset H_{y'} \cup (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset \ldots . \tag{8}$$
$$\ldots \quad (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset \ldots . (G_1 \cap H_{y'}) \supset \ldots . g$$

$$H_{\bar{y}} \supset \ldots . H_{y'+1} \supset H_{y'} \cup (G_1 \cap H_{y'+1}) \supset H_{y'} \supset \ldots . g$$

Se vede că intervalul $H_{\bar{y}} \supset G_1 \cap H_{\bar{y}}$ este anulat prin secţiune de G_1, cu $\frac{\mathcal{G}}{G_1} = \mathfrak{N}$. *A fortiori*, subintervalul

$$H_{y'+1} \cup (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset H_{y'} \cup (G_1 \cap H_{\bar{y}})$$

[1]) Argumentul trebue numaidecât dat. Prin ipoteză, lanţurile (7) şi (7′), precum şi lanţurile de valoare mai mică, au rafinări Schreier, normale. Conform lemmei IV *independentă de celelalte*, rafinările rezultă Schreier, normale tari. Conform lui ε_1 şi ε_0, aceste rafinări sunt în K.

din (8) este anulat prin secțiune de G_1. Conform lui (8), axioma 0 e verificată de numitori. Aplicând axioma 2 acestui interval și lui $\frac{\mathcal{G}}{G_1}$, conchidem

$$\frac{H_{y'+1} \cup G_1}{H_{y'} \cup G_1} = \mathfrak{R}, \qquad \bar{y} > y' \geqslant y_0.$$

Având în vedere (5) și factura ultimei părți a lanțului (8), rezultă normalitatea următorului lanț

$$H_{\bar{y}} \cup G_1 \supset \ldots (H_{y'+1} \cup G_1) \supset (H_{y'} \cup G_1) \supset \ldots G_1 \supset \ldots$$
$$\ldots (H_{y'+1} \cap G_1) \supset (H_{y'} \cap G_1) \supset \ldots g$$

Să adăugăm în capătul lanțului intervalul $\frac{\mathcal{G}}{H_{\bar{y}} \cup G_1}$, normal în virtutea lui (4). Obținem lanțul normal

$$\mathcal{G} \supset \ldots . (H_{y+1} \cup G_1) \supset (H_y \cup G_1) \ldots$$
$$G_1 \supset \ldots (H_{y+1} \cap G_1) \supset (H_y \cap G_1) \supset \ldots . g \qquad (9)$$

care satisface axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$.

Adăugând în capătul lanțului (8′) intervalele normale din (2)

$$\mathcal{G} \supset (G_1 \cap H_{\bar{y}}) \supset H_{\bar{y}}$$

ia naștere lanțul normal

$$\mathcal{G} \supset \ldots H_{y+1} \supset H_y \cup (G_1 \cap H_{y+1}) \supset H_y \supset \ldots g \qquad (9')$$

care satisface evident la $\alpha + \beta + \gamma$.

Dar (9) și (9′) sunt tocmai rafinările SKZ ale lui (G_x) și (H_y) de valori $|(G_x)| = 2$, $(H_y) = s$.

In concluzie, lemma se verifică pentru lanțurile λ_1 de valoare s dacă se verifică pentru toate lanțurile λ_1 și λ_2 de valoare mai mică decât s.

Cazul 2. (H_y) = lanț λ_2.

Suprimăm din (H_y) toți termenii corespunzători subintervalului $y_\infty > \eta' > \eta$ al intervalului de tărie maxim $y_\infty > \eta' \geqslant \bar{y}$. Potrivit cererii ε_4 lanțul $(H_{y'})$ astfel obținut aparține încă mulțimii K. Dar $(H_{y'})$ e lanț λ_1, căci $\mathcal{G}$ admite anteriorul imediat H_η.

Potrivit cazului 1 de mai sus, (G_x) și $(H_{y'})$ admit rafinări $G_{xy'}$ și $H_{y'x}$ care satisfac axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$. Intr'adevăr, conform lui ε_4, avem $|(H_{y'})| \leqslant |(H_y)| = s$, semnul egal intervenind atunci când intervalul $y_\infty > \eta' > \eta$ e gol de η'.

Când η străbate întregul interval $y_\infty > \bar{y}$, rafinările $G_{xy'}$, $H_{y'x}$ se confundă cu G_{xy}, H_{yx}. Deci G_{xy} și H_{yx} satisfac la $\alpha + \beta + \gamma$.

In concluzie, lemma se verifică pentru lanțurile λ_2 de valoare s, dacă se verifică pentru toate lanțurile (λ_1 și λ_2) de valoare mai mică.

Discuția cazurilor 1 și 2 poate fi astfel rezumată:

Lemma se verifică pentru lanțurile (H_y) de valoare s dacă se verifică pentru o valoare mai mică. Dar, potrivit lemmei I, ea se verifică pentru $s = 1$.

Deci, operând inducția transfinită relativ la $s \in |K|$, lemma rezultă general valabilă.

Lemma III. $|G_x| \in |K|, |H_y| \in |K|$

Acelaşi enunţ ca al lemmei I.

Demonstraţie.

Cazul 1. (G ınţ. λ_1.

In această ipoteză x_∞ admite anteriorul imediat $\bar{x} = x_\infty - 1$. In virtutea primei teoreme din 20°, avem $\frac{G_{\bar{x}}}{g} = \mathfrak{N}$. Deci, lanţul

$$\mathfrak{G} \supset G_x \supset g \tag{10}$$

este un lanţ din K.

Punem $|(G_x)| = r$. Cazul $r = 2$ a fost tratat în lemma II, deci putem presupune $r > 2$.

Admitem ipoteza inductivă că rafinările SKZ ale lanţurilor din K pentru toţi (G_x) cu $|(G_x)| < r$ şi H_y cu $|(H_y)| \in |K|$ satisfac axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$ pentru toate tipurile λ_1, λ_2.

Conform lemmei II, lanţul (10) şi lanţul

$$(H_y) \tag{10'}$$

au rafinări SKZ, care satisfac axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$. Aceste rafinări decurg precum urmează:

$$\mathfrak{G} \supset \ldots (G_{\bar{x}} \cup H_y) \supset \ldots \tag{11}$$

$$G_{\bar{x}} \supset \ldots (G_{\bar{x}} \cap H_y) \supset \ldots g$$

$$\mathfrak{G} \supset \ldots H_{y+1} \supset H_y \cup (G_{\bar{x}} \cap H_{y+1}) \supset H_y \supset \ldots g \tag{11'}$$

Considerăm secţiunea inferioară a lui (11)

$$G_{\bar{x}} \supset \ldots (G_{\bar{x}} \cap H_y) \supset \ldots g \tag{12}$$

Acest lanţ satisface axiomelor $\alpha + \gamma$ şi deoarece $\frac{G_{\bar{x}}}{g} = \mathfrak{N}$ satisface şi axiomei β. Ceva mai mult, satisface şi axiomei δ.

Intr'adevăr, fie y^* un indice limită al lui (12), adică al lui (H_y). Să suprimăm din (H_y) toţi termenii intervalului de tărie $y^* > \eta > \eta^*$. Conform cererii ε_4 rămâne un lanţ (H_{y^*}) care face parte din K. Deci (H_{y^*}) poate înlocui în (11) şi (11') lanţul (H_y). In (H_{y^*}) însă, y^* admite anteriorul imediat η^* ($y^* = \eta^* + 1$), Prin urmare

$$\frac{G_{\bar{x}} \cap H_{y^*}}{G_{\bar{x}} \cap H_{\eta^*}} = \mathfrak{N}$$

şi anume, pentru toţi η^* din intervalul de tărie maxim $y^* > \eta^* \geqslant \bar{y}^*$.

Deci (12) satisface şi la cererea δ.

Pe de altă parte (12) provine din (H_y) prin secţionarea cu elementul $G_{\bar{x}}$ unde $\frac{\mathfrak{G}}{G_{\bar{x}}} = \mathfrak{N}$, $\frac{G_{\bar{x}}}{g} = \mathfrak{N}$. Conform cererii ε_3 lanţul (12) aparţine mulţimii K.

Fie

$$(G_{x'}) \tag{12'}$$

lanţul care naşte din lanţul (G_x) de tip λ_1, prin suprimarea termenului $\mathfrak{G}$. Pe de altă parte, evident:

$$(G_{x'}) = G_{\bar{x}} \cap (G_x), \quad \frac{\mathfrak{G}}{G_{\bar{x}}} = \mathfrak{N}, \quad \frac{G_{\bar{x}}}{g} = \mathfrak{N}$$

Deci, conform cererii ε_3 avem în $(G_{x'})$ un lanţ K, iar

$$|(G_{x'})| < |(G_x)| = r.$$

In definitiv, (12) şi (12′) realizează ipoteza inductivă. Ca atare, rafinările lor SKZ satisfac axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$ şi decurg precum urmează:

$$G_{\bar{x}} \supset \ldots (G_{\bar{x}} \cap H_y) \cup (G_{x'+1} \cap H_{y+1}) \supset (G_{\bar{x}} \cap H_y) \cup (G_{x'} \cap H_{y+1}) \supset \ldots g \quad (13)$$

$$G_{\bar{x}} \supset \ldots G_{x'} \cup (G_{x'+1} \cap H_{y+1}) \supset (G_{x'+1} \cap H_y) \supset \ldots . g \quad (13')$$

Aceste rafinări sunt lanţuri K (vezi argumentul dela lemma II, cazul 1, din nota în josul paginei 54).

Dar câtul

$$\frac{G_{\bar{x}} \cap H_{y+1}}{G_{\bar{x}} \cap H_y}$$

din (12) este anulat prin secţiune de H_y. *A fortiori* subintervalul său menţionat în (13). Dar $\frac{H_{y+1}}{H_y} = \mathfrak{N}$ iar intervalul şi subintervalul de care e vorba sunt cuprinşi în H_{y+1}. Numitorii satisfac peste tot axiomei 0. Deci putem aplica axioma 2 lui

$$\frac{H_{y+1}}{H_y} = \mathfrak{N}, \quad \frac{(G_{\bar{x}} \cap H_y) \cup (G_{x'+1} \cap H_{y+1})}{(G_{\bar{x}} \cap H_y) \cup (G_{x'} \cap H_{y+1})} = \mathfrak{N}.$$

Obţinem

$$\frac{H_y \cup (G_{x'+1} \cap H_{y+1})}{H_y \cup (G_{x'} \cap H_{y+1})} = \mathfrak{N} \qquad x' < \bar{x}, \quad (14)$$

pentru toţi $y < y_\infty$ şi $x' < \bar{x}$.

Având în vedere câturile normale

$$\frac{H_{y+1}}{H_y \cup (G_x \cap H_{y+1})} = \mathfrak{N}$$

din (11′), relaţia (14) se complectează astfel

$$\frac{H_y \cup (G_{x+1} \cap H_{y+1})}{H_y \cup (G_x \cap H_{y+1})} = \mathfrak{N},$$

$$x < x_\infty, \; y < y_\infty .$$

Această relaţie exprimă tocmai proprietatea lanţului rafinat H_{yx} de a satisface axiomei β. Axiomele $\alpha + \delta$ sunt evident verificate.

Să trecem la lanţul rafinat G_{xy}.

Intregim lanţul (13′) cu prima parte a lanţului (11):

$$\mathfrak{G} \supset \ldots (G_{\bar{x}} \cup H_y) \supset \ldots G_{\bar{x}}$$

Obţinem, evident, un lanţ care, întocmai ca (11) şi (13'), satisface la $\alpha + \beta + \gamma$:

$$\mathfrak{G} \supset \ldots G_x \cup (G_x \cap H_{y+1}) \supset G_x \cup (G_{x+1} \cap H_y) \supset \ldots g \qquad (15)$$

Dar (15) nu este altceva decât lanţul rafinat (G_{xy}).

Cazul 2. $(G_x) =$ lanţ λ_2.

Analog cazului 2 al lemmei II, suprimăm din (G_x) toţi termenii $G_{\xi'}$, corespunzători subintervalului $x_\infty > \xi' < \xi$ al intervalului de tărie maxim $x_\infty > \xi \geqslant \bar{x}$. Potrivit cererii ε_4, lanţul $(G_{x'})$ astfel obţinut aparţine încă mulţimii K.

Dar $(G_{x'})$ e lanţ λ_1, căci $\mathfrak{G}$ admite anteriorul imediat G_ξ. Potrivit cazului 1 de mai sus, lanţurile $(G_{x'})$ şi (H_y) admit rafinările $G_{x'y}$, $H_{yx'}$, care satisfac axiomelor $\alpha + \beta + \gamma$, căci, în virtutea lui ε_4, avem

$$|(G_{x'})| \leqslant |(G_x)| = r$$

Când ξ străbate intervalul maxim $x_\infty > \xi \geqslant \bar{x}$ al tăriei lui x_∞, rafinările $(G_{x'y})$, $(H_{yx'})$ se confundă cu rafinările (G_{xy}) şi (H_{yx}). Conchidem că (G_{xy}) şi (H_{yx}) satisfac la $\alpha + \beta + \gamma$.

In rezumat: lanţurile (G_x), (H_y) cu $(G_x) =$ lanţ λ_2 au rafinări care ascultă de axiomele $\alpha + \beta + \gamma$, dacă proprietatea aparţine tuturor lanţurilor (G_x), — tip λ_2 sau λ_1, — de valoare mai mică.

Intrunind rezultatele discuţiei celor două cazuri, conchidem: rafinările lui (G_x), (H_y) cu $|(G_x)| = r$ verifică $\alpha + \beta + \gamma$, dacă proprietatea are loc pentru $|(G_x)| < r$. Insă pentru $|(G_x)| = 2$, proprietatea se confundă cu lemma II.

In concluzie proprietatea e general valabilă, prin inducţie transfinită relativ la r.

L e m m a IV. Dacă rafinările SKZ ale lanţurilor K următoare: (G_x) şi (H_y), de aceleaşi extremităţi $\mathfrak{G}$, g, cât şi ale lanţurilor K de valoare mai mică, sunt normale, aceste rafinări sunt de asemenea lanţuri K.

D e m o n s t r a ţ i e . Rafinările satisfac evident la $\alpha + \gamma$ iar, prin ipoteză, axiomei β. Să arătăm că satisfac şi axiomei δ.

Considerăm lanţul G_{xy} şi fie $x^* y^*$ un indice diadic arbitrar. Avem

$$x^* < x_\infty, \qquad y^* \leqslant y_\infty$$

Considerăm următoarele cazuri.

C a z u l 1. y^* *indice elementar.*

Din rafinările (G_{xy}), (H_{yx}), termenii paraziţi G_{xy_0}, H_{yx_0} sunt prin definiţie eliminaţi, încât putem presupune $y^* > y_0$ în $G_{x^* y^*}$.

Conform ipotezei cazului de faţă, avem $y^* = \eta + 1$. In virtutea ipotezei din enunţ, lanţul (G_{xy}) e normal. Deci

$$\frac{G_{x^* y^*}}{G_{x^* \eta}} = \mathfrak{N} \qquad (16)$$

C a z u l 2. y^* *indice limită.*

Pentru acelaşi motiv ca mai sus, $y^* > y_0$. Dacă $y^* > \bar{y}$ este intervalul de tărie maxim al lui y^*, suprimăm din (H_y) — dacă mulţimea lor nu e deşartă — toţi termenii H_η, cu $y^* > \eta' > \eta \geqslant \bar{y}$. Lanţul (H_y^*) astfel obţinut este, potrivit cererii ε_4, un lanţ K de valoare $|(H_y^*)| \leqslant |(H_y)|$. In virtutea ipotezei din enunţ, rafinările SKZ ale perechii (G_x) şi (H_y^*) sunt încă normale. Fie (G_{xy}^*)

rafinarea lui (G_x). Indicele diadic x^*y^* din (G^*_{xy}) este elementar, căci admite anteriorul imediat $x^*\eta$. Deoarece (G^*_{xy}) e normal, putem scrie

$$\frac{G_{x^*y^*}}{G_{x^*\eta}} = \mathfrak{N} \tag{16'}$$

Relațiile (16) și (16') arată, într'adevăr, că lanțul (G_{xy}) e normal tare așa dar, că safisface axiomei δ. La fel, (H_{yx}) e normal tare.

In definitiv (G_{xy}), (H_{yx}) sunt lanțuri Schreier normal tari. Potrivit axiomelor ε_0 și ε_1, rezultă lanțuri K.

T e o r e m a *SKZ*. Rafinările *SKZ* a două lanțuri K de aceleași extremități $\mathcal{G}$, g, sunt încă lanțuri K.

D e m o n s t r a ț i e. Conform lemmei III lanțurile rafinate (G_{xy}), (H_{yx}) sunt lanțuri Schreier normale. Conform lemmei IV aceste lanțuri rezultă lanțuri *K. Q. E. D.*

Să întărim puțin axioma 4 a normalității $\mathfrak{F}'$, ridicând condiția ca numitorul lui $\frac{A}{B}$ să fie normal accesibil la g. In schimb, să cerem lui $\Phi^D_C\left(\frac{A}{B}\right)$ acest lucru și să dăm axiomei o enunțare independentă de 2:

4^*. Fie $\frac{D}{C} = \mathfrak{N}$, $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $D \supset A$, $C \cap A = C \cap B$, unde B poate fi normal inaccesibil la g. Dacă $\Phi^D_C\left(\frac{A}{B}\right)$ are numitor normal accesibil la g și dacă e normal, atunci și $\frac{A}{B}$ e normal.

E clar că $4^* + 2$ implică 4, încât toate concluziile noastre de până aici, valabile pentru normalitatea $\mathfrak{F}'$, sunt valabile și pentru normalitatea $\mathfrak{F}^*$ provenită din această modificare. Avem următoarea

T e o r e m ă. Dacă normalitatea este $\mathfrak{F}^*$, câtul intermediar al intervalelor din două lanțuri K de aceleași extremități e de asemenea $\mathfrak{F}^*$-normal. $\mathfrak{F}^*$ e capabilă de funcțiuni Hölder proprii (9° și 10°).

D e m o n s t r a ț i e. Fie (G_x), (H_y) lanțurile. Conform teoremei *SKZ* de mai sus, (G_{xy}) și (H_{yx}) sunt $\mathfrak{F}^*$-normale. Dacă $\frac{U}{V}$ e câtul intermediar al intervalelor $\frac{G_{x+1}}{G_x}$, $\frac{H_{y+1}}{H_y}$ (de numitori evident accesibili), câturile conjugate din cele două rafinări au, cum se știe, expresiile

$$\Phi^{G_{x+1}}_{G_x}\left(\frac{U}{V}\right), \quad \Phi^{H_{y+1}}_{H_y}\left(\frac{U}{V}\right).$$

Aceste câturi sunt (teorema *SKZ* de mai sus) normale și de numitori accesibili. Conform axiomei 4^* câtul $\frac{U}{V}$ rezultă $\mathfrak{F}^*$-normal.

In modul acesta, *normalitatea* $\mathfrak{F}^*$ devine capabilă de orice *funcţiune Hölder proprie. Pe când* $\mathfrak{F}$, numai de *funcţiuni Hölder relative.*

ИНТЕГРАЛЬНО ИЛИ ЛОКАЛЬНО ИНВОЛЮТИВНЫЕ НОРМАЛЬНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор возвращается к мысли В. Коржинека [I] для ее систематизации и применения к теоремам уплотнения Шрейера-Куроша-Цассенхауса (обозначенные ниже *SKZ*) в структурах.

§ I. *Нормальностью* называют семейство интервалов $\left(\frac{A}{B}\right)$ основной структуры Σ.

Локально-инволютивными являются *нормальности*, которые обладают следующим свойством: уплотнения *SKZ* двух произвольных (то есть трансфинитных, произвольным образом упорядоченных, следовательно без общих концов) нормальных цепей остаются нормальными.

Интегрально-инволютивными являются *нормальности*, обладающие следующим свойством: уплотнения *SKZ* двух правильно упорядоченных (направо или налево) нормальных цепей остаются всегда нормальными.

Эти нормальности снабжаются первым соотношением, названным *добавочной функцией Гельдера*, инвариантным относительно преобразования Φ_m^M соответственно Φ_n^N, введенного леммой Цассенхауса.

§ 2. Построим все локально-инволютивные нормальности в предположении, что выполняется аксиома *UK* (по именам Узкова и Коржинека; аксиома *UK* несколько отлична от первоначальной аксиомы этих авторов).

Аксиома 0. Если $\frac{A}{B}$ нормально, $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, тогда $A, B \to \sigma^{\cap}$, где $\sigma^{\cap} \subset \Sigma$ является основной полуструктурой.

Аксиома UK. Если $A_1, A_2 \in \sigma^{\cap}$, то имеется такое $B_i \to A_1 \cap A_2$, что $\frac{A_i}{B_i} = \mathfrak{N}$, $(i = 1,2)$.

Доказывают тогда, что ниже определенная *унитарная нормальность* есть локально инволютивная нормальность и что *она единственная* в рамках $0 + UK$.

Нормальность называется унитарной, когда она, кроме 0, удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Если $\frac{A}{B} = \mathfrak{N}$, $C \in \sigma^{\cap}$, то $\frac{C \cap A}{C \cap B} = \mathfrak{N}$.

2. Если $\frac{A}{B}=\mathfrak{N}$, $\frac{D}{C}=\mathfrak{N}$, $D \supset A$, то $\frac{C \cup A}{C \cup B}=\mathfrak{N}$.

Унитарная нормальность является обобщением нормальности Коринека [1] и совпадает с последней лишь в двух случаях:

1) при $\sigma^{\frown}=\Sigma$, или

2) для полного $\sigma^{\frown}$, с последним элементом.

§ 3. Говорят, что унитарная нормальность снабжена *собственной функцией Гельдера*, когда всякое унитарное нормальное частное $\frac{A}{B}=\mathfrak{N}$ связано со своим преобразованным $\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ посредством транзитивного и симметричного соотношения

$$\mathfrak{N}\left(\frac{A}{B}, \Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)\right),$$

где

$$\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{C \cup A}{C \cup B},$$

$$\frac{D}{C}=\mathfrak{N}, \frac{A}{B}=\mathfrak{N}, D \supset A.$$

Основная теорема: сопряженные частные уплотнений SKZ двух унитарно нормальных цепей связаны любой собственной функцией Гельдера, присоединенной к нормальности.

Приводятся семь примеров функций Гельдера.

§ 4. Одна из этих функций Гельдера, целость (обычная функция Гельдера), оказывается необходимой для того, чтобы вывести из уплотнения *SKZ* теорему разложения Жордана-Гельдера. Когда уплотненные цепи трансфинитны, то вывод теоремы Жордана-Гельдера использует также теорию Куроша [4] об исключении повторений.

Глубже изучая эту *обычную функцию Гельдера*, автор характеризует групповую квазинормальность Оре и ее обобщения при помощи функции Гельдера, свойственной этой нормальности: эквивалентность множеств левых классов относительно двух интервалов.

§ 5. Переходя к интегрально инволютивным нормальностям, автор вновь рассматривает нормальность Узкова [2], освобожденную от любой функции Гельдера и приспособленную к теоремам о трансфинитных разложениях, как это было им сделано в докладе в Математическом обществе в Бухаресте в 1948 г. Таким образом измененная нормальность называется *F*-нормальностью.

В структуре Σ с последним элементом $\mathfrak{S}$ рассматриваются элементы, связанные с $\mathfrak{S}$ посредством *сильно нормальных цепей* (понятие Куроша [3], которое автор освобождает от условия $G_{x^*} > G_x$; она сводится к тому, что для всякого члена G_x цепи существует G_{x^*}, для которого $x^* > x$ и $\frac{Gx^*}{G_x}=\mathfrak{N}$) *правильно упорядочено* направо. Они называются достижимыми элементами.

Тогда F-нормальность определяется следующим образом:

О. Все первые члены частных, фигурирующих в гипотезах нижеприведенных аксиом 1, 2, 3, достижимы.

1. Если $\frac{A}{B}=\mathfrak{N}$, $\frac{A}{C}=\mathfrak{N}$, то $\frac{B}{B\cap C}=\mathfrak{N}$.

2. Если $\frac{D}{C}=\mathfrak{N}$, $\frac{A}{B}=\mathfrak{N}$, $D\supset A$, то $\frac{C\cup A}{C\cup B}=\mathfrak{N}$.

3. Если $\frac{A}{B}=\mathfrak{N}$, $\frac{A}{C}=\mathfrak{N}$, то $\frac{A}{B\cup C}=\mathfrak{N}$.

Доказывается, что такая нормальность не может быть локально инволютивной (по крайней мере в уже упомянутых рамках $0+UK$).

При помощи трансфинитной индукции *устанавливается*, *что F-нормальность инволютивна* и тем самым *интегрально инволютивна*. Следовательно: две сильно F-нормальные цепи, правильно упорядоченные направо, с общими концами, из которых один — $\mathfrak{S}$, обладают уплотнениями SKZ также сильно F-нормальными, правильно упорядоченными направо.

Доказательство выявляет то, что было совершенно не очевидным, а именно, что частные двух сильно F-нормальных цепей, правильно упорядоченных направо, удовлетворяют еще лемме Цассенхауса.

Поэтому здесь же можно ввести произвольную функцию Гельдера. Сопряженные частные уплотненных цепей становятся тогда связанными этой функцией.

В этом же номере журнала имеется статья М. Бенадо, близко задевающая настоящий предмет. Путем замены в F-нормальности аксиомы 2 более слабой аксиомой, М. Бенадо удалось получить одну теорему SKZ без функций Гельдера *при конечных цепях*. Но предполагаемая им трансфинитная теорема прибегает к применению такой функции.

Таким образом все результаты автора в 1948 г. сохраняют свою актуальность. Вследствие этого автор решился опубликовать их.

§ 6. Упоминается еще построение также интегрально инволютивной нормальности для трансфинитных цепей, правильно упорядоченных налево: $\mathfrak{F}$-нормальность и его модификация $\mathfrak{F}^*$.

Нормальные цепи, составляющие предмет теоремы уплотнения SKZ особой природы: последний член g нормален к первому G (цепь Шрейера) и кроме того, они снабжены некоторой нормой.

Лемма Цассенхауса построена полностью для $\mathfrak{F}^*$ при помощи трансфинитной индукции, тогда как для $\mathfrak{F}$ она построена несовершенно (отсутствует нормальность смешанного частного $\frac{V}{U}$ Цассенхауса).

Отсюда следует, что *$\mathfrak{F}$-нормальность* допускает *собственную* функцию Гельдера. *Другая нормальность* $\mathfrak{F}$ может быть присоединена только к функциям Гельдера, *относительным* к $\mathfrak{F}$.

Общие черты доказательства ведут свое начало от Отто Шрейера: от его доказательства теоремы уплотнения. Но они претерпели глубокие изменения для их действительности в более широких аксиомных рамках и их приспособления к затруднениям, созданным рассмотрением трансфинитных цепей.

NORMALITÉS LOCALEMENT OU INTÉGRALEMENT INVOLUTIVES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur reprend une idée que W. K o ř í n e k [1] rencontra vers 1940, pour la systématiser et l'appliquer aux théorèmes de raffinement Schreier-Kourosch-Zassenhaus (indiqués plus bas par *SKZ*) dans les structures.

§ 1. On appelle *normalité* une famille d'intervalles $\left(\frac{A}{B}\right)$ de la structure fondamentale Σ.

Les *normalités localement involutives* sont celles dont les raffinements *SKZ* de deux chaînes normales quelconques (c'est-à-dire: transfinies, arbitrairement ordonnées, voire sans extrémités communes) restent normales.

Les *normalités intégralement involutives* sont celles dont les raffinements *SKZ* de deux chaînes normales bien ordonnées (à droite ou à gauche) restent toujours normales.

On pourvoit ces normalités d'une première relation appelée *fonction de Hölder annexe*, invariante par rapport à la transformation Φ_m^M resp. Φ_n^N induite par le lemme de Zassenhaus.

§ 2. On se propose de construire toutes les normalités localement involutives dans l'hypothèse qu'on appelle *UK* du nom de U z k o v et de K o ř í n e k, mais qui diffère de l'axiome originaire de ces auteurs.

Axiome 0. Si $\frac{A}{B}$ est normal, $\frac{A}{B} = \mathfrak{A}$, alors $A,\ B \to \sigma^{\frown}$ où $\sigma^{\frown} \subset \Sigma$ est la semistructure fondamentale.

Axiome UK. Si $A_1,\ A_2 \in \sigma^{\frown}$, alors il existe un $B_i \to A_1 \cap A_2$ tel que $\frac{A_i}{B_i} = \mathfrak{A}$, $(i = 1,\ 2)$.

On démontre alors que la *normalité unitaire*, définie ci-dessous, *est* une normalité localement involutive et que, dans le cadre $0 + UK$, *c'est la seule*.

Une *normalité* est dite *unitaire* si elle satisfait, en dehors de 0, aux axiomes suivants:

1. Si $\frac{A}{B} = \mathfrak{A}$, $C \in \sigma^{\frown}$ alors $\frac{C \cap A}{C \cap B} = \mathfrak{A}$.

2. Si $\frac{A}{B} = \mathfrak{A}$, $\frac{D}{C} = \mathfrak{A}$, $D \supset A$ alors $\frac{C \cup A}{C \cup B} = \mathfrak{A}$.

Elles représentent une généralisation de la normalité *K* de Kořínek [1] et se confond avec celle-ci dans deux cas seulement:

1) pour $\sigma^{\frown} = \Sigma$, ou bien

2) pour $\sigma^{\frown}$ complète, à dernier élément.

§ 3. On dit qu'une normalité unitaire est pourvue d'une *fonction Hölder propre* si tout quotient unitairement normal $\frac{A}{B} = \mathfrak{A}$ est lié à sa transformée

$\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)$ par une relation symétrique et transitive

$$\mathfrak{R}\left(\frac{A}{B},\ \Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)\right)$$

où

$$\Phi_C^D\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{C\cup A}{C\cup B}$$

$$\frac{D}{C}=\mathfrak{N},\ \frac{A}{B}=\mathfrak{N},\ D\supset A.$$

Le théorème principal est ici: *les quotients conjugués des raffinements SKZ de deux chaînes unitairement normales sont liés par toute fonction Hölder propre, attachée à la normalité.*

On donne sept exemples de fonction Hölder.

§ 4. Une de ces fonctions Hölder, l'intégrité (la fonction Hölder usuelle), s'avère indispensable pour déduire du raffinement *SKZ* un théorème de décomposition Jordan-Hölder. Si les chaînes raffinées sont transfinies, la production d'un théorème Jordan-Hölder relève aussi de la théorie de Kourosch [4] sur le bannissement des répétitions.

En approfondissant cette *fonction Hölder usuelle*, l'Auteur parvient à caractériser la quasi-normalité groupale de Ore et ses généralisations à l'aide de la fonction Hölder propre à cette normalité: l'équivalence des ensembles de classes résiduelles (gauches) relativement à deux intervalles.

§ 5. En passant aux normalités intégralement involutives, l'Auteur considère de nouveau la normalité de U z k o v [2] débarrassée de toute fonction Hölder et orientée vers les théorèmes de décompositions transfinies, ainsi qu'il le fit dans une communication à la Société Mathématique de Bucarest en 1948. La normalité ainsi modifiée est appelée *F*-normalité.

Dans une structure Σ à dernier élément $\mathcal{G}$, on considère les éléments liés à $\mathcal{G}$ par des *chaînes normales fortes* (notion de Kourosch[3] que l'Auteur allège de la condition $G_{x^*} > G_x$; elle revient à poser que pour tout terme G_x de la chaîne, il existe un G_{x^*} tel que $x^* > x$, et de sorte que $\frac{G_{x^*}}{G_x}=\mathfrak{N}$) *bien ordonnées* à droite. On les nomme les *éléments accessibles.*

Dès lors on définit la *F*-normalité comme suit:

0. Tous les premiers termes des quotients, figurant dans les hypothèses des axiomes 1, 2, 3 ci-dessous, sont accessibles.

1. Si $\frac{A}{B}=\mathfrak{N},\ \frac{A}{C}=\mathfrak{N}$ alors $\frac{B}{B\cap C}=\mathfrak{N}$

2. Si $\frac{D}{C}=\mathfrak{N},\frac{A}{B}=\mathfrak{N},\ D\supset A$ alors $\frac{C\cup A}{C\cup B}=\mathfrak{N}$

3. Si $\frac{A}{B}=\mathfrak{N},\ \frac{A}{C}=\mathfrak{N}$ alors $\frac{A}{B\cup C}=\mathfrak{N}$.

On démontre qu'une telle normalité ne saurait être localement involutive (au moins dans le cadre déjà mentionné $0+UK$).

On établit, à l'aide de l'induction transfinie, *que la F-normalité est involutive* et, par cela, *intégralement involutive*. C'est-à-dire: deux chaînes F-normales fortes, bien ordonnées à droite, aux extrémités communes, dont l'une est l'élément $\mathcal{G}$, possèdent des raffinements SKZ pareillement F-normales fortes et bien ordonnées à droite.

La démonstration met en évidence le fait, nullement évident, que les quotients des deux chaînes F-normales fortes, bien ordonnées, à droite, vérifient encore le lemme de Zassenhaus.

On peut donc introduire ici-même une fonction Hölder arbitraire. Les quotients conjugués des chaînes raffinées apparaissent alors liés par cette fonction.

Dans le même numéro de cette revue se trouve un article de M. B e n a d o qui touche de près à notre sujet. M. B e n a d o, en remplaçant dans la F-normalité l'axiome 2 par un axiome plus faible, est parvenu récemment à un théorème SKZ sans fonction Hölder *pour les chaînes finies*. Mais le théorème transfini qu'il propose requiert l'emploi d'une telle fonction.

Ainsi les résultats de 1948 de l'Auteur gardent toute leur actualité. C'est pourquoi il s'est décidé à les publier.

§ 6. Soit dit encore, avant de clore, qu'il a construit aussi une normalité intégralement involutive pour les chaînes transfinies, bien ordonnées à gauche: la $\mathcal{F}$-normalité et sa modification $\mathcal{F}^*$.

Les chaînes normales qui font l'objet du théorème de raffinement SKZ sont d'une nature particulière: le dernier terme g est normal au premier $\mathcal{G}$ (chaînes de Schreier) et, en outre, elles sont pourvues d'une certaine valorification.

Le lemme de Zassenhaus se trouve complètement construit, à l'aide de l'induction transfinie, pour $\mathcal{F}^*$, tandis que pour $\mathcal{F}$ il n'est qu'imparfaitement construit (en moins: la normalité du quotient croisé $\frac{V}{U}$ de Zassenhaus).

Il s'ensuit que *la $\mathcal{F}^*$-normalité* est capable de fonctions Hölder *propres*. *L'autre normalité* $\mathcal{F}$ peut être associée seulement à des fonction Hölder *relatives* à $\mathcal{F}$.

Les grandes lignes de la démonstration remontent à O t t o S c h r e i e r: à sa démonstration du théorème du raffinement. Mais elles ont subi de profonds changements pour les faire valoir dans un cadre axiomatique plus large et les adapter aux difficultés que soulève la considération des chaînes transfinies.

BIBLIOGRAFIE

1. V. K o ř í n e k, Vestnik. Kral. Českе Spol. Nauk, 1941, v. XIV, p. 1 — 29.
2. A. I. U z k o v, Recueil math. Moscou, serie nouă, 1938, t. 4, Nr. 46, p. 31 — 43.
3. A. G. C u r o ş, Matem. Sbornic, 1945, t. 16, Nr. 58, p. 59 — 72.
4. D. B a r b i l i a n, Disq. Math. et Phys., 1946, v. V, fasc. 1 — 4, p. 3 — 63.
5. A. H. L i f ş i ţ, Matem. Sbornic, 1949, t. 24, Nr. 66, p. 227 — 235.
6. D. B a r b i l i a n, Disq. Math. et Phys., 1947, t. VI, fasc. 1 — 4, p. 243 — 262.
7. — Curs de teoria grupurilor şi structurilor. 1950—51. Fac. de Mat. şi Fiz. Autografiat.
8. — Curs de Algebră Axiomatică. 1948—49. Fac. de Mat. şi Fiz. Autografiat.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

TEORIA ABSTRACTĂ A RELAŢIILOR DE NORMALITATE

DE

MIHAIL BENADO

INTRODUCERE

In două lucrări anterioare [1], [2], am cercetat problema descompunerii de tipul Jordan - Hölder a sistemelor algebrice după şirurile lor *principale* respectiv *normale*, în cadrul normalităţilor α şi β ale lui O. Ore [10]; în prezenta lucrare, adâncim problema descompunerii de tipul menţionat în cadrul teoriei abstracte a normalităţilor.

Algebristul rus A. I. Uzcov [3] este, se pare, primul care a introdus şi studiat în legătură cu condiţiile de valabilitate ale teoremei Schreier-Zassenhaus, *relaţia abstractă de normalitate* ce-i poartă numele şi căreia îi impune această restricţie preliminară:

$\mathfrak{A}$. Dacă $x, y \in S$, există $\omega \in S$ cu $\omega \leqq x \wedge y$ şi astfel ca x/ω, y/ω să fie *simultan* câturi normale.

In cadrul cererii $\mathfrak{A}$, Uzcov întreprinde axiomatizarea următoarei propoziţii, pe care o vom numi aici ipoteza $(SZ)_1$ a lui Uzcov.

$(SZ)_1$. Două lanţuri *normale cu extremităţi comune* posedă rafinări Zassenhaus încă *normale* şi astfel ca *structurile câturilor conjugate* să fie *direct isomorfe* (în sensul lui Uzcov) cu structura *câtului intermediar al lui Zassenhaus respectiv asociat.*

Ulterior, Kořínek [4], slăbeşte cererea $\mathfrak{A}$ până la următoarea:

$\mathfrak{K}$. Dacă $x, y \in S$, există $\omega \in S$ cu $\omega \leqq y$ şi astfel ca x/ω să fie normal.

In cadrul cererii $\mathfrak{K}$, Kořínek întreprinde axiomatizarea următoarei propoziţii, pe care o vom numi ipoteza $(SZ)_2$ a lui Kořínek:

$(SZ)_2$. Două lanţuri *normale (nu numaidecât cu extremităţi comune)*

$$\begin{aligned} a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \ldots \geqq a_r \\ b_0 \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s \end{aligned} \tag{I}$$

se transformă, prin mijlocirea lui Zassenhaus

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)\,, \; i = 1,2, \ldots, r\,; j = 0, 1, 2, \ldots s \\ b_{ji} &= b_j \vee (b_{j-1} \wedge a_i)\,, \; i = 0,1,2,\ldots, r\,; j = 1,2, \ldots s, \end{aligned} \tag{II}$$

în două lanţuri în care *sublanţurile*

$$a_{i0} \geqq a_{i1} \geqq \ldots \geqq a_{is} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{III}$$

$$b_{j0} \geqq b_{j1} \geqq \ldots \geqq b_{jr} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, s \tag{IV}$$

sunt *încă normale*, iar câturile conjugate $a_{i,j-1}/a_{ij}$, $b_{j,i-1}/b_{ji}$ sunt *direct asemenea*, cu câtul intermediar asociat S_{ij}/T_{ij} *.

In sfârşit, L i f ş i ţ [5] întreprinde axiomatizarea *completă* (aşa dar fără a impune relaţiei de normalitate nicio restricţie preliminară) a următoarei propoziţii, pe care o vom numi ipoteza $(SZ)_3$ a lui Lifşiţ.

$(SZ)_3$. Două lanţuri normale (I) se transformă prin intercalării (II) în două lanţuri în care sublanţurile (III), (IV) sunt *încă normale*, iar câturile conjugate $a_{i,j-1}/a_{ij}$, $b_{j,i-1}/b_{ji}$ sunt cu structuri isomorfe structurii câtului intermediar *normal* S_{ij}/T_{ij} [1]).

Pentru a putea compara propoziţiile $(SZ)_i$, $i=1,2,3$, vom presupune că în toate trei, natura relaţiei dintre câturile conjugate şi câtul intermediar asociat S_{ij}/T_{ij} (presupus, în plus, *normal* în cazul lui $(SZ)_3$) este aceea din teorema fundamentală a lui K o ř í n e k [2]). Vom nota cu $(SZ)_1^*$, $(SZ)_2^*$, $(SZ)_3^*$ propoziţiile $(SZ)_1$, $(SZ)_2$, $(SZ)_3$ astfel amendate şi cu $\mathfrak{N}_1^*$, $\mathfrak{N}_2^*$, $\mathfrak{N}_3^*$, relaţiile de normalitate corespunzătoare respectiv propoziţiilor $\mathfrak{A} + (SZ)_1^*$, $\mathfrak{K} + (SZ)_2^*$, $(SZ)_3^*$.

Conform unei observaţii a lui L i f ş i ţ [5] urmează că axioma $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în cadrul $\mathfrak{K} + (SZ)_2^*$; pe de altă parte, este clar că propoziţia $(SZ)_2^*$ implică propoziţia $(SZ)_1^*$. In definitiv, rezultă că $\mathfrak{A} + (SZ)_1^*$ este o consecinţă a lui $\mathfrak{K} + (SZ)_2^*$.

Incât, dacă notăm cu $\sqsubset$ relaţia de incluziune logică între relaţiile de normalitate ($R_1 \sqsubset R_2$ înseamnă: relaţia R_1 implică relaţia R_2) avem, potrivit concluziei precedente

$$\mathfrak{N}_2^* \sqsubset \mathfrak{N}_1^* . \tag{V}$$

Pe de altă parte, este clar că propoziţiile $\mathfrak{K} + (SZ)_2^*$ implică propoziţia $(SZ)_2^*$. Aşa dar

$$\mathfrak{N}_2^* \sqsubset \mathfrak{N}_3^* . \tag{VI}$$

Normalităţile $\mathfrak{N}_1^*$ şi $\mathfrak{N}_3^*$ nu au în general niciun raport de incluziune logică; putem scrie însă:

$$(SZ)_3^* \sqsubset (SZ)_1^* .$$

---

*) $S_{ij}/T_{ij} = a_{i-1} \wedge b_{j-1}/a_{i-1} \wedge b_j) \vee (b_{j-1} \wedge a_i)$

1) Propoziţia $(Sz)_3$ este identic verificată de normalitatea grupală ordinară şi de quasi-normalitatea lui Ore.

2) Se pare că este vorba de isomorfismul de structură; deoarece nu cunoaştem lucrarea lui K o ř í n e k decât după referatul lui K ö t h e din Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, v. 67_1, 1941, p. 86, nu putem decide. Adăugăm că lucrarea lui U z c o v o cunoaştem de asemenea numai după referatul lui Z a s s e n h a u s din Zentralblatt für Mathematik, 1939, v. 20, p. 206.

Adăugăm că, atât axiomatizarea lui Kořínek, cât şi aceea a lui Lifşiţ, care continuă pe a lui Kořínek, se deosebesc de aceea a lui Uzcov, prin faptul că ele sunt întreprinse oarecum înafară de cadrul firesc al teoremei Schreier-Zassenhaus: lanţuri (normale) *cu extremităţi comune* [1]). Această concluzie rezultă din examinarea sistemelor de axiome propuse respectiv de Uzcov, Kořínek şi Lifşiţ: noţiunea de *accesibilitate normală (Auserreichbarkeit)*, care joacă un rol esenţial în axiomatizarea lui Uzcov, nu intervine în aceea a lui Kořínek şi nici în aceea a lui Lifşiţ. Această împrejurare face ca eficacitatea axiomelor lui Kořínek *(a fortiori*, eficacitatea axiomelor lui Lifşiţ), să fie mai redusă atunci când e vorba de a adânci proprietăţile normalităţilor uzuale (normalităţile lui Ore etc.).

Cu toate acestea, în axiomatizarea lui Kořínek apare, pentru prima dată, ideea de a se face o deosebire netă între partea ipotezei *SZ* privitoare la normalitatea lanţurilor rafinate şi partea privitoare la asemănarea căturilor conjugate; această distincţie importantă nu este reluată de Lifşiţ.

Teoria relaţiilor de normalitate, pe care o propunem în prezenta lucrare, are ca punct de plecare echivalenţa logică dintre o anume formă a teoremei Schreier-Zassenhaus (3°) şi condiţiile lui Uzcov *într'o anume formulare a noastră mai generală*; această echivalenţă logică este stabilită în cadrul următoarei slăbiri a cererii $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{V}$. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b *câturi normale*; *atunci există* $\omega \in S$ *cu* $\omega \leqq a \wedge b$ *şi astfel ca* a/ω, b/ω *să fie simultan câturi normale.*

Cererea noastră $\mathfrak{V}$ nu implică în mod obligatoriu cererea $\mathfrak{A}$, dar este implicată de aceasta, iar cu $\mathfrak{K}$ nu are niciun raport de incluziune logică; este clar, de asemenea că, α - normalitatea, seminormalitatea şi binormalitatea verifică cererea $\mathfrak{V}$.

Cu ajutorul sistemului nostru de axiome al normalităţii $\mathfrak{V}$ întreprindem o clasificare a normalităţilor $\mathfrak{V}$ în cadrul căreia generalizăm unele rezultate ale noastre din [2], precum şi rezultatul principal al lui Uzcov; totodată, enunţăm un al doilea sistem de axiome pentru normalitatea $\mathfrak{V}$. Toate aceste probleme sunt analizate în capitolul I.

In capitolul II, facem aplicaţia rezultatelor obţinute la normalităţile lui Ore. In această parte dăm, între altele, condiţii necesare şi suficiente pentru ca o β - normalitate să conducă la teoreme Schreier şi generalizăm noţiunea de binormalitate introdusă în [2] definind $\mathfrak{V}_\beta^0$ - normalitatea şi arătând că pentru aceasta se poate încă demonstra o teoremă Schreier-Zassenhaus completă. Capitolul se încheie cu producerea unui exemplu nebanal de element α — normal care *nu* este şi β — normal şi de element β — normal care *nu* este şi α — normal.

In capitolul III al lucrării noastre, generalizăm mai departe normalitatea $\mathfrak{V}$, introducând normalitatea $\mathfrak{V}$ *relativă* în cadrul căreia demonstrăm o teoremă de rafinare de tipul aceleia demonstrate în lucrarea [2] pentru α - normalitate.

---

[1]) Indepărtarea cererii ca lanţurile normale să aibă extremităţi comune, are, un efect limitativ asupra generalităţii relaţiei de normalitate care verifică o ipoteză (*SZ*) (nota 1 dela p. 170). Incât e preferabil să căutăm a lărgi o anume cerere preliminară, de exemplu $\mathfrak{A}$ impusă relaţiei de normalitate: e tocmai ceea ce a făcut Kořinek, dar e probabil că cererea sa preliminară $\mathfrak{K}$ e mult prea largă pentru a putea renunţa la îndepărtarea cererii ca lanţurile normale să aibă extremităţi comune.

Lucrarea se încheie cu un *Apendice* în care tratăm diferite alte probleme de teoria normalităţii şi generalizăm rezultate ale noastre din lucrarea [1].

Tehnica demonstraţiilor are la bază noţiunea de conexiune monotonă (mixtă) introdusă şi folosită sistematic în [1], [2]; notaţiile sunt în general cele din [1].

CAPITOLUL I

NORMALITATEA $\mathfrak{V}$

§ 1. Proprietăţi generale

1° *Noţiunea de complex MS.* Fie $\mathfrak{S}$ o mulţime parţial ordonată, & o relaţie binară *transitivă* ce are loc între elementele anumitor perechi $a, b, \in \mathfrak{S}$ cu $a \geqslant b$: $a \,\&\, b$.

Dacă $\Omega \in \mathfrak{S}$, atunci mulţimea $\mathfrak{M}$ a tuturor $a \in \mathfrak{S}$ cu $a \leqq \Omega$ şi cu $\Omega \,\&\, a$ se va numi un *complex MS* (relativ la Ω) dacă şi numai dacă următoarele cereri sunt verificate:

1) Dacă $a, b \in \mathfrak{M}$, atunci există cel puţin un $c \in \mathfrak{M}$ cu $c \leqq a, c \leqq b$;

2) Pentru fiecare c din 1), avem $a \,\&\, c$ şi $b \,\&\, c$.

Din 1) şi 2) rezultă imediat că avem

$$\Omega \,\&\, c$$

Este clar că axioma 1) e de aceeaşi natură cu Moore-Smith pentru mulţimi parţial ordonate, în timp ce axioma 2) este de aceeaşi natură cu cererea $\mathfrak{V}$.

Introducem acum o relaţie N « de normalitate » prin cererea: *dacă* aNb *atunci* $b \leqq a$ (pentru aNb vom scrie în mod curent a/b = normal).

Fie $\Omega \in \mathfrak{S}$; considerăm mulţimea $\mathfrak{M}$ a tuturor elementelor $x \in \mathfrak{S}$ care sunt legate de Ω prin câte un lanţ normal finit [1]. Vom spune că Ω *este normal şi finit accesibil* din fiecare $x \in \mathfrak{M}$, ceea ce arătăm prin relaţia $\Omega \,//\, x =$ = normal, $x \in \mathfrak{M}$.

2° Teoremă. Dacă o relaţie de normalitate satisface la cererea $\mathfrak{V}$, atunci mulţimea $\mathfrak{M}$ *a tuturor elementelor din care un element* $\Omega \in \mathfrak{S}$ *este normal şi finit accesibil, este un complex MS.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathfrak{M}$ adică $\Omega \,\&\, x$, $\Omega \,\&\, y$ sau încă

$$\Omega \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \ldots \geqq a_r = x$$

$$\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s = y,$$

lanţurile fiind normale. Pentru a demonstra teorema, vom folosi un raţionament prin inducţie finită (mai întâi în raport cu j, apoi în raport cu i).

Pentru $i=1$ şi $j=1$ există, *conform cererii* $\mathfrak{V}$, un $\omega_{11} \in \mathfrak{S}$ cu $\omega_{11} \leqslant a$, $\omega_{11} \leqslant b$ şi cu $a \,/\, \omega_{11}$ = normal $b \,/\, \omega_{11}$ = normal; prima treaptă a recurenţei este deci asigurată.

Să presupunem dar că teorema este adevărată pentru $i=1$ şi pentru toţi indicii j mai mici decât un indice fix (dar arbitrar ales) j cu $j>1$ şi să demonstrăm în acest caz că este adevărată pentru $i=1$ şi acel j.

---

[1] In particular, admitem că Ω / Ω = normal.

Prin ipoteza recurenței, există lanțurile *normale*

$$\left.\begin{aligned} &\Omega \geqq a_1 \geqq \omega_{11} \geqq \omega_{12} \geqq \ldots \geqq \omega_{1,j-1} \\ &\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq \omega_{1,j-1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Or, din $b_{j-1} / \omega_{1,\ j-1}$ = normal și b_{j-1} / b_j = normal, rezultă conform cu $\mathfrak{P}$, că există $\omega_{1j} \in \mathfrak{S}$ cu $\omega_{1j} \leqq b_j$, $\omega_{1j} \leqq \omega_{1,\ j-1}$ și cu b_j / ω_{1j} = normal și $\omega_{1,\ j-1} / \omega_{1j}$ = normal. Avem deci lanțurile *normale*:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega \geqq a_1 \geqq \omega_{11} \geqq \omega_{12} \geqq \ldots \geqq \omega_{1,j-1} \geqq \omega_{1j} \\ &\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \omega_{1j} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

și din (2) rezultă, conform cu (1), că prima parte a recurenței funcționează.

Să admitem acum că teorema este adevărată pentru toți indicii i mai mici decât un indice fix (dar arbitrar ales) i și pentru orice $j=1, 2, \ldots, s$; să arătăm atunci că teorema este adevărată pentru orice $i=1, 2, \ldots, r$ și orice $j=1, 2, \ldots, s$.

Or, conform ipotezei celei de a doua recurențe există lanțurile *normale*

$$\begin{aligned} &\Omega \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq \omega_{i-1,1} \geqq \omega_{i-1,2} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j} \\ &\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \leqq b_j \geqq \omega_{1j} \geqq \omega_{2j} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j} \end{aligned} \tag{1'}$$

Considerând lanțurile normale

$$a_{i-1} \geqq a_i$$

$$a_{i-1} \geqq \omega_{i-1,1} \geqq \omega_{i-1,2} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j}$$

și aplicându-le rezultatul din prima recurență (aici a_{i-1} are rolul lui Ω, a_i pe al lui a_1, iar lanțul $a_{i-1} \geqq \omega_{i-1,1} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j}$ ține locul lanțului $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots b_j$!) deducem existența lanțurilor *normale*:

$$a_{i-1} \geqq a_i \geqq \omega_{i1} \geqq \omega_{i2} \geqq \ldots \geqq \omega_{ij}$$

$$a_{i-1} \geqq \omega_{i-1,1} \geqq \omega_{i-1,2} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j} \geqq \omega_{ij}.$$

Din aceste înfășurări urmează imediat existența lanțurilor normale

$$\begin{aligned} &\Omega \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \omega_{i1} \geqq \omega_{i2} \geqq \ldots \geqq \omega_{ij} \\ &\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_j \geqq \omega_{1j} \geqq \omega_{2j} \geqq \ldots \geqq \omega_{i-1,j} \geqq \omega_{ij}. \end{aligned} \tag{2'}$$

Din (2') urmează, conform cu (1'), că a doua parte a recurenței funcționează de asemenea.

Cu aceasta, teorema este demonstrată. Din demonstrație mai rezultă, reexaminând procesul celor două recurențe, că avem intervalele *normale*

$$\omega_{i-1,j} \geqq \omega_{ij},\ \omega_{i,j-1} / \omega_{ij}$$

pentru orice $i=1, 2, \ldots, r$ și orice $j=1, 2, \ldots, s$ (punând $\omega_{0j} = b_j$, $\omega_{i0} = a_i$).

Observație importantă. Este clar că, în demonstrația teoremei precedente, operațiile de structură $\vee$, $\wedge$ nu au intervenit nicăieri teorema în chestiune este deci valabilă pentru mulțimi parțial ordonate arbitrare, în care se poate defini, pentru anumite perechi de elemente, o relație verificând cererea $\mathfrak{P}$.

3° *Ipoteza SZ şi condiţiile lui Uzcov.* Ipoteza *SZ* nu este altceva decât teorema Schreier-Zassenhaus considerată aici ca axiomă; o enunţăm sub forma următoare:

Ipoteza SZ. Două lanţuri *normale cu extremităţi comune* se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanţuri *încă normale*, în care *câturile conjugate* sunt *direct asemenea (în sensul lui Ore)* cu *câtul intermediar* al lui Zassenhaus, corespunzător.

Teorema noastră Schreier-Zassenhaus din 12° este totuşi mai bogată în conţinut decât aserţiunea cuprinsă în enunţul precedent.

Condiţiile lui Uzcov, în formularea dată de noi [1]), sună astfel:

I. Fie $\Omega \geqq a, \Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b câturi normale, atunci:

I_1. $\Omega/a \vee b$ este un cât normal; I_2. Câturile $a/a \wedge b$, $b/a \wedge b$ sunt de asemenea normale.

II. Fie $\Omega \geqq a, \Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b *câturi normale*; fie de asemenea conexiunea monotonă mixtă $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ şi schema

$$(*)\quad \begin{cases} a \vee b \geqq a \vee p' \geqq a, & \chi(p) = b \wedge p,\ p \in a \vee b/a \\ b \geqq p' \geqq a \wedge b, & \varphi(p') = a \vee p',\ p' \in b/a \wedge b, \end{cases}$$

unde b/p' este un *cât normal*. Atunci:

II_1. *Elementul p' este perfect în această conexiune*: $\chi\varphi(p') = p'$

II_2. *Câtul* $\varphi(b)/\varphi(p') = a \vee b/a \vee p'$ *este normal.*

Slăbirea introdusă de noi în condiţiile *originare* ale lui Uzcov se citeşte în enunţul axiomelor II. La U z c o v, condiţia Ω/b = normal din axiomele II este înlocuită cu condiţia *mai tare* $\Omega//b$ = normal (1°); în plus, cererea II_1 este întărită *corespunzător* până la $II_1 + II_{1'}$ unde $II_{1'}$, are (în notaţiile noastre) următorul enunţ: $II_{1'}$. *Dacă* $a \vee b \geqq p \geqq a$ *cu* $a \vee b/p =$ *= normal, atunci* $\varphi\chi(p) = p$ *cu* χ, φ din $(*)$.

In cele ce urmează, vom demonstra echivalenţa logică între ipoteza *SZ* şi condiţiile lui Uzcov I + II.

§ 2. Echivalenţa logică între ipoteza SZ şi condiţiile lui Uzcov

Vom arăta, mai întâi, că ipoteza *SZ* implică condiţiile lui Uzcov I + II.

4° L e m ă. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* Ω/a, Ω/b *câturi normale*; *atunci câturile* $a \vee b/a$, $a \vee b/b$, $a/a \wedge b$, $b/a \wedge b$ *sunt de asemenea normale.*

D e m o n s t r a ţ i e. Intr'adevăr, conform axiomei noastre $\mathfrak{V}$, există $\omega \in S$ cu $\omega \leqq a \wedge b$ astfel ca a/ω, b/ω să fie simultan câturi normale. Aplicând ipoteza *SZ* lanţurilor normale

$$\Omega \geqq a \geqq \omega, \quad \Omega \geqq b \geqq \omega,$$

deducem că lanţurile

$$\Omega \geqq a \vee b \geqq a \geqq a \wedge b \geqq \omega$$
$$\Omega \geqq a \vee b \geqq b \geqq a \wedge b \geqq \omega$$

sunt încă normale, ceea ce demonstrează lema.

---

[1]) In această formulare, se presupune, tacit, că $\Omega \in S$ este arbitrar în S, ceea ce, firește, constituie o restricţie; Prof. D. B a r b i l i a n ne-a atras atenţia că se poate îndepărta această restricţie, cerând ca axiomele I + II să se verifice *numai* pentru acei Ω legaţi prin lanţuri normale finite de un anume Ω_0 cu $\Omega_0 \geq \Omega$ (*ales odată pentru totdeauna*).

4° bis. Lemă. Fie $\Omega \geqq a' \geqq a$ *cu* $\Omega/a =$ *normal şi* $\Omega//a' =$ *normal, atunci* a'/a *este de asemenea cât normal.*

Demonstraţie. Intr'adevăr, conform cu 2°, există $\omega \in S$ cu $\omega \leqq a$, $\omega \leqq a'$ şi astfel ca $a'/\omega =$ normal şi $a//\omega =$ normal. Aplicând ipoteza *SZ*, rezultă atunci imediat $a'/a =$ normal; *q.e.d.*

5° Lemă. *Fie* $\Omega \geqq a, \Omega \geqq b$ *cu* Ω/a, Ω/b *câturi normale; fie de asemenea* p' *cu* $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ *şi astfel ca* $b/p' =$ *normal.*

Atunci p' *este perfect în conexiunea monotonă mixtă* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ *şi în plus avem* $a \vee b/a \vee p' =$ *normal.*

Demonstraţie. Intr'adevăr conform, cu lemele 4° şi 4° bis, aplicate înfăşurărilor $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ avem lanţurile normale

$$\Omega \geqq a \vee b \geqq a \geqq a \wedge b$$

$$\Omega \geqq a \vee b \geqq b \geqq p' \geqq a \wedge b.$$

Aplicând acestor lanţuri normale ipoteza *SZ*, deducem în particular că $a \vee b/a \vee p'$ şi b/p' (aşa dar, câturile lui Zassenhaus asociate câturilor normale $a \vee b/a, b/p'$) sunt câturi normale şi că fiecare dintre ele este direct asemenea cu câtul intermediar, b/p', corespunzător (avem evident $(a \vee b) \wedge b/[(a \vee b) \wedge p'] \vee (a \wedge b) = b/p'$). Rezultă că avem $b \wedge (a \vee p') = p'$ ceea ce arată că p' este perfect în conexiunea monotonă $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

Cu aceasta, lema este demonstrată.

Observaţie. Lemele precedente sunt, în esenţă, ale lui Uzcov (concluzia lemei din 5° este dată de Uzcov sub o formă mai tare în ceea ce priveşte normalitatea câtului $a \vee b/a \vee p'$). Demonstraţiile au fost reconstituite de noi.

6° Teoremă. *In cadrul axiomei preliminare* $\mathfrak{P}$, *ipoteza SZ implică condiţiile lui Uzcov* I + II.

Rezultă imediat din lemele 4°, 4° bis, 5°.

Vom arăta acum că reciproc, condiţiile lui Uzcov implică ipoteza *SZ*.

7° Lemă. *Fie* $\Omega \geqq x$, $\Omega \geqq y$ *două intervale astfel ca* $\Omega//x =$ normal, $\Omega//y =$ normal; *atunci există* $\omega \in S$ *cu* $\omega \leqq x \wedge y$ *astfel ca* $x/\omega =$ normal, $y/\omega =$ normal.

Această lemă este în realitate un caz particular, dar remarcabil, al teoremei din 2°; vom arăta, într'adevăr, că aici putem lua $\omega = x \wedge y$ [1]).

Demonstraţie. Fie, conform ipotezei

$$\Omega = a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \ldots \geqq a_r = x$$

$$\Omega = b_0 \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s = y,$$

cele două lanţuri normale care leagă pe Ω de x şi de y.

Să arătăm, mai întâi, că $b_j/a_1 \wedge b_j$ este un cât normal ($j = 1, 2, \ldots, s$); într'adevăr, conform cu axioma I_2, câtul $b_1/a_1 \wedge b_1$ este normal, deci prima treaptă a recurenţei ($j = 1$) este asigurată.

Să admitem deci că $b_{j-1}/a_1 \wedge b_{j-1}$ este normal şi să arătăm că $b_j/a_1 \wedge b_j$ este de asemenea; or, b_{j-1}/b_j este normal şi cum am presupus că $b_{j-1}/a_1 \wedge b_{j-1} =$

[1]) Lema 7° aparţine (mai puţin forma enunţului) lui Uzcov; demonstraţia a fost reconstituită de noi.

normal, urmează pe baza aceleiaşi axiome I_2 că $b_j/(a_1 \wedge b_{j-1}) \wedge b_j$ este cât normal. Recurenţa funcţionează deci pentru orice $j = 1, 2, \ldots, s$.

Fireşte că putem scrie în mod analog $a_i/b_1 \wedge a_i$ = normal pentru orice $i = 1, 2, \ldots, r$.

Aşa fiind, să aplicăm din nou I_2 înfăşurărilor normale:

$$b_{j-1} \geqq b_j\,,\quad b_{j-1} \geqq a_1 \wedge b_{j-1} \qquad (j > 1\,;\ \text{altfel arbitrar})$$

rezultă că $a_1 \wedge b_{j-1}/b_j \wedge (a_1 \wedge b_{j-1})$ este un cât normal astfel că în demonstraţia, printr'o a doua recurenţă, a normalităţii câtului $a_i \wedge b_{j-1}/a_i \wedge b_j$ $i = 0, 1, 2, \ldots, r$, prima treaptă a recurenţei ($i = 1$) este asigurată.

Să admitem că $a_{i-1} \wedge b_{j-1}/a_{i-1} \wedge b_j$ ($i > 1$, dar fix; $j > 1$, arbitrar) este un cât normal şi să demonstrăm acelaşi lucru despre $a_i \wedge b_{j-1}/a_i \wedge b_j$. Într'adevăr, conform ipotezei inductive, lanţul

$$a_{i-1} \geqq a_{i-1} \wedge b_1 \geqq a_{i-1} \wedge b_2 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \wedge b_{j-1} \geqq a_{i-1} \wedge b_j$$

este normal şi cum a_{i-1}/a_i = normal, vom avea, de exemplu:

$$a_i \wedge (a_{i-1} \wedge b_{j-1})/a_i \wedge (a_{i-1} \wedge b_j),$$

adică $a_i \wedge b_{j-1}/a_i \wedge b_j$ = normal pentru orice $i = 0, 1, 2, \ldots, r$. Recurenţa a doua funcţionează de asemenea.

Este dela sine înţeles că putem scrie şi $b_j \wedge a_{i-1}/b_j \wedge a_i$ = normal pentru orice $j = 0, 1, 2, \ldots, s$; ($i > 1$, dar altfel arbitrar).

Concluzia propoziţiei de care ne ocupăm, rezultă acum cu uşurinţă; lanţurile

$$x = a_r \geqq a_r \wedge b_1 \geqq a_r \wedge b_2 \geqq \ldots \geqq a_r \wedge b_s = x \wedge y$$

$$y = b_s \geqq b_s \wedge a_1 \geqq b_s \wedge a_2 \geqq \ldots \geqq b_s \wedge a_r = y \wedge x$$

sunt normale şi putem lua, evident, $\omega = x \wedge y$.

Observaţie importantă. Proprietatea din lema 7° se mai poate enunţa spunând că *elementele x cu $\Omega//x$ = normal formează semistructura faţă de* $\wedge$ [1]).

8° Lemă. *Fie $\Omega \geqq a$ şi $\Omega \geqq b$ cu Ω/a şi Ω/b câturi normale; fie de asemenea p' cu $b \geqq p \geqq a \wedge b$ şi astfel ca $b//p'$ = normal. In aceste condiţii, p' este perfect în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$, iar $a \vee b$ este normal şi finit accesibil din $a \vee p'$, adică $a \vee b//a \vee p'$ = normal.*

Demonstraţie. Mai întâi, o observaţie importantă: dacă în II_2 facem $p' = a \wedge b$, ceea ce este în acord atât cu I_2, cât şi cu II_1, obţinem evident $a \vee b/a$ = normal. De aici rezultă această *proprietate de retronormalitate* (care poate fi privită şi ca o *consecinţă directă a axiomei I_2 a lui Uzcov*). *Fie $\Omega \geqq a' \geqq a$ cu Ω/a', Ω/a câturi normale; atunci câtul a'/a este de asemenea normal.*

Să trecem acum la demonstraţia lemei. Fie $b \geqq p_1' \geqq p_2' \geqq \ldots \geqq p_{i-1}' \geqq p_i' = p'$ lanţul normal care leagă pe b de p'; conform axiomelor II, rezultă că p_1' este perfect în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ şi că $a \vee b/a \vee p_1'$ este un cât normal. Vrem să arătăm că *p_2' este de asemenea perfect în conexiunea menţionată şi că $a \vee p_1'/a \vee p_2'$ este normal.*

Pentru aceasta, să observăm că, deoarece $a \vee b/b$ = normal, şi $a \vee b/a \vee p_1' =$ = normal (axiomele I_1, II_2), urmează conform cu axioma I_2 că $a \vee p_1'/b \wedge (a \vee p_1')$

[1]) Este probabil că sub această ultimă formă, lema 7° nu figurează în axiomatizarea lui Uzcov [3].

este de asemenea normal; dar $b \wedge (a \vee p_1') = p_1'$ căci p_1' este perfect în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$, așa dar, câtul $a \vee p_1'/p_1'$ este normal. Dar câtul $a \vee p_1'/a$ este de asemenea normal (conform cu observația precedentă), încât elementul p_2' are în conexiunea $a \vee p_1'/a \rightleftarrows p_1'/a \wedge p_1' = p_1'/a \wedge b$ același rol pe care elementul p_1' îl are în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

Putem așa dar conchide, conform axiomelor, că p_2' este perfect în conexiunea $a \vee p_1'/a \rightleftarrows p_1'/a \wedge p_1'$ și că $a \vee p_1'/a \vee p_2' =$ normal.

Or, prima concluzie înseamnă evident $p_1' \wedge (a \vee p_2') = p_2'$ sau încă $b \wedge (a \vee p_1') \wedge (a \vee p_2') = p_2'$ adică, $b \wedge (a \vee p_2') = p_2'$ ceea ce înseamnă *că p_2' este perfect chiar în conexiunea* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

In al doilea rând, ținând seama că $a \vee p_1'/p_1'$ și $a \vee p_1'/a \vee p_2'$ sunt câturi normale, deducem ca mai sus că $a \vee p_2'/p_2'$, este de asemenea normal, în consecință rezultă, tot ca mai sus, că $a \vee p_2'/a \vee p_3'$ este cât normal și că p_3' este perfect în conexiunea $a \vee p_2'/a \rightleftarrows p_2'/a \wedge p_2'$ și deci *a fortiori* în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ (căci p_2' a fost dovedit perfect în această din urmă conexiune).

Pe acest drum, din aproape în aproape (sau printr'o inducție finită cu aplicarea lemei 7°), conchidem că lanțul

$$a \vee b \geqq a \vee p_1' \geqq a \vee p_2' \geqq \ldots \geqq a \vee p_{i-1}' \geqq a \vee p_i' = a \vee p'$$

este normal și că p' este perfect în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/\wedge a\ b$, *q.e.d.*

9° Lemă. *Fie $\Omega \geqq a$ și $\Omega \geqq x$ cu $\Omega/a =$ normal și cu $\Omega//x =$ normal; fie de asemenea p' cu $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ și astfel ca x/p' să fie normal. In aceste condiții, p' este perfect în conexiunea monotonă $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$, iar câtul $a \vee x/a \vee p'$ este normal* [1]).

Demonstrație. Vom demonstra *ceva mai mult*, și anume că orice p' cu $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ și astfel ca p' să fie legat de x printr'un lanț normal finit

$$x \geqq p_1' \geqq p_2' \geqq \ldots \geqq p'$$

este perfect în conexiunea $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$, iar lanțul

$$a \vee x \geqq a \vee p_1' \geqq a \vee p_2' \geqq \ldots \geqq a \vee p'$$

este de asemenea normal.

Fie, în acest scop,

$$\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s = x$$

un lanț normal care leagă pe Ω de x; pentru a demonstra ceea ce avem în vedere, vom folosi o inducție finită asupra indicilor j.

Prima treaptă a recurenței ($j = 1$) *este asigurată de lema din* 8°. Să presupunem așa dar că propoziția se verifică pentru toți indicii mai mici decât un indice fix (dar arbitrar ales) j și demonstrăm că ea se verifică și pentru indicele j.

In acest scop, să considerăm schema următoare:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a \vee b_{j-1} & \geqq & a \vee b_j & \geqq & a \vee q_1' & \geqq & a \vee q_2' & \geqq \ldots \geqq & a \vee q' \\
b_{j-1} & \geqq & (a \wedge b_{j-1}) \wedge b_j & \geqq & (a \wedge b_{j-1}) \vee q_1' & \geqq & (a \wedge b_{j-1}) \vee q_2' & \geqq \ldots \geqq & (a \wedge b_{j-1}) \wedge q' \\
 & & b_j & \geqq & q_1' & \geqq & q_2' & \geqq \ldots \geqq & q'
\end{array}$$

$$\geqq a \qquad \geqq a \wedge b_{j-1}$$

$$\geqq a \wedge b_j$$

[1]) In axiomatizarea lui Uzcov, această propoziție figurează *ca axiomă*.

unde q' este legat de b_j printr'un lanţ normal finit $b_j \geqq q'_1 \geqq q'_2 \geqq \ldots \geqq q'$ (dar altfel q' este arbitrar în $b_j/a \wedge b_j$).

Deoarece b_{j-1}/b_j şi $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$ sunt câturi normale, urmează că în conexiunea $(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j/a \wedge b_{j-1} \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j$, q' este perfect, iar lanţul

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'_1 \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'_2 \geqq \ldots \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q' \quad (3)$$

este normal (lema din 8°). Că elementul q' e perfect în conexiunea menţionată, aceasta se exprimă evident prin relaţia

$$b_j \wedge [(a \wedge b_{j-1}) \vee q'] = q'. \quad (4)$$

Deoarece, în lanţul (3), avem $b_{j-1})/(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j$ = normal (lema 7°, axioma I_1) urmează că b_{j-1} este normal şi finit accesibil din $(a \wedge b_{j-1}) \vee q'$; încât *conform ipotezei raţionamentului prin recurenţă*, elementul $(a \wedge b_{j-1}) \vee q'$ este perfect în conexiunea $a \vee b_{j-1}/a \rightleftarrows b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$, adică

$$b_{j-1} \wedge [a \vee (a \wedge b_{j-1}) \vee q'] = (a \wedge b_{j-1}) \vee q' \quad (4')$$

iar lanţul

$$a \vee b_{j-1} \geqq a \vee b_j \geqq a \vee q'_1 \geqq a \vee q'_2 \geqq \ldots \geqq a \vee q'$$

este normal. In plus, dacă în (4') secţionăm în ambii membri cu b_j şi ţinem seama de (4), căpătăm (e uşor de văzut):

$$b_j \wedge (a \vee q') = q'$$

adică q' este perfect în conexiunea $a \vee b_j/a \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j$.

E clar deci că recurenţa funcţionează, şi ca atare afirmaţia noastră (*a fortiori* lema care ne preocupă) este demonstrată.

10° Teoremă. *In cadrul cererii* $\mathfrak{V}$, *condiţiile lui Uzcov* I + II *implică ipoteza SZ.*

Demonstraţie. Intr'adevăr, pentru orice pereche de intervale normale extrase din două lanţuri normale cu extremităţi comune, câtul intermediar al lui Zassenhaus este normal (lema 7°, axioma I_1) şi deci, dacă mai ţinem seama de lema din 9°, câturile lui Zassenhaus asociate sunt normale şi direct asemenea cu câtul intermediar; *q.e.d.*

Din 6° şi 10° rezultă această propoziţie.

10° bis. Teoremă fundamentală.

In cadrul cererii $\mathfrak{V}$, *ipoteza SZ şi condiţiile lui Uzcov* I + II *sunt logic echivalente.*

11° *Observaţii critice asupra axiomatizării precedente.* 1. Ideea care stă la baza axiomatizării noastre (văzută ca o adâncire a axiomatizării lui Uzcov) a teoremei Schreier-Zassenhaus este aceea a unui paralelism între normalitatea abstractă a lui Uzcov de o parte şi normalităţile lui Ore pe de altă parte.

Acest fel de a vedea, care ni se pare firesc, prezintă nu numai un interes în sine, dar capătă importanţă atunci când este vorba să aplicăm rezultatele obţinute la normalităţile lui Ore în cadrul structurilor arbitrare, grupale etc.

2. Un prim aspect important, care apare încă în axiome, al paralelismului de care vorbeam mai sus, este cererea noastră preliminară $\mathfrak{V}$; această cerere este nu numai o slăbire a cererii $\mathfrak{A}$, dar şi una la care, după cum am

mai observat, α - normalitatea, seminormalitatea, binormalitatea, satisfac identic.

Se pune întrebarea, care este gradul de necesitate al cererii $\mathfrak{V}$? Se vede ușor că, dacă se cere prezența printre axiomele normalității, a unei condiții atât de remarcabile prin simplitatea sa, ca cererea I_2 a lui Uzcov, aceasta atrage cu necesitate acceptarea cererii $\mathfrak{V}$. Reciproc însă, o normalitate care satisface cererii $\mathfrak{V}$ și ipotezei *SZ*, satisface și cererii I_2; încât putem afirma, pe baza celor ce preced, că *ipoteza SZ + cererea* $\mathfrak{V}$ de o parte și *condițiile lui Uzcov* I + II de altă parte, *sunt logic echivalente.*

Problema, pe care o lăsăm deschisă, revine atunci la cercetarea independenței axiomelor *SZ* + $\mathfrak{V}$ resp. I + II. Pentru teoria normalității β a lui Ore, răspunsul este de o importanță particulară (alin. 20°—23°).

3. Un alt aspect de asemenea cuprins în axiome al aceluiași paralelism, îl constitue interpretarea dată de noi cererii de asemănare în sensul lui Ore a câturilor conjugate din ipoteza *SZ*. După cum a arătat Ore, asemănarea directă a unor anumite perechi de câturi și relațiile de tip Dedekind, sunt logic echivalente. Interpretarea pe care o dă Kořínek [4] cererii de asemănare a câturilor conjugate nu trece de cadrul echivalenței logice menționate adineaori.

Interpretarea noastră a aceleiași cereri constă în arătarea echivalenței logice între relația de tip Dedekind și proprietatea unui element de a fi perfect (sau, cum se mai spune, *închis*) într'o anumită conexiune monotonă mixtă, ceea ce este mai semnificativ, întru cât se face o legătură între teoria descompunerilor de tipul Jordan-Hölder și teoria conexiunilor monotone [1]).

Vom vedea de altfel (alin. 12°, 14°) că această interpretare a cererii de asemănare a câturilor conjugate este cu mult mai bogată în conținut decât lasă să se întrevadă axioma respectivă II_1.

4. Al treilea aspect al paralelismului între normalitatea lui Uzcov și normalitățile lui Ore îl constitue o seamă de proprietăți dintre care menționăm următoarele:

1. Fie $\Omega \geqq x \geqq y$ și $\Omega \geqq a$ astfel ca $x//y$ = normal, $\Omega//x$ = normal, iar Ω/a = normal, atunci avem relația *de tip Dedekind*

$$(\alpha) \quad x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee y$$

2. Fie $\Omega \geqq a' \geqq a$ cu $\Omega//a'$ = normal și cu Ω/a = normal, atunci câtul a'/a este normal.

Cea de a doua din aceste proprietăți se demonstrează fără nicio dificultate deosebită; prima rezultă prin aplicarea unei inducții finite.

Proprietatea 2, *de retronormalitate «relativă»*, este banal verificată de normalitățile lui Ore, dar este nebanal verificată de binormalitate.

5. Axioma I_2 poate primi în cadrul observației preliminare în demonstrația lemei 8° și al cererii I_1, un enunț echivalent cu primul și care din punctul de vedere al axiomatizării noastre (vezi în special cele spuse în observația a treia de mai sus), e mai semnificativ, anume: *dacă* $a \vee b \geqq p \geqq a$ *cu* $a \vee b/p =$ $=$ *normal, atunci* $\chi(a \vee b)/\chi(p) = b/b \wedge p =$ *normal.* Rezultă în particular că,

---

[1]) Aceasta din urmă nu este decât un aspect al unui cerc de idei foarte generale și fecunde, pus în evidență pentru prima dată de O. Ore [12]; conexiunile considerate de acest autor sunt așa numitele *conexiuni galoisiene* (noțiune care, într'un anumit sens, este dual㠹 noțiunii de conexiune monotonă mixtă).

pentru $p = a$ ($a \vee b/a$ = normal, conform cu observaţia menţionată) avem $b/a \wedge b$ = normal etc.

6. Din cele spuse până aici, reiese în mod limpede că condiţiile de valabilitate ale propoziţiei SZ se pot exprima în termenii proprietăţilor unei anumite conexiuni monotone mixte, în specie $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ cu $\Omega/a =$ = normal şi Ω/b = normal.

Este important de notat că, dacă reluăm teoria lui Kořínek prin metoda conexiunilor monotone, atunci ne apare că normalitatea lui Kořínek este definită în termenii proprietăţilor următoarei conexiuni monotone: $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$, unde Ω/a = normal, iar x este arbitrar în R_Ω.

In ceea ce priveşte normalitatea lui Uzcov, ea este definită în termenii proprietăţilor conexiunii monotone $a \vee b_s/a \rightleftarrows b_s/a \wedge b_s$ unde Ω/a = normal iar $\Omega//b_s$ = normal (s, întreg pozitiv arbitrar).

12° Teorema Schreien-Zassenhaus. Incepând cu acest alineat, vom înţelege prin $\mathfrak{V}$-*normalitate* (upsilon-normalitate), o normalitate care verifică condiţiile lui Uzcov I + II (sau ipoteza SZ + cererea $\mathfrak{V}$).

Fie $a \geqq b$ un interval cu $a/b = \mathfrak{V}$-normal; vom nota cu $\mathfrak{M}(a/b)$ mulţimea tuturor elementelor c cu $a \geqq c \geqq b$ şi astfel ca $a//c = \mathfrak{V}$-normal.

Este evident că, pentru orice $c \in \mathfrak{M}(a/b)$ avem $c/b = \mathfrak{V}$-normal; reamintim în plus că $\mathfrak{M}(a/b)$ este o semistructură faţă de $\wedge$, (lema 7°).

Teoremă. *Două lanţuri $\mathfrak{V}$-normale cu extremităţi comune*

$$\begin{matrix} a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \ldots \geqq a_r \\ b_0 \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s \end{matrix} \qquad a_0 = b_0,\ a_r = b_s$$

se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanţuri încă $\mathfrak{V}$-normale de aceeaşi lungime veritabilă în care câturile conjugate $a_{i,j-1}/a_{ij}$, $b_{j,i-1}/b_{ji}$ sunt asemenea şi au, în plus, proprietatea următoare [1]).

$$\mathfrak{M}(a_{i,j-1}/a_{ij}) \rightleftarrows \mathfrak{M}(b_{j,i-1}/b_{ji}). \tag{5}$$

Ne mărginim, firește, la demonstraţia relaţiei (5). Dacă notăm ca de obicei

$$a_{i-1} = M,\ a_i = m;\quad b_{j-1} = N,\ b_j = n$$

atunci avem $a_{i,j-1}/a_{ij} = m \vee S/m \vee T$, $b_{j,i-1}/b_{ji} = n \vee S/n \vee T$ unde S şi T au semnificaţiile uzuale: $S = M \wedge N$, $T = (M \wedge n) \vee (N \wedge m)$.

Să considerăm conexiunile monotone mixte:

$$\begin{matrix} m \vee S \geqq m \vee T \geqq m \\ S \geqq T \geqq m \wedge S \end{matrix} \qquad \begin{matrix} n \vee S \geqq n \vee T \geqq n \\ S \geqq T \geqq n \wedge S. \end{matrix}$$

Aceste conexiuni sunt definite respectiv de operaţiile

$$\begin{matrix} \chi(p) = S \wedge p,\ p \in m \vee S/m \\ \varphi(p') = m \vee p',\ p' \in S/m \wedge S \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma(q) = S \wedge q,\ q \in n \vee S/n \\ \tau(q') = n \vee q',\ q' \in S/n \wedge S. \end{matrix}$$

E clar că, pentru $c \in \mathfrak{M}(m \vee S/m \vee T)$ cu $m \vee S/c =$ normal avem $S/\chi(c) =$ = normal, căci M este normal şi finit accesibil atât din $m \vee S$, cât şi din S

[1]) In § următor vom întări relaţia de conexiune (5), până la un isomorfism al semistructurilor $\mathfrak{M}$ din cei doi membri ai săi (alineatul 14°).

(lema 7°). Observație analoagă pentru $c' \in \mathfrak{M}(n \vee S/n \vee T)$ cu $n \vee S/c' =$normal (așa dar, $S/\sigma(c') =$ normal).

De aici rezultă (din aproape în aproape, sau printr'o inducție finită) că pentru $c \in \mathfrak{M}(m \wedge S/m \vee T)$ respectiv $c' \in \mathfrak{M}(n \vee S/n \vee T)$ avem $\chi(c) \in \mathfrak{M}(S/T)$ resp. $\sigma(c') \in \mathfrak{M}(S/T)$.

Reciproc, e clar (lema 9°) că, pentru orice $c'' \in \mathfrak{M}(S/T)$, avem $\varphi(c'') \in \mathfrak{M}(m \vee S/m \vee T)$ resp. $\tau(c'') \in \mathfrak{M}(n \vee S/n \vee T)$.

Incât, operațiile $\theta = \tau\chi$, $\psi = \varphi\sigma$ care, evident, aplică una pe alta structurile câturilor $m \vee S/m \vee T$, $n \vee S/n \vee T$ aplică, în particular, una pe alta semistructurile $\mathfrak{M}(m \vee S/m \vee T)$, $\mathfrak{M}(n \vee S/n \vee T)$.

Afirmăm că această din urmă corespondență este tocmai conexiunea monotonă de prima specie (5); avem de verificat numai cererea caracteristică conexiunilor de această specie. Or, ținând seama de lema din 9° (mai precis de partea întâia a propoziției mai generale demonstrate acolo), avem succesiv

$$\psi\theta(c) = \varphi\sigma\tau\chi(c) = \varphi.\sigma\tau.\chi(c) = \varphi\chi(c) \leqq c\ ,\ c \in \mathfrak{M}(m \vee S/m \vee T)$$

$$\theta\psi(c') = \tau\chi\varphi\sigma(c') = \tau.\chi\varphi.\sigma(c') = \tau\sigma(c') \leqq c'\ ,\ c' \in \mathfrak{M}(n \vee S/n \vee T).$$

Cu aceasta, relația (5) și, odată cu ea, teorema Schreier-Zassenhaus sunt demonstrate.

§ 3. Clasificarea normalităților $\mathfrak{N}$

13° *Criteriul de clasificare.* In acest paragraf, studiem diferite tipuri particulare de normalitate $\mathfrak{N}$ (în sensul din 12°), conducând la teoreme Schreier-Zassenhaus mai particulare decât aceea din 12°, prin faptul că relațiile de conexiune monotonă între câturile conjugate, posedă proprietăți mai bogate în conținut [1]). Vom vedea că aceasta revine la a întări în mod corespunzător cererea II_1 din sistemul nostru I+II; obținem printre alte tipuri de normalitate $\mathfrak{N}$, unele, având caractere care apar aici ca urme ale anumitor proprietăți ale normalităților lui Ore.

Criteriul de clasificare a normalităților constă așa dar în a deosebi între relațiile de normalitate de acest gen după natura proprietăților conexiunii monotone $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ unde $\Omega/a =$ normal și $\Omega/b =$ normal.

Cercetarea din acest paragraf mai prezintă și un interes axiomatic special, asupra căruia vom insista la locul cuvenit.

14° *Normalitatea* $\mathfrak{N}_\beta$. Demonstrăm mai întâi următoarea propoziție *(pentru normalitatea* $\mathfrak{N}$*)*:

Lemă. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/a =$ *normal*, $\Omega/b =$ *normal*; *fie de asemenea* p *cu* $a \vee b \geqq p \geqq a$ *și cu* $a \vee b/p =$ *normal. Atunci* p *este perfect în conexiunea* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$, *adică* $a \vee (b \wedge p) = p$.

Demonstrație. Fie b' cu $b' \leqq b$ și $b/b' =$ normal, dar altfel b', este arbitrar; conform cu I_2, avem $b/a \wedge b =$ normal deci, conform cu I_1

[1]) Ideea aceasta de a face o deosebire între relațiile de normalitate după natura corespondenței dintre structurile câturilor conjugate din teorema Schreier-Zassenhaus, o împrumutăm sistematicei Prof. D. Barbilian din *Cursul autografiat de teoria grupurilor și structurilor*, ed. 1950 — 1951, unde ea se găsește expusă în termenii proprietăților așa numitei funcții Hölder asociate normalității.

avem şi $b/(a \wedge b) \vee b' =$ normal. Or, e clar că $b \geqq (a \wedge b) \vee b' \geqq a \wedge b$; rezultă atunci din II_1 că avem

$$(*)\quad b \wedge (a \vee b') = (b \wedge a) \vee b'.$$

Fie atunci $a \vee b \geqq p \geqq a$ în condiţiile din ipoteza lemei; e clar că $p/a =$ normal (proprietatea de retronormalitate a normalităţii $\mathfrak{N}$!). Dacă, deci, dăm lui $p \geqq a$ rolul lui $b \geqq b'$, iar lui b rolul lui a din $(*)$, vom putea scrie $p \wedge (b \vee a) = p(\wedge b) \vee a$, adică $a \vee (b \wedge p) = p$; *q.e.d.*

Normalitatea $\mathfrak{N}_\beta$ este o întărire a normalităţii $\mathfrak{N}$; ea se obţine adăugând la sistemul I + II următoarea cerere (evident mai tare decât aserţiunea din lema precedentă).

II_1''. Fie $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b câturi normale; atunci, conexiunea monotonă mixtă $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ este perfectă în câtul $a \vee b/a$ adică $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

E clar că această propoziţie II_1'' este o urmă a definiţiei normalităţii β.

T e o r e m a 1. *In cadrul normalităţii $\mathfrak{N}$, conexiunea monotonă* (5) *este perfectă (aşa dar, un isomorfism de semistructură).*

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru a dovedi afirmaţia din enunţ, vom folos o dublă inducţie finită.

Fie mai întâi p cu $a \vee b \geqq p \geqq a$ şi cu $a \vee b \;//\; p =$ normal; fie de asemenea $a \vee b \geqq p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_{i-1} \geqq p_i \geqq \ldots \geqq p$ lanţul normal finit care leagă pe $a \vee b$ de p. Vrem să arătăm că avem $\varphi\chi(p) = p$, adică $a \vee (b \wedge p) = p$.

Pentru $i = 1$, aceasta este clar; admitem că proprietatea este adevărată pentru toţi indicii i inferiori unui indice $i > 1$ arbitrar, dar fix şi să demonstrăm că este adevărată şi pentru acel i.

Or, lanţul $a \vee b \geqq p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_{i-1}$ fiind normal, rezultă că $\Omega \;//\; p_{i-1} =$ $=$normal; dar $\Omega / b =$ normal. Incât, aplicând lema din 7°, deducem că $p^i{}_{-1} / b \wedge p_{i-1} =$ normal.

Conform ipotezei inducţiei, avem $a \vee (b \wedge p_{i-1}) = p_{i-1}$, iar în conexiunea $a \vee (b \wedge p_{i-1})/a \rightleftarrows b \wedge p_{i-1}/b \wedge a$ putem scrie, pentru p_i:

$$a \vee [(b \wedge p_{i-1}) \wedge p_i] = p_i$$

(am aplicat lema dela începutul acestui alineat, ceea ce e permis, căci $p_{i-1}\, b \wedge p_{i-1} =$ normal, $p_{i-1}/a =$ normal!).

Ultima egalitate înseamnă $a \vee (b \wedge p_i) = p_i$, ceea ce arată că *prima recurenţă funcţionează.*

Fie acum $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_s$ un lanţ normal arbitrar şi să admitem că pentru toţi indicii j mai mici decât un anume indice $j > 1$ arbitrar ales, dar fix, următoarea proprietate se verifică:

$\mathfrak{A}^*$. *Dacă p e cu $a \vee b_k \geqq p \geqq a$ şi astfel ca $a \vee b_k$ să fie normal şi finit accesibil din p, atunci p este perfect în conexiunea monotonă $a \vee b_k/a \rightarrow b_k/a \wedge b_k$, $k < j$* [1]).

Să arătăm că această proprietate este adevărată şi pentru $k = j$; deoarece ea se verifică pentru $k = 1$ (conform primei părţi a recurenţei), vom fi arătat că proprietatea $\mathfrak{A}^*$ este generală.

---

[1]) Fireşte, $\Omega/a =$ normal.

In acest scop, vom considera următoarele conexiuni

$$a \vee b_{j-1} \geqq a \vee b_j \geqq p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p \geqq a$$

$$b_{j-1} \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee b_j) \geqq b_{j-1} \wedge p_1 \geqq b_{j-1} \wedge p_2 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \wedge p \geqq a \wedge b_{j-1}$$

$$b_j \geqq \ldots \qquad \ldots \geqq a \wedge b_j,$$

unde $a \vee b_j$ este cu $a \vee b_j // p$ = normal (prin lanțul normal $a \vee b_j \geqq p_1 \geqq \ldots \geqq p$). Or, se știe că $a \vee b_{j-1}/a \vee b_j$ = normal (vezi 9°), deci $a \vee b_{j-1} // p$ = normal.

Aplicând ipoteza inductivă, rezultă imediat

$$a \vee (b_{j-1} \wedge p) = p \tag{6}$$

Pe de altă parte, e clar că $\Omega // p$ = normal (lema din 9°); deoarece avem și $\Omega // b_{j-1}$ = normal rezultă (cu lema din 7°) că $b_{j-1} // b_{j-1} \wedge p$ = normal (fireşte, prin lanțul normal $b_{j-1} \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee b_j \geqq b_{j-1} \wedge p_1 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \wedge p$. Deoarece avem $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$ = normal, b_{j-1}/b_j = normal, rezultă că putem aplica conexiunii monotone

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j / a \wedge b_{j-1} \rightleftarrows b_j / a \wedge b_j,$$

concluzia primei recurențe și scrie

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee [\, b_j \wedge (b_{j-1} \wedge p)\,] = b_{j-1} \wedge p,$$

sau, ceea ce este tot una

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee (b_j \wedge p) = b_{j-1} \wedge p \tag{7}$$

Comparând pe (6) cu (7), rezultă

$$a \vee (b_j \wedge p) = p.$$

Așa dar, a doua recurență funcționează de asemenea.

Este ușor acum să dovedim afirmația din enunțul teoremei care ne preocupă; nu avem decât să considerăm ultimele două incluziuni din demonstrația teoremei Schreier - Zassenhaus (12°). Cu notațiile de acolo e clar că putem scrie, în baza proprietății $\mathfrak{A}^*$.

$$\psi\theta\,(c) = c \quad , \quad c \in \mathfrak{M}\,(m \vee S/m \vee T)$$

$$\theta\psi\,(c') = c' \quad , \quad c' \in \mathfrak{M}\,(n \vee S/n \vee T).$$

Cu aceasta, teorema 1 este complet demonstrată.

Observație. Luarea împreună a teoremei din 12° și a teoremei 1 precedente, conduce la generalizarea rezultatului principal al lui Uzcov [3], căci $\mathfrak{A} \sqsubset \mathfrak{V}$.

Teorema 2. *În cadrul normalității $\mathfrak{V}$, condiția necesară și suficientă pentru ca corespondența dintre structurile căturilor $m \vee S/m \vee T$ și $n \vee S/n \vee T$ definită de funcțiile θ, ψ (vezi 12°) să fie o conexiune monotonă de specia a doua, este ca normalitatea $\mathfrak{V}$ să fie o $\mathfrak{V}_\beta$ - normalitate.*

Necesitatea condiției din enunț rezultă imediat din considerarea lanțurilor normale $\Omega \geqq a \geqq \omega$, $\Omega \geqq b \geqq \omega$, luând drept câturi $m \vee S/m \vee T$ $n \vee S/n \vee T$, căturile $a \vee b/a$, $b/a \wedge b$.

Pentru a demonstra suficiența condiției din enunț, este deajuns să arătăm că cererea II_1' implică propoziția următoare:

$\mathfrak{A}_1^*$. *Dacă* $\Omega \geqq a$ *şi* $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_s$ *sunt lanţuri normale arbitrare, atunci conexiunea monotonă* $a \vee b_s / a \rightleftarrows b_s / a \wedge b_s$ *este perfectă în câtul* $a \vee b_s / a$: $a \vee b_s / a \rightleftarrows b_s / a \wedge b_s$.

Pentru a justifica această propoziţie, este suficient să reluăm al doilea raţionament inductiv [1]) din demonstraţia teoremei 1, presupunând de astă dată că p este arbitrar în câtul $a \vee b^s / a$.

Cu aceasta, teorema 2 este demonstrată.

O b s e r v a ţ i e. In cap. II, § 3, al acestei lucrări, vom construi o normalitate de tipul $\mathfrak{N}_\beta$ în cadrul normalităţii β a lui Ore.

Teorema Jordan-Hölder pentru normalitatea $\mathfrak{N}_\beta$. *Două şiruri* $\mathfrak{N}_\beta$ *- normale, cu extremităţi comune, au lungimi egale, iar structurile «factorilor» lor sunt legate (într'o anumită ordine) prin conexiuni monotone de specia a doua.*

15° *Normalităţile* $\mathfrak{N}_\alpha$ *şi* $\mathfrak{N}_{\alpha+\beta}$. Normalitatea $\mathfrak{N}_\alpha$ se obţine din $\mathfrak{N}$, întărind cererea II_1 până la următoarea.

II'_1. Fie $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ cu $\Omega / a =$ normal şi $\Omega / b =$ normal; atunci, conexiunea monotonă $a \vee b / a \rightleftarrows b / a \wedge b$ este perfectă în câtul $b / a \wedge b$: $a \vee b / a \rightleftarrows b / a \wedge b$.

Normalitatea $\mathfrak{N}_{\alpha-\beta}$ este aceea definită de cererile $\mathrm{I} + \mathrm{II}'_1 + \mathrm{II}''_1 + \mathrm{II}_2$.

E clar că cererea II_1 este o urmă a definiţiei normalităţii α, în timp ce axiomele $\mathrm{II}'_1 + \mathrm{II}''_1$ considerate simultan, constitue o urmă a definiţiei semi-normalităţii.

T e o r e m ă. *Fie* $\mathfrak{N}$ *o relaţie de normalitate ce verifică cererea* I_2 *a lui* Uzcov; *atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca structurile oricărei perechi de cături conjugate* $m \vee S / m \vee T$, $n \vee S / n \vee T$ *în rafinările Zassenhaus a două lanţuri* $\mathfrak{N}$ *- normale cu extremităţi comune să fie legate printr'o conexiune monotonă de prima specie (indusă de corespondenţa definită de* θ, ψ; *vezi* 12°) *este ca normalitatea* $\mathfrak{N}$ *să verifice* II'_1.

D e m o n s t r a ţ i e. Considerând lanţurile normale $\Omega \geqq a \geqq a \wedge b$, $\Omega \geqq b \geqq a \wedge b$, necesitatea condiţiei din enunţ apare evidentă căci, în rafinările lanţurilor considerate, căturile $a \vee b / a$, $b / a \wedge b$ (resp. $a \vee b / b$, $a / a \wedge b$) sunt conjugate.

Pentru a justifica suficienţa condiţiei din enunţ, vom arăta că cererea II'_1 implică propoziţia următoare:

$\mathfrak{A}^*_2$. *Dacă* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_s$, *sunt lanţuri* $\mathfrak{N}$ *- normale arbitrare, atunci, conexiunea monotonă mixtă* $a \vee b_s / a \rightleftarrows b_s / a \wedge b_s$ *este perfectă în câtul* $b_s / a \wedge b_s$: $a \vee b_s / a \rightleftarrows b_s / a \wedge b_s$.

Pentru demonstraţie, vom aplica o inducţie finită după indicii j, $j = 1, 2, \ldots, s$; s, număr natural arbitrar. Propoziţia $\mathfrak{A}^*_2$ se verifică pentru $j = 1$, fiind, în acest caz, conţinutul cererii II'_1; admitem dar, că propoziţia $\mathfrak{A}^*_2$ este adevărată pentru toţi j mai mici decât un indice $j > 1$ fix, dar altfel arbitrar şi să arătăm că ea este adevărată şi pentru acel indice j.

In acest scop, considerăm următoarele conexiuni

$$\begin{array}{ccccc} a \vee b_{j-1} & \geqq & a \vee b_j & \geqq \ldots & \geqq a \\ b_{j-1} & \geqq & (a \wedge b_{j-1}) \vee b_j & \geqq \ldots & \geqq a \wedge b_{j-1} \\ & & b_j & \geqq p' \geqq \ldots & \geqq a \wedge b_j . \end{array}$$

[1]) In cazul propoziţiei $\mathfrak{A}^*_1$, raţionamentul inductiv de care e vorba nu foloseşte — înafară de cererea de II''_1, firește — decât cererile I şi II_1. Dimpotrivă, în cazul propoziţiei $\mathfrak{A}^*$, se foloseşte şi cererea II_2.

Potrivit ipotezei inductive, avem $a \vee b_{j-1}/a \rightleftarrows b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$, așa dar, în particular, elementele $a \vee b_j$ și $(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j$ se corespund în această conexiune. Aceeași ipoteză inductivă ne permite să scriem

$$b_{j-1} \wedge \left\{ a \vee \left[(a \wedge b_{j-1}) \vee p' \right] \right\} = (a \wedge b_{j-1}) \vee p',\ p' \in b_j/a \wedge b_j,$$

sau, ceea ce este tot una,

$$b_{j-1} \wedge (a \vee p') = (a \wedge b_{j-1}) \vee p'. \tag{8}$$

Pe de altă parte, conform cu I_2, avem $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1} =$ normal și cum $b_{j-1}/b_j =$ normal, putem aplica cererea II_1' în conexiunea monotonă $(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j/a \wedge b_{j-1} \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j$ și scrie

$$b_j \wedge [(a \wedge b_{j-1}) \vee p'] = p' \ , \quad p' \in b_j/a \wedge b_j. \tag{9}$$

Comparând pe (8) cu (9), rezultă

$$b_j \wedge (a \vee p') = p' \ , \quad p' \in b_j/a \wedge b_j.$$

Propoziția $\mathfrak{A}_2^*$ este demonstrată. Suficiența condiției din enunțul teoremei care ne preocupă, rezultă acum ușor din considerarea conexiunilor:

$$\begin{array}{c|c} m \vee S \geqq m \vee T \geqq m & n \vee S \geqq n \vee T \geqq n \\ S \geqq T \geqq m \wedge S & S \geqq T \geqq n \wedge S, \end{array}$$

care sunt, conform cu I_2, în ipotezele propoziției $\mathfrak{A}_2^*$.

O consecință importantă a teoremei precedente este:

Teorema Jordan - Hölder pentru normalitatea $\mathfrak{N}_\alpha$. Două șiruri $\mathfrak{N}_\alpha$ - normale cu extremități comune au lungimi egale, iar structurile «factorilor» lor sunt legate (într'o anumită ordine) prin conexiuni monotone de prima specie.

Observație. Rezultatele corespunzătoare normalității $\mathfrak{N}_{\alpha+\beta}$ derivă din juxtapunerea convenabilă a unora din rezultatele precedente; asupra acestei chestiuni nu mai insistăm.

16° *Schema clasificării normalităților* $\mathfrak{N}$. Insemnând cu $\sqsubset$ relația de incluziune logică între concepte, avem

$$\mathfrak{N}_{\alpha+\beta} \sqsubset \mathfrak{N}_\alpha \sqsubset \mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{N}_{\alpha+\beta} \sqsubset \mathfrak{N}_\beta \sqsubset \mathfrak{N}$$

Aceste incluziuni pot fi rezumate în următoarea schemă

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_\beta & \rightarrow & \mathfrak{N} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{N}_{\alpha+\beta} & \rightarrow & \mathfrak{N}_\alpha \end{array} \qquad \text{Schema I}$$

unde semnul $\rightarrow$ undică sensul lui $\sqsubset$.

§ 4. O altă definiție axiomatică a normalității $\mathfrak{N}$

17° *Echivalența logică între sistemul* I + II *și noul sistem.* Pentru a putea face o comparație mai lesnicioasă între vechea și noua formă a sistemului I + II, vom așeza aici față în față cele două sisteme de axiome:

Fie $\Omega \geqq a$ $\Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b, câturi normale; atunci:

I* Câtul $\Omega/a \vee b$ este normal;

II* Câturile $a/a \wedge b$, $b/a \wedge b$ sunt normale;

III* { III$_1^*$ Dacă p' e cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ și cu $b/p' =$ normal, atunci $a \vee b/a \vee p'$ e de asemenea normal.
III$_2^*$ In aceleași ipoteze, avem $\chi\,\varphi\,(p') = p'$.

I** Același conținut ca I*; II$_1^{**}$. Fie p' cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$; câtul b/p' este normal *dacă* și *numai dacă* p' este de forma $p' = \bar{a} \wedge b$ unde $\bar{a}$ e cu $\bar{a} \geqq a$ și astfel ca $\bar{a}$ să fie *normal* într'un oarecare înfășurător comun $\overline{\Omega}$ al lui a și b, în care aceștia sunt normali (adică cu $\overline{\Omega}/a =$ normal $\overline{\Omega}/b =$ normal).

II$_2^{**}$. Același conținut ca II$_2^*$.

Se recunoaște fără nicio dificultate că sistemul I* + II* + III* nu este altul decât sistemul I + II, înlăuntrul căruia s'a operat o redistribuire a axiomelor.

In cele ce urmează, ne propunem să arătăm că sistemele I* + II* + III* (pe scurt T^*) și I** + II** (pe scurt T^{**}) sunt logic echivalente $T^* \equiv T^{**}$.

Să arătăm mai întâi că T^{**} este o consecință a lui T^*; pentru aceasta, este necesar și (din cauza formei lui T^{**}), suficient, să arătăm că aserțiunea II$_1^{**}$ este adevărată în sistemul T^*.

Propoziția 1. *Dacă p' cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ e de forma $p' = \bar{a} \wedge b$, atunci $b/p' =$ normal* (toate notațiile sunt cele din enunțurile axiomelor).

E clar că această propoziție este o consecință nemijlocită a axiomei II$_1^*$ din sistemul T^*. Important de observat este însă faptul că propoziția 1 este adevărată în cadrul lui T^*, *oricare* ar fi $\overline{\Omega}$ și $\bar{a}$ cu proprietățile din enunțul lui II*.

Este de asemenea de notat faptul că propoziția 1 este adevărată, chiar și fără de ipoteza $\overline{\Omega}/a =$ normal (adică păstrând numai pe $\overline{\Omega}/\bar{a} =$ normal și pe $\overline{\Omega}/b =$ normal); se poate însă arăta că mulțimea elementelor $\bar{a} \wedge b$ din acest caz, nu este deloc mai cuprinzătoare decât aceea a elementelor $\bar{a} \wedge b$ din propoziția 1.

Propoziția 2. *Dacă p' este cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ și cu $b/p' =$ normal (dar altfel arbitrar), atunci există în mod obligatoriu $\overline{\Omega}$ și $\bar{a}$ cu $\overline{\Omega} \geqq \bar{a} \vee b$, $\bar{a} \geqq a$ și cu $\overline{\Omega}/\bar{a} =$ normal, $\overline{\Omega}/a =$ normal, astfel că $p' = \bar{a} \wedge b$.*

Intr'adevăr, conform cu III$_2^*$ avem $(a \vee p') \wedge b = p'$ și cum, conform cu III$_1^*$, avem $a \vee b/a \vee p' =$ normal, rezultă că, dacă punem $\overline{\Omega} = a \vee b$, $\bar{a} = a \vee p'$, propoziția 2 este demonstrată (se știe că în T^*, câtul $a \vee b/a$ ca și $a \vee b/b$, este normal).

Luarea împreună a propozițiilor 1 și 2 (reciproce una alteia) arată că axioma II$_1^{**}$ este o teoremă în sistemul T^*; cu alte cuvinte, T^{**} este o consecință a lui T^*.

Să arătăm în al doilea rând că T^* este o consecință a lui T^{**}; pentru aceasta, este necesar și suficient să arătăm că aserțiunile II* + III* sunt adevărate în sistemul T^{**}.

Propoziția 1'. *Aserțiunile* II^* *și* III_2^* *sunt adevărate în cadrul lui* T^{**}.

Intr'adevăr, dacă în II_1^{**}, facem $\overline{\Omega} = \Omega$, $\bar{a} = a$ rezultă că $b/a \wedge b$ este un cât normal; permutând pe a cu b, rezultă că $a/a \wedge b$ este de asemenea normal.

Fie acum $\overline{\Omega} \geqq a \vee b$ cu $\overline{\Omega}/a$, $\overline{\Omega}/b$ câturi normale dar altfel, $\overline{\Omega}$ este arbitrar; fie și $\bar{a}$ cu $\overline{\Omega} \geqq \bar{a} \geqq a$ și cu $\overline{\Omega}/\bar{a}$ = normal dar altfel, $\bar{a}$ este arbitrar. Conform cu II_1^{**}, $\bar{a} \wedge b$ este cel mai general p' cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ și cu $b/p' =$ = normal.

Avem însă $\chi [\bar{a} \wedge (a \vee b)] = \bar{a} \wedge b$ (fireşte, $a \vee b \geqq \bar{a} \wedge (a \vee b) \geqq a$); conform proprietăților generale ale conexiunilor monotone mixte, rezultă că $\bar{a} \wedge b$ este perfect în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ (ca element imagine!). Cu aceasta, propoziția 1' este demonstrată.

Propoziția 2'. *Aserțiunea* III_1^* *este adevărată în sistemul* T^{**}.

Intr'adevăr, fie ca mai sus $\overline{\Omega}$ cu $\overline{\Omega} \geqq a \vee b$ și cu $\overline{\Omega}/a$, $\overline{\Omega}/b$ câturi normale: fie de asemenea $\bar{a}$ cu $\Omega \geqq \bar{a} \geqq a$ și cu $\overline{\Omega}/\bar{a}$ = normal, $\overline{\Omega}$, $\bar{a}$ sunt, altfel, arbitrare.

Conform cu propoziția 1' și cu axioma I^{**} urmează că $a \vee b/\bar{a} \wedge (a \vee b)$ este un cât normal; dar, conform cu lema din 14°, avem $\bar{a} \wedge (a \vee b) = (\bar{a} \wedge b) \vee a$. Așa dar, câtul $a \vee b/a \vee (\bar{a} \wedge b)$ este normal și cum $\bar{a} \wedge b$ este, conform cu II_1^{**} cel mai general p' cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ și cu $b/p' =$ normal rezultă, în definitiv, că propoziția 2' este demonstrată.

Echivalența logică dintre sistemele T^*, T^{**} este astfel dovedită.

Observație. Cererea II_1^{**} din sistemul T^{**} este în realitate o întărire a cererii II^*; interesul său constă în aceea că pune în evidență partea comună a axiomelor III^* și II^*.

CAPITOLUL II

NORMALITĂȚILE LUI ORE CA NORMALITĂȚI $\mathfrak{V}$.

§ 1. Normalitatea α

18° *Analiza problemei în cadrul* I + II. E clar că α- normalitatea verifică identic cererile I_2, II_1 (ultima chiar sub forma foarte tare a isomorfismului de structură dintre $a \vee b/a$ și $b/a \wedge b$) (11°). Incât, putem conchide imediat la propoziția următoare:

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o normalitate* α *să satisfacă ipotezei SZ este ca această normalitate să verifice cererile* I_1, II_2.

Ar fi interesant de știut în ce măsură acest enunț se simplifică încă în cazul structurilor grupale: se știe [11], că în orice p — grup finit, elementele α- normale sunt quasi-normale (deci seminormale).

19° *Analiza problemei în cadrul* $I_+^{**} II^{**}$, Teoremă. *Dacă* α- *normalitatea verifică cererea* II_1^{**} *întreagă, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca această normalitate să fie o* $\mathfrak{V}$- *normalitate este ca ea să verifice cererea* I^{**}.

Demonstrația nu prezintă nicio dificultate; este însă interesant de observat, în legătură cu enunțul teoremei precedente, că α- normalitatea verifică o proprietate mai tare decât prima parte a axiomei II_1^{**}. E vorba, anume, de propoziția următoare:

Fie $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b câturi α-normale; dacă $\bar{\Omega}$ este un înfăşurător *arbitrar* al lui a şi b şi dacă $\bar{a}$ e cu $\Omega \geqq \bar{a} \geqq a$ şi cu $\bar{\Omega}/\bar{a} = \alpha$ — normal, atunci $b/\bar{a} \wedge b = \alpha$-normal (şi avem, fireşte, $b \geqq \bar{a} \wedge b \geqq a \wedge b$).

Adăugăm că pentru toţi aceşti $p' = \bar{a} \wedge b$ avem proprietatea $a \vee b/a \vee p' = \alpha$-normal.

§ 2. Normalitatea β

20° *Analiza problemei în cadrul* I + II. Normalitatea β verifică, după cum se ştie, următoarele două propoziţii.

1. Dacă înfăşurările $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ sunt β-normale, înfăşurarea $\Omega \geqq a \vee b$ este de asemenea β-normală şi avem evident $a \vee b/a \rightrightarrows b/a \wedge b$.

2. Fie $\Omega \geqq \bar{a} \geqq a$ cu a β-normal în R_Ω şi cu $\bar{a}$ β-normal în structura câtului Ω/a; atunci, $\bar{a}$ este β-normal chiar în structura R_Ω.

Conţinutul propoziţiei 1 coincide cu cel al axiomelor I_1 şi II''_1, în timp ce propoziţia 2, pe care, după cum se ştie, o verifică de asemenea seminormalitatea şi binormalitatea, nu figurează printre axiome, dar asigură în cazurile acestor normalităţi, inclusiv în cazul normalităţii generale, funcţionarea axiomei II_2 (după cum vom vedea mai departe).

Lemă principală. *Fie* $\Omega \geqq \beta$ *cu* $\Omega/\beta = \beta$-*normal şi* $x \in R_\Omega$; *dacă* p' *cu* $x \geqq p' \geqq \beta \wedge x$ *este astfel că* $x/p' = \beta$-*normal, atunci,* $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta$-*normal.*

Demonstraţie. Într'adevăr, fie $y \in \beta \vee x/\beta$ şi $z \in \beta \vee x/\beta$ cu $(\beta \vee p') \vee y \geqq z \geqq \beta \vee p'$ (dar altfel z este arbitrar în $\beta \vee x/\beta$). Dacă arătăm că avem

$$(y \wedge z) \vee (\beta \vee p') = z,$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru ($\beta \leqq y \wedge z$!)

$$(y \wedge z) \vee p' = z' \tag{10}$$

am terminat, căci în acest caz, $\beta \vee p'$ este β-normal în structura câtului $\beta \vee x/\beta$ şi deci, conform proprietăţii 2, amintite la începutul acestui alineat, $\beta \vee p'$ va fi β-normal chiar în $\beta \vee x$.

Or, e clar că $y \wedge z \in \beta \vee x/\beta$ adică $\beta \vee x \geqq y \wedge z \geqq \beta$; aşa încât, deoarece β este β-normal în Ω vom putea scrie $y \wedge z = \beta \vee [x \wedge (y \wedge z)]$. Aşa fiind, avem succesiv:

$$p' \vee (y \wedge z) = p' \vee \beta \vee (x \wedge y \wedge z) = \beta \vee [(x \wedge z) \wedge (x \wedge y)] \vee p' \tag{11}$$

Dar p' este β-normal în x (prin ipoteză), deci cum $x \wedge z \geqq p'$, vom avea

$$[(x \wedge z) \wedge (x \wedge y)] \vee p' = x \wedge z \wedge [(x \wedge y) \vee p'] = z \wedge [(x \wedge y) \vee p']. \tag{12}$$

Astfel încât, ţinând seama de (12), relaţia (11) se va scrie mai departe

$$p' \vee (y \wedge z) = \beta \vee \{[(x \wedge y) \vee p'] \wedge z\} = [\beta \vee (x \wedge y) \vee p'] \wedge z \qquad (\text{căci } \beta \lesseqgtr z!).$$

Dar e clar că $\beta \vee (x \wedge y) = y$; încât

$$p' \vee (y \wedge z) = (y \vee p') \wedge z = z \ (\text{căci } z \leqq (\beta \vee p') \vee y = y \vee p'!).$$

In definitiv, egalitatea (10) este dovedită şi cu aceasta lema este demonstrată.

Observație. Concluzia lemei este încă adevărată, dacă p' este β-normal în structura câtului $x/\beta \wedge x$, condiție pe care ipotezele din enunț o îndeplinesc banal.

Consecință. Condiția necesară și suficientă pentru ca o normalitate β să fie *o normalitate unitară* [6] este ca ea să verifice următoarea cerere:

Dacă β este β- normal în structură și x arbitrar, atunci $x/\beta \wedge x$ este cât β- normal.

Este evident că această condiție este necesară; suficiența sa rezultă din faptul că, dacă β este β- normal în structură și $x/y = \beta$ = normal, atunci câtul $x/y \vee (\beta \wedge x) = \beta$- normal, conform cu proprietatea 1 amintită la începutul alineatului și cum $x \geqq y \vee (\beta \vee x) \geqq \beta \wedge x$, urmează, conform lemei precedente, că $\beta \vee x/\beta \vee y \vee (\beta \vee x) = \beta \vee x/\beta \vee y = \beta$- normal.

Propoziția următoare constitue un complement natural al lemei principale.

Lemă. Fie $\Omega \geqq \beta$ *cu* $\Omega/\beta = \beta$-*normal și* $x \in R_\Omega$; *fie de asemenea* p' *cu* $x \geqq p' \geqq \beta \wedge x$. *Atunci, condiția necesară și suficientă pentru ca* $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta$- *normal e ca* p' *să fie* β- *normal relativ la structura câtului* $\beta/x \vee \beta$.

Condiția este necesară. Fie $y \in \beta \vee x/\beta$ cu $y \geqq p'$ (dar altfel y este arbitrar) și fie $z \in \beta \vee x/\beta$; admitem că $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta$- normal. Să arătăm că, în acest caz, avem cu necesitate:

$$y \wedge (z \vee p') = (y \wedge z) \vee p'.$$

Într'adevăr, dacă $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta$- normal atunci, $\beta \vee p'$ este, *a fortiori*, β- normal în structura câtului $\beta \vee x/\beta$. Astfel încât, ținând seama că $\beta \vee x \geqq y \geqq \beta$ și $y \geqq p'$ ne dau $\beta \vee x \geqq y \geqq \beta \vee p' \geqq \beta$ și că $z \in \beta \vee x/\beta$ vom putea scrie

$$y \wedge [z \vee (\beta \vee p')] = (y \wedge z) \vee \beta \vee p',$$

adică, deoarece $y \wedge z \geqslant \beta$

$$y \wedge (z \vee p') = (y \wedge z) \vee p';$$

necesitatea condiției este astfel dovedită.

Condiția este suficientă. Într'adevăr, din $\beta \vee x \geqq y \geqq \beta \vee p'$, $z \in \beta \vee x/\beta$ și relația $y \wedge (z \vee p') = (y \wedge z) \vee p'$ rezultă imediat că $\beta \vee p'$ este β- normal în structura câtului $\beta \vee x/\beta$ și ca atare, conform unei proprietăți a normalității β, folosită de mai multe ori, câtul $\beta \vee x/\beta \vee p'$ va fi β- normal. Lema este demonstrată.

Consecințe. 1. Fie $\Omega \geqq \beta$ cu $\Omega/\beta = \beta$- normal și $x \in R_\Omega$; fie apoi p' cu $x \geqq p' \geqq \beta \wedge x$ și cu $x/p' = \beta$- normal (sau numai cu p' β- normal în structura câtului $x/\beta \wedge x$). Atunci p' este β- normal relativ la structura $\beta \vee x/\beta$.

Proprietatea rezultă imediat din observația care urmează lemei principale combinate cu lema precedentă.

2. In aceleași ipoteze ca în 1, fie p cu $\beta \vee x \geqq p \geqq 3$ și cu $\beta \vee x/p = \beta$- normal. Elementul $x \wedge p$ (corespunzător lui p în conexiunea monotonă $\beta \vee x/\beta \rightleftarrows x/\beta \wedge x$ este β- normal relativ la structura câtului $\beta \vee x/\beta$.

Într'adevăr, avem $p = \beta \vee (x \wedge p)$, iar prin ipoteză, $\beta \vee x/p$ este un cât β- normal. Concluzia rezultă imediat din lema precedentă (necesitatea condiției).

21° Teoremă. *Pentru ca o* β- *normalitate să fie o* $\mathfrak{V}_\alpha$- *normalitate (aşa dar pentru ca* β- *normalitatea să fie o normalitate pentru care relaţia dintre câturile conjugate din ipoteza SZ să fie isomorfismul de structură, este necesar şi suficient ca ea să verifice cererea* II'_1.

Demonstraţie. Mai întâi, deoarece câturile Ω/a, Ω/b sunt β-normale, e clar că avem $a \vee b/a \underset{\sim}{\leftrightarrow} b/a \wedge b$; astfel încât, necesitatea condiţiei II'_1 din enunţul teoremei, este evidentă. Reciproc, afirmăm că această condiţie II'_1 este şi suficientă. Intr'adevăr, dacă avem

$$a \vee b/a \underset{\sim}{\leftrightarrow} b/a \wedge b, \quad a \vee b/b \underset{\sim}{\leftrightarrow} a/a \wedge b,$$

rezultă, mai întâi [1][1]), că $a/a \wedge b$, $b/a \wedge b$ sunt câturi β- normale, aşa dar cererea I_2 se verifică. Deoarece cererea I_1 este verificată de orice β- normalitate şi deoarece cererea II_1 este, din cauza ipotezei noastre (axioma II'_1) banal verificată, rămâne să arătăm că cererea II_2 se verifică de asemenea. Or, dacă p' e cu $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ şi cu $b/p' =$ β- normal rezultă, din cauza isomorfismului [2]) $a \vee b/a \underset{\sim}{\leftrightarrow} b/a \wedge b$ că, $a \vee p'$ este β-normal în structura câtului $a \vee b/a$ şi deci în virtutea proprietăţii 2 dela începutul alineatului 20°, $a \vee p'$ va fi β- normal chiar în structura $R_{a \vee b}$; *q.e.d.*

22° Teoremă. *Pentru ca o* β- *normalitate să fie o* $\mathfrak{V}$- *normalitate (şi deci o* $\mathfrak{V}_\beta$- *normalitate) este necesar şi suficient ca ea să verifice cererile* $I_2 + II_1$ [3]).

Demonstraţie. Se constată imediat că în virtutea proprietăţii 1 dela începutul alineatului 20° şi a lemei principale de acolo, aserţiunea din enunţul acestei teoreme este adevărată.

23° *Normalitatea* β *şi teorema lui Schreier.* In acest alineat analizăm următoarea problemă: fiind date două lanţuri β- normale cu extremităţi comune, se cere să se găsească, în cadrul axiomei $\mathfrak{V}$, condiţiile necesare şi suficiente pentru ca rafinările Zassenhaus ale celor două lanţuri să fie încă β- normale (se va observa că în acest enunţ nu s'a făcut nicio menţiune cu privire la eventualitatea ca, după rafinare, câturile conjugate să fie legate printr'o relaţie oarecare ca isomorfismul de structură, asemănarea în sensul lui Ore etc).

Răspunsul la întrebarea de mai sus este dat de următoarea propoziţie:

Teoremă. *In cadrul cererii* $\mathfrak{V}$, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca două lanţuri* β- *normale cu extremităţi comune să se transforme după aplicarea rafinărilor Zassenhaus în două lanţuri încă* β- *normale, este ca* β- *normalitatea să verifice cererea* I_2 *a lui Uzcov.*

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei din enunţ este evidentă; cât despre suficienţă, ea se verifică uşor dacă ţinem seama de lema din 7° şi de lema principală din 20°.

Observaţie importantă. Pentru teoria normalităţilor a lui Ore, rezultatul precedent are o semnificaţie deosebită: într'adevăr, în lucrarea [2], noi am arătat că în cadrul normalităţii α se poate demonstra o teoremă de rafinare cu isomorfism de structură pentru câturile conjugate;

---

[1]) p. 298.

[2]) Această împrejurare face ca lema principală din 20° să nu fie aici de nicio utilitate, ea putând fi chiar ignorată; altfel stau lucrurile cu teorema din 22°, în demonstraţia căreia lema principală din 20° intervine în mod esenţial.

[3]) Se va observa caracterul complementar al teoremelor din 18° şi 22°

pe de altă parte, rezultatul de mai sus arată că, în cadrul normalității β și la adăpostul cererii I_2 a lui Uzcov, se poate demonstra o teoremă de rafinare de tip « Schreier » [1]).

Aceasta arată în mod limpede care sunt funcțiile axiomatice ale normalităților α și β în teorema de rafinare Schreier-Zassenhaus demonstrată de Ore și completată de Halanay.

24° *Normalitatea* β *în cadrul cererilor* I_+^{**} II^{**}

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă, pentru ca* β*- normalitatea să fie o normalitate* $\mathfrak{V}$ *și deci o* $\mathfrak{V}_\beta$ *- normalitate, este ca această normalitate* β *să verifice cererea* II_1^{**} (17°).

Demonstrație. Mai întâi, e clar că normalitatea β verifică cererea II_2^{**} și I^{**} așa încât criteriul din enunțul teoremei rezultă imediat.

3. Normalitatea $\mathfrak{V}_\beta^0$

25° *Definiție.* In lucrarea [2], am introdus noțiunea de binormalitate prin următoarea cerere: fie $\Omega \geqq \beta$ și $\Omega \geqq b$ cu $\Omega/\beta = \beta$- normal și cu $\Omega//b = \beta$- normal (dar altfel b este arbitrar în R_Ω); elementul β este binormal în Ω, dacă conexiunea monotonă mixtă $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ este perfectă.

Binormalitatea este o subspecie a normalității β, iar seminormalitatea, o subspecie a binormalității; pentru aceasta din urmă, am demonstrat [2] o teoremă Schreier-Zassenhaus de tip clasic, care generalizează pe aceea demonstrată de Halanay [11] în cazul seminormalității.

In paragraful de față ne propunem să adâncim mai departe acest rezultat, demonstrând o teoremă de rafinare pentru o subspecie a β- normalității mai generală decât binormalitatea. Această nouă subspecie este $\mathfrak{V}_\beta^0$ - normalitatea, concept pe care îl introducem prin următoarele cereri:

Fie $\Omega \geqq \beta$ și $\Omega \geqq b$ cu $\Omega/\beta = \beta$- normal și cu $\Omega//b = \beta$- normal; spunem că β este $\mathfrak{V}_\beta^0$- normal în Ω, în semne $\Omega/\beta = \mathfrak{V}_\beta^0$- normal, dacă:

1. *Dacă* p *este cu* $\beta \vee b \geqq p \geqq \beta$ *și cu* $\beta \vee b/p = \beta$*- normal, atunci* $\chi(\beta \vee b)/\chi(p) = b/b \wedge p = \beta$*- normal.*

2. *Dacă* p' *este cu* $b \geqq p' \geqq \beta \wedge b$ *și cu* $b/p' = \beta$*- normal, atunci* p' *este perfect în conexiunea monotonă mixtă* $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ [2]), *în semne* $\chi\varphi(p') = p'$; în 1 și 2, χ, φ au semnificațiile obișnuite.

Verificarea faptului că binormalitatea este o $\mathfrak{V}_\beta^0$- normalitate este aproape banală; avem atunci următoarele incluziuni logice între concepte: seminormalitate $\subset$ binormalitate $\subset \mathfrak{V}_\beta^0$ — normalitate $\subset \beta$ — normalitate.

Pentru demonstrațiile din alineatele următoare, avem nevoie de unele propoziții preliminare, consecințe ale lui 1 și 2.

26° *Propoziții preliminare.* Propoziția A. *Fie* $\Omega \geqq \beta$ *și* $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/\beta = \mathfrak{V}_\beta$*- normal și cu* $\Omega//b = \beta$*- normal; fie de asemenea* $b \geqq p' \geqq \beta \wedge b$ *respectiv* $\beta \vee b \geqq p \geqq \beta$ *cu* $b//p' = \beta$ *— normal respectiv cu* $\beta \vee b//p = \beta$*- normal. Atunci* p' *este perfect în conexiunea monotonă mixtă* $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ *în semne* $\chi\varphi(p') = p'$, *iar* $b//\chi(p) = \beta$*- normal.*

Demonstrație. Intr'adevăr, fie $b \geqq p_1' \geqq p_2' \geqq \ldots \geqq p'$ lanțul β- normal care leagă pe p' de b; conform cu cererea 2, avem $b \wedge (\beta \vee p_1') = p_1'$.

[1] Această lucrare, Apendice, I, 1.

[2]) Care se scrie chiar $\beta \vee b/\beta \leftrightarrow b/\beta \wedge b$, căci β este β- normal în Ω

Deoarece Ω este evident β- normal şi finit accesibil din p_1', iar $p_1'/p_2' =$ β- normal (ipoteză) urmează că în conexiunea monotonă mixtă $\beta \vee p'_1/\beta \rightleftarrows p_1'/\beta \wedge p_1 = p_1'/\beta \wedge b$ putem scrie, pe baza cererii 2, $p_1' \wedge (\beta \vee p_2') = p_2'$ deci şi $b \wedge (\beta \vee p_1') \wedge (\beta \vee p_2') = p_2'$ aşa dar $b \wedge (\beta \vee p_2') = p_2'$ ceea ce înseamnă că p_2' este perfect în conexiunea monotonă $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$.

Considerând acum conexiunea $\beta \vee p_2'/\beta \rightleftarrows p_2'/\beta \wedge p_2' = p_2'/\beta \wedge b$ şi $p_2'/p_3' =$ β- normal (prin ipoteză), arătăm la fel că $b \wedge (\beta \vee p_3') = p_3'$ şi din aproape în aproape, arătăm acelaşi lucru pentru p_4' etc. In definitiv, avem $b \wedge (\beta \vee p') = p'$, adică: p' este perfect în conexiunea $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$.

In ceea ce priveşte partea a doua a concluziei, ea se justifică analog: fie $\beta \vee b \geqq p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p$ lanţul β- normal care leagă pe $\beta \vee b$ de p. Conform cererii 1, rezultă $b/\chi\ (p_1) = \beta$- normal. Deoarece $p_1 = \beta \vee (b \wedge p_1) = \varphi\chi\,(p_1)$ şi cum Ω este β- normal şi finit accesibil din $\chi\ (p_1)$, rezultă că putem aplica cererea 1 conexiunii $p_1/\beta \rightleftarrows b \wedge p_1/b \wedge \beta$; aşa dar, din $p_1/p_2 = \beta$- normal rezultă $\chi\ (p_1)/\chi\ (p_2) = \beta$- normal şi din aproape în aproape, deducem până la urmă că $\chi\,(p)$ este legat de b printr'un lanţ β- normal, anume $b \geqq \chi\,(p_1) \geqq \chi\,(p_2) \geqq \ldots \geqq \chi\,(p)$. Cu aceasta, propoziţia A este complet demonstrată.

P r o p o z i ţ i a B. *Fie* $\Omega \geqq \beta$ *şi* $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/\beta = V_\beta^\circ$- *normal şi cu* $\Omega//b = \beta =$ *normal, atunci* $\Omega//\beta \vee b = \beta$- *normal.*

Fie într'adevăr, $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{s-1} \geqq b_s = b$ lanţul normal care leagă pe Ω de b: dacă arătăm că lanţul

$$\Omega \geqq \beta \vee b_1 \geqq \beta \vee b_2 \geqq \ldots \geqq \beta \vee b_{s-1} \geqq \beta \vee b \qquad (13$$

este β- normal, propoziţia B este demonstrată.

Or, mai întâi, e clar că $\beta \vee b_1$ este β- normal în Ω, deoarece elementele β- normale formează semistructură (O r e). In al doilea rând, rezultă din cererea 1 că $b_j/\beta \wedge b_j = \beta$- normal, pentru fiecare $j = 1, 2, \ldots s$. Din $b_{j-1}/b_j = \beta$- normal şi $b_{j-1}/\beta \wedge b_{j-1} = \beta$- normal, deducem atunci că $b_{j-1}/b_j \vee (\beta \wedge b_{j-1}) = \beta$- normal, dacă deci aplicăm lema principală din 20° conexiunii monotone mixte

$$\beta \vee b_{j-1} \geqq \beta \vee b_j \geqq \beta$$

$$b_{j-1} \geqq b_j \vee (\beta \wedge b_{j-1}) \geqq \beta \wedge b_{j-1},$$

rezultă imediat $\beta \vee b_{j-1}/\beta \vee b_j = \beta$- normal, această ultimă relaţie având loc pentru fiecare $j \geqq 2$. Deoarece $\Omega/\beta \vee b_1 = \beta$- normal, e clar că lanţul (13) e β- normal; *q.e.d.*

P r o p o z i ţ i a C. *Fie* $\Omega \geqq \beta$ *şi* $\Omega \geqq b \geqq b'$ *cu* $\Omega/\beta = \mathfrak{V}_\beta^0$- *normal cu* b, β- *normal şi finit accesibil din* b' *şi cu* Ω, β- *normal şi finit accesibil din* b; *atunci*:

a) $\quad b\,//\,(\beta \wedge b) \vee b' = \beta$- *normal*

b) $\quad b \wedge (\beta \vee b') = (b \wedge \beta) \vee b'.$

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $b \geqq b'_1 \geqq b'_2 \geqq \ldots \geqq b'_{t-1} \geqq b'_t = b'$ lanţul β- normal care leagă pe b' de b; pentru a justifica punctul *a)*, este suficient să arătăm că lanţul

$$b \geqq (\beta \wedge b) \vee b'_1 \geqq (\beta \vee b) \vee b'_2 \geqq \ldots \geqq (\beta \wedge b) \vee b'$$

este β- normal. Or, e clar că $b/(\beta \wedge b) \vee b'_1 = \beta$- normal (rezultă din $b/b'_1 = \beta$- normal și din cererea 1). Fie acum k un întreg pozitiv cu $1 < k \leqq t$; considerăm înfășurările

$$b \geqq (\beta \wedge b) \vee b'_{k-1} \geqq (\beta \wedge b) \vee b'_k \geqq \beta \wedge b$$

$$b'_{k-1} \geqq (\beta \wedge b'_{k-1}) \vee b'_k \geqq \beta \wedge b'_{k-1}.$$

Deoarece $b'_{k-1}/b'_k = \beta$- normal (ipoteza), iar $b'_{k-1}/\beta \wedge b'_{k-1} = \beta$- normal (cererea 1), deducem $b'_{k-1}/(\beta \wedge b'_{k-1}) \vee b'_k = \beta$- normal și deci, aplicând lema principală din 20° conexiunii monotone mixte

$$(\beta \wedge b) \vee b'_{k-1}/\beta \wedge b \rightleftarrows b'_{k-1}/\beta \wedge b'_{k-1},$$

vom putea scrie

$$(\beta \wedge b) \vee b'_{k-1}/(\beta \wedge b) \vee b'_k = \beta\text{- normal.}$$

Cu aceasta, demonstrația punctului *a)* este încheiată. In ceeace privește punctul *b)*, el rezultă din *a)*, prin aplicarea propoziției *A*.

27° Lemă *Fie* $\Omega \geqq \beta$ *și* $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/\beta = \mathfrak{V}_\beta$° *— normal și cu* Ω, β *— normal și finit accesibil din* b; *atunci câtul* $b/\beta \wedge b = \mathfrak{V}_\beta$°- *normal.*

Mai întâi, e clar că $b/\beta \wedge b = \beta$- normal (cererea 1 din 25°); fie însă $b' \leqq b$ cu b, β- normal și finit accesibil din b' și să considerăm următoarele conexiuni monotone

$$\begin{array}{ccccccc} \beta \vee b & \geqq & \beta \vee b' & \geqq & \ldots & & \geqq \beta \\ b & \geqq & (\beta \wedge b) \vee b' & \geqq & q & \geqq \ldots \geqq & \beta \wedge b \\ & & b' & \geqq & q' & \geqq \ldots & \beta \wedge b' \end{array},$$

unde q, q' sunt respectiv cu

$(\beta \wedge b) \vee b'/q = \beta$- normal, $b'/q' = \beta$- normal

dar altfel arbitrare în structurile câturilor cărora aparțin.

Să notăm cu χ, φ, resp. cu σ, τ funcțiile conexiunii $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\wedge b$ resp. ale conexiunii $(\beta \wedge b) \vee b'/\beta \wedge b \rightleftarrows b'/\beta \wedge b'$; rezultă că funcțiile conexiunii $\beta \vee b'/\beta \rightleftarrows b'/\beta \wedge b$ vor fi $\sigma\chi$, $\varphi\tau$. Pentru a demonstra lema, trebue să arătăm că

$$b'/\sigma(q) = \beta\text{- normal}, \quad \sigma\tau(q') = q'.$$

Or, ținând seama de propoziția *C* din 26° și de $(\beta \wedge b) \vee b'/q = \beta$- normal, rezultă că b este β- normal și finit accesibil din q și deci (propoziția *A* din 26°) $\chi\varphi(q) = q$. Operând cu σ, obținem $\sigma\chi\varphi(q) = \sigma(q)$ sau $\sigma\chi.\varphi(q) = \sigma(q)$. Dar, conform cu lema principală din 20°, avem

$$\varphi[(\beta \wedge b) \vee b'](\varphi q) = \beta \vee b'/\varphi(q) = \beta\text{- normal};$$

conform cu cererea 1, *aplicată conexiunii* $\beta \vee b'/\beta \rightleftarrows b'/\beta \wedge b'/\beta \wedge b'$, rezultă mai departe $b'/\sigma\chi.\varphi(q) = \beta$-normal sau, în definitiv $(\sigma\chi.\varphi(q) = \varphi(q)!)$, $b'/\sigma(q) = \beta$-normal: e dovedită prima parte din (14).

A doua parte din (14) se justifică astfel: conform cererii 2, aplicate conexiunii monotone $\beta \vee b'/\beta \rightleftarrows b'/\beta \wedge b'$, putem scrie $\sigma\chi.\varphi\tau(q') = q'$ deci $\sigma.\chi\varphi.\tau(q') = q'$. Dar, din ipoteza $b'/q' = \beta$-normal și din lema principală din 20°, aplicată conexiunii $(\beta \wedge b) \vee b'/\beta \wedge b \rightleftarrows b'/\beta \wedge b'$ rezultă

$\tau(b')/\tau(q') = (\beta \wedge b) \vee b'/\tau(q') = \beta$-normal. Din această ultimă relaţie şi din propoziţia C din 26° (aplicată conexiunii $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$, deducem că $\chi\varphi \cdot \tau(q') = \tau(q')$ din care urmează, ţinând seama de $\sigma \cdot \chi\varphi \cdot \tau(q') = q'$, că $\sigma\tau(q') = q'$; *q.e.d.*

28° Lemă. *Fie* $\Omega \geqq \beta \vee \beta'$ *cu* $\Omega/\beta = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$*-normal şi* $\Omega/\beta' = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$*-normal, atunci* $\Omega/\beta \vee \beta'$ *este de asemenea* $\mathfrak{V}_{\beta}$*-normal.*

Demonstraţie. Intr'adevăr, fie $b \gtrless \Omega$ cu $\Omega//b = \beta$-normal (dar altfel, b este arbitrar în R_{Ω}); conform cu propoziţia B din 26°, rezultă $\Omega//\beta' \vee b = \beta$- normal. Aşa fiind, să considerăm conexiunile monotone următoare:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \vee (\beta' \vee b) = (\beta \vee \beta') \vee b \geqq \beta \vee \beta' \geqq \beta \\ \beta' \vee b = \beta' \vee b \geqq (\beta \vee \beta') \wedge (\beta' \vee b) \geqq \beta \wedge (\beta' \vee b) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \chi \\ \varphi \end{array} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta' \vee b \geqq (\beta \vee \beta') \wedge (\beta' \vee b) \geqq \beta' \\ b \geqq (\beta \vee \beta') \wedge b \geqq \beta' \wedge b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sigma \\ \tau \end{array} \qquad (16)$$

Să notăm cu χ, φ funcţiile conexiunii (15) şi cu σ, τ funcţiile conexiunii (16); rezultă că funcţiile conexiunii $(\beta \vee \beta') \vee b/\beta \vee \beta' \rightleftarrows b/(\beta \vee \beta') \wedge b$ sunt $\sigma\chi$, $\varphi\tau$.

Fie acum p cu $(\beta \vee \beta') \vee b \geqq p \geqq \beta \vee \beta'$ şi cu $(\beta \vee \beta') \vee b/p = \beta$ normal; fie de asemenea p' cu $b \geqq p' \geqq (\beta \vee \beta') \wedge b$ şi cu $b/p' = \beta$-normal. Pentru a demonstra lema, este suficient să arătăm că în conexiunea $(\beta \vee \beta') \vee b/\beta \vee \beta' \rightleftarrows b/(\beta \vee \beta') \wedge b$, avem

$$b/\sigma\chi(p) = \beta\text{-normal}, \quad \sigma\chi \cdot \varphi\tau(p') = p' \qquad (17)$$

(căci avem $\Omega/\beta \vee \beta' = \beta$-normal).

Or, aplicând cererea 1 din 25° succesiv conexiunilor (15), (16), obţinem

$$\beta' \vee b/\chi(p) = \beta\text{-normal} \quad b/\sigma\chi(p) = \beta\text{-normal},$$

adică prima parte din (17). In ceea ce priveşte a doua parte din (17), aplicând cererea 2 din 25° mai întâi lui (16), apoi lui (15), obţinem succesiv, prin mijlocirea lemei principale din 20°

$$\sigma\chi \cdot \varphi\tau(p') = \sigma \cdot \chi\varphi \cdot \tau(p') = \sigma\tau(p') = p'.$$

Cu aceasta, demonstraţia este încheiată.

29° Lemă *Fie* $\Omega \geqq \beta$, $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/\beta = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$*-normal şi cu* $\Omega//b = \beta$*-normal; fie de asemenea* $b \geqq p \geqq \beta \wedge b$ *cu* $b/p' = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$*-normal. Atunci câtul* $\beta \vee b/\beta \vee p'$ *este* $\mathfrak{V}_{\beta}$ *— normal.*

Demonstraţie. Facem, mai întâi, observaţia următoare: dacă avem $\Omega \geqq x \geqq y$ cu $\Omega' y = \mathfrak{V}_{\beta}$-normal şi cu $\Omega//x = \beta$-normal, atunci, $x/y = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$-normal *(proprietatea de retronormalitate relativă)*. Intr'adevăr, conform lemei din 27°, trebue să avem $x/y \wedge x = \mathfrak{V}_{\beta}$-normal. Rezultă din această observaţie că avem, sub ipotezele lemei actuale $\beta \vee b/\beta = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$-normal, căci $\Omega \geqq \beta \vee b \geqq \beta$ unde $\Omega/\beta = \mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$ normal şi unde Ω este β-normal şi finit accesibil din b (propoziţia B din 26°!).

Fie acum $\bar{b}$ cu $\bar{b} \leqq \beta \vee b$ şi astfel ca $\beta \vee b$ să fie β-normal şi finit accesibil din $\bar{b}$.

Pentru a demonstra lema, este suficient să arătăm că, conexiunea monotonă mixtă

$$(\beta \vee p') \vee \bar{b}/\beta \vee p' \rightleftarrows \bar{b}/(\beta \vee p') \wedge \bar{b} \qquad (18$$

verifică cererile 1 și 2 din 25° (că $\beta \vee b/\beta \vee p' = \beta$-normal, aceasta e clar, conform lemei principale din 20°). In acest scop, să considerăm următoarele incluziuni:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta \vee b \geqq (\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b}) \geqq q \geqq \beta \vee p' \geqq \beta \\ \beta \vee b \geqq \qquad\qquad \beta \vee b \geqq \ldots \geqq (\beta \vee p') \wedge (\beta \vee \bar{b}) \geqq \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \bar{b} \geqq q' \geqq (\beta \vee p') \wedge b \geqq \beta \wedge \bar{b} \end{array}\right.$$

$$b \geqq p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})] \geqq b \wedge q \geqq p' \geqq \beta \wedge b$$

$$b \geqq b \wedge (\beta \vee \bar{b}) \geqq \ldots \geqq p' \wedge (\beta \vee \bar{b}) \geqq \beta \wedge \bar{b},$$

unde $(\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})/q = \beta$-normal și $b/\bar{q}' = \beta$-normal.

Câteva explicații sunt necesare cu privire la incluziunile precedente. Fie χ, φ, funcțiile conexiunii $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ așa dar

$$\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b \text{ mod } \chi, \varphi.$$

Să punem de asemenea

$$(\beta \vee p) \vee (\beta \vee \bar{b})/\beta \vee p' \rightleftarrows \beta \vee \bar{b}/(\beta \vee p') \wedge (\beta \vee \bar{b}) \text{ mod } \sigma, \tau \qquad (19)$$

$$p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]/p' \rightleftarrows b \wedge (\beta \vee \bar{b})/(\beta \vee \bar{b}) \wedge p' \text{ mod } \sigma', \tau' \qquad (19')$$

$$\beta \vee \bar{b}/\beta \rightleftarrows \bar{b}/\beta \wedge \bar{b} \text{ mod } \bar{\chi}, \bar{\varphi}. \qquad (20)$$

Din (19 și (20) rezultă că funcțiile conexiunii (18) sunt $\overline{\chi\sigma}$, $\tau\varphi$; vom arăta mai întâi, că avem

$$\left\{\begin{array}{l} \chi[(\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})] = p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})] \;,\; \chi(\beta \vee p') = p' \\ \chi(\beta \vee \bar{b}) = b \wedge (\beta \vee \bar{b}) \;,\; \chi[(\beta \vee p') \wedge (\beta \vee b)] = p' \wedge (\beta \vee \bar{b}). \end{array}\right. \qquad (21)$$

Dintre aceste egalități, (21) singură prima din (21) cere o justificare, celelalte fiind aproape evidente. Pentru a justifica egalitatea în chestiune, vom observa mai întâi că deoarece $\beta \vee b/\beta = \mathfrak{V}_\beta^\circ$ — normal, iar $\beta \vee b$ este β-normal și finit accesibil din $\bar{b}$ urmează (propoziția B din 26°), că $\beta \vee b$ este β-normal și finit accesibil din $\beta \vee \bar{b}$; rezultă atunci că b este β-normal și finit accesibil din $\chi(\beta \vee \bar{b}) = b \wedge (\beta \vee \bar{b})$, (propoziția A din 26°, partea a doua). Dar $b/p' = \mathfrak{V}_\beta^\circ$-normal deci b este β-normal și finit accesibil din $p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]$, rezultă atunci din propoziția A (prima parte) că elementul $p \vee [b \wedge (\beta \vee b)]$ este perfect în conexiunea monotonă $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$. Putem scrie atunci, succesiv

$$p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})] = b \wedge \{\beta \vee p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]\} = b \wedge \{p' \vee [(\beta \vee b) \wedge (\beta \vee \bar{b})]\} =$$

$$= b \wedge [(\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})]; \varkappa[(\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})] = p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})].$$

Mai rezultă (cu lema principală din 20°, aplicată conexiunii $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$), că $\beta \vee b$ este β-normal și finit accesibil din $\varphi\{p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]\} = (\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})$.

Considerând acum ipoteza $(\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})/q = \beta$-normal şi ţinând seama de cele ce preced, vom putea scrie succesiv (aplicând mereu cererea 1 din 25°):

$$p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]/\chi(q) = \beta\text{-normal}$$

$$b \wedge (\beta \vee \bar{b})/\sigma'\chi(q) = \beta\text{-normal}$$

$$\beta \vee \bar{b}/\varphi\sigma'\chi(q) = \beta\text{-normal (cu lema principală din 20°)}$$

$$\bar{b}/\bar{\chi}\varphi\sigma'\chi(q) = \beta\text{-normal.}$$

Afirmăm că $\chi\varphi\sigma'\chi(q) = \bar{\chi}\sigma(q)$; într'adevăr, se verifică îndată că

$$\sigma'\chi(q) = \chi\sigma(q) \tag{22}$$

(chiar pentru orice $q \in (\beta \vee p') \vee (\beta \vee \bar{b})/\beta \vee p'$ deci $\varphi\sigma'\chi(q) = \varphi\chi\sigma(q) = \varphi\bar{\chi}.\sigma(q) = \sigma(q)$.

Rezultă $\bar{\chi}\varphi\sigma'\bar{\chi}(q) = \bar{\chi}\sigma(q)$. Avem, aşa dar

$$\bar{b}/\bar{\chi}\sigma(q) = \beta\text{-normal}$$

ceea ce arată că conexiunea (18) verifică cererea 1 din 25°.

Pentru a verifica şi cererea 2 din 25°, să considerăm ipoteza $\bar{b}/q' = \beta$-normal; trebue să arătăm că

$$\bar{\chi}\sigma.\bar{\tau\varphi}(q') = q'.$$

Fie, în acest scop, $\bar{q} \in \beta \vee \bar{b}/(\beta \vee p') \wedge (\beta \vee \bar{b})$ cu $\beta \vee \bar{b}/\bar{q} = \beta$-normal atunci avem:

$$\tau'\varkappa(\bar{q}) = \varkappa\tau(\bar{q}), \tag{23}$$

(înfăşurarea $\tau'\chi(\bar{q}) \leqq \chi\tau(\bar{q})$ este aproape evidentă!).

Or, se verifică îndată că avem $\varphi\tau'(r') = \tau\varphi(\bar{r})$ pentru orice $\bar{r} \in b \wedge (\beta \vee \bar{b})/p' \wedge (\beta \vee \bar{b})$; rezultă succesiv: $\varphi.\tau'\chi(\bar{q}) = \varphi\tau'.\chi(\bar{q}) = \tau\varphi.\chi(\bar{q}) = \tau.\varphi\chi(\bar{q}) = \tau(\bar{q}) = \varphi\chi.\tau(\bar{q}) = \varphi.\chi\tau(\bar{q})$, aşa dar $\varphi.\tau'\chi(\bar{q}) = \varphi.\chi\tau(\bar{q})$ (24)

Să facem să intervină ipoteza $\beta \vee \bar{b} \mid \bar{q} = \beta$-normal; în acest caz, folosind cererea 1 din 25° şi lema principală din 20°, putem scrie

$$p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b}]/\tau'\chi(\bar{q}) = \beta\text{-normal}$$

$$p' \vee [b \wedge (\beta \vee \bar{b})]/\chi\tau(\bar{q}) = \beta\text{-normal.}$$

Rezultă că $\tau'\chi(\bar{q}), \chi\tau(\bar{q})$ sunt perfecte în conexiunea $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ (conform propoziţiei A din 26°); aşa dar, aplicând pe χ în (24), obţinem $\tau'\chi(\bar{q}) = \chi\tau(\bar{q})$, adică (23).

Fie acum $\bar{b} \geqq q' \geqq (\beta \vee p') \wedge \bar{b}$ unde, conform ipotezei, $\bar{b}/q' = \beta$-normal; e clar că avem $\beta \vee \bar{b}/\bar{\varphi}(q') = \beta$-normal, deci $\bar{\varphi}(q')$ este un $\bar{q}$ ca cel din (23). Aplicând pe χ intervalului $\beta \vee b \geqq \bar{\varphi}(q')$ căpătăm evident $b \wedge (\beta \vee b)\ \chi/\bar{\varphi}(q') \fallingdotseq \beta$-normal, căci $\beta \vee b$ este, cum am spus, β-normal şi finit accesibil din $\beta \vee b$. Rezultă că $\chi\,\bar{\varphi}(q')$ este perfect în conexiunea (19′) (căci $b/p' = \mathfrak{V}^0_\beta$ normal!) adică, în semne, $\sigma'\tau' \cdot \chi\,\bar{\varphi}(q') = \chi\,\bar{\varphi}(q')$.

Aplicând pe (23), apoi pe (22), ultimei egalități, obținem succesiv

$$\chi\,\overline{\varphi}\,(q') = \sigma'\,\tau'.\chi\,\overline{\varphi}\,(q') = \sigma'\,\chi\,\tau\,\overline{\varphi}\,(q') = x\,\sigma\,\tau\,\overline{\varphi}\,(q'),$$

adică $\chi\,\overline{\varphi}\,(q') = \chi\,\sigma\,\tau\,\overline{\varphi}\,(q')$ și deci, aplicând acestei din urmă relații pe φ:

$$\sigma\,\tau\,\overline{\varphi}\,(q') = \overline{\varphi}\,(q'). \tag{25}$$

In sfârșit, ținând seama de (25), putem scrie

$$\overline{\chi}\,\sigma\cdot\tau\,\overline{\varphi}\,(q') = \overline{\chi}\cdot\sigma\,\tau\cdot\overline{\varphi}\,(q') = \overline{\chi}\,\overline{\varphi}\,(q') = q'$$

Cu aceasta, lema este complet demonstrată.

30° *Teoreme de rafinare și de descompunere pentru normalitatea* $\mathfrak{N}_\beta^0$. Din propozițiile demonstrate în alineatele din 25°—28°, rezultă imediat că $\mathfrak{N}_\beta^0$-normalitatea este o normalitate $\mathfrak{N}$ în sensul precizat în alineatul 12°; mai mult, e clar că normalitatea $\mathfrak{N}_\beta^0$, ca normalitate $\mathfrak{N}$, este o subspecie a normalității $\mathfrak{N}_\beta$.

Ținând seama de rezultatul din 12°, precum și de un rezultat al nostru mai vechi [1] [1]) teorema de rafinare pentru normalitatea $\mathfrak{N}_\beta^\circ$ se va putea enunța astfel:

Teorema Schreier-Zassenhaus. *Două lanțuri* $\mathfrak{N}_\beta^\circ$*-normale, cu extremități comune, posedă rafinări Zassenhaus încă* $\mathfrak{N}_\beta^\circ$*-normale, cu căuturi conjugate asemenea, și legate prin conexiuni monotone de specia a doua. In plus, avem:*

$$\mathfrak{M}\left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right) \leftrightarrow \mathfrak{M}\left(\frac{b_{j,i-1}}{b_{ji}}\right),$$

notațiile fiind cele din 12°.

Teorema de descompunere pentru normalitatea $\mathfrak{N}_\beta^\circ$ sună astfel:

Teorema Jordan-Hölder. *Două șiruri* $\mathfrak{N}_\beta^\circ$*-normale, cu extremități comune, cu aceeași lungime, iar intervalele lor sunt asemenea și legate (într'o anumită ordine) prin conexiuni monotone de specia a doua.*

In cadrul normalităților lui Ore, această teoremă Jordan-Hölder este probabil, cea mai generală, obținută până în prezent.

§ 4 *Asupra independenței noțiunilor de* α*-normalitate și* β*-normalitate*

31° *Structura lui Dedekind a celor nouă elemente.* In cele ce urmează, vom produce un exemplu de structură finită posedând elemente α-normale și β-normale nebanale (diferite, adică, de primul și ultimul element al structurii); vom arăta în plus că elementele α-normale de care e vorba nu sunt β-normale, și invers.

Considerăm structura finită de 9 elemente din schema de mai jos.

In figura 1, săgeata $\rightarrow$ ce figurează între elemente x, y, fie $x \rightarrow y$, înseamnă că $x > y$ și că intervalul respectiv este absolut prim.

Structura aceasta, care a fost considerată mai întâi de către Richard Dedekind în cercetările sale asupra structurilor modulare, este ceea ce am numit nonagramul lui Dedekind și o vom nota în cele ce urmează cu Δ.

[1]) 2°, ex. *B*.

E clar, mai întâi, că structura Δ este *nemodulară*; într'adevăr, avem

$$a_1 \wedge (b \vee a_2) = a_1 \wedge c_1 = d_1; (a_1 \wedge b) \vee a_2 = c_2 \vee a_2 = d_2,$$

aşa dar, cum $d_1 > d_2$, rezultă

$$a_1 \wedge (b \vee a_2) > (a_1 \wedge b) \vee a_2.$$

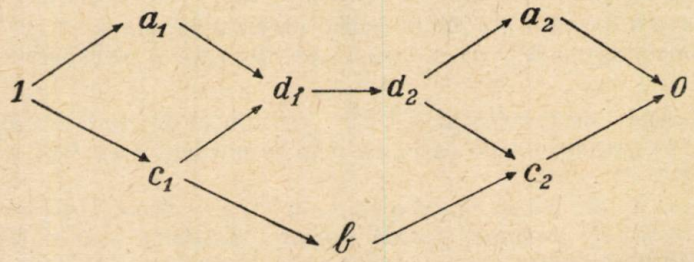
Din această ultimă relaţie rezultă imediat că:

1) în structura Δ, elementul b *nu* este α- normal;

2) în Δ, elementul a_1 nu este β^2- normal, iar a_2 nu este β^1- normal.

Vrem să arătăm că în Δ, elementul b este β^1- normal (şi β^2- normal).

Or, se ştie că într'o structură S, un element $\beta \in S$ este β^1- normal în S, dacă pentru orice $x \in S$ şi orice $z \in S$ cu $\beta \vee x \geqq z \geqq \beta$ avem $\beta \vee (x \wedge z) = z$;



deoarece această condiţie este îndeplinită pentru orice $x \in S$ cu $x \geqq \beta$ sau $x \leqq \beta$, rămâne să o verificăm pentru toţi acei $x \in S$ care nu au cu β nicio relaţie de incluziune şi încă, în mulţimea acestor din urmă x, ne putem foarte bine mărgini la aceia pentru care intervalul $\beta \vee x > \beta$ nu este absolut prim.

In cazul structurii Δ, singurul $x \in \Delta$ pentru care avem $x \not\leqq b$, $x \not\geqq b$ şi intervalul $b \vee x > b$ nu este absolut prim, este evident $x = a_1$, ceea ce se verifică fără dificultate. Or, calculul ne dă succesiv:

$$b \vee (a_1 \wedge c_1) = b \vee d_1 = c_1.$$

E dar dovedit că b este β^1- normal în Δ; prin consideraţii duale, se arată că b este şi β^2- normal în Δ.

Să arătăm acum că a_2 este α- normal în structura Δ. Folosind aceleaşi consideraţii ca în cazul precedent, este uşor să ne dăm seama că, pentru a dovedi α- normalitatea lui a_2 în Δ, e necesar şi suficient să verificăm că

$$b \wedge (a_2 \wedge c_2) = c_2 \qquad (b > c_2 > a_2 \wedge b = 0).$$

Or, aceasta este evident: $b \wedge (a_2 \wedge c_2) = b \wedge d_2 = c_2$.

Dual, se arată că a_1 este şi el α — normal în Δ.

In sfârşit, se constată uşor că a_1 este β^1- normal iar a_2, β^2- normal. Din cele ce preced, rezultă mai întâi că β- normalitatea (chiar autoduală — cazul elementului b de mai sus) nu implică α- normalitatea; apoi, că semi normalitatea (de prima specie resp. de a doua specie) nu implică β^2- normalitatea resp. β^1- normalitatea încât, *a fortiori* α- normalitatea nu poate implica β- normalitatea.

Problema independenței noțiunilor de α- normalitate și de β- normalitate este așa dar rezolvată; rămâne chestiunea independenței noțiunilor de β^1- normalitate și β^2- normalitate, despre care exemplul precedent nu ne instrueşte [1]).

CAPITOLUL III

NORMALITATEA RELATIVĂ

32° *Introducere.* Scopul acestui capitol este să prezinte o axiomatizare a teoremei Schreier—Zassenhaus pentru lanțuri α- normale, demonstrată în lucrarea noastră [2].

Cadrul axiomatizării actuale este următoarea cerere *de relativizare*: $\mathfrak{R}$. Fie $\Omega \geqq a$ cu Ω/a = normal; atunci Ω/a = normal *relativ la structura câtului* Ω/a.

Introducem, pentru clarificarea înțelesului cererii $\mathfrak{R}$, următoarele definiții:

Dacă $\Omega \geqq a$ cu Ω/a = normal, vom spune că a este normal în structura R_Ω și invers; de asemenea, dacă $\Omega \geqq a \geqq a'$ cu Ω/a = normal relativ la structura câtului Ω/a', vom spune că a este normal în această structură, și invers. In fine, $\Omega \geqq a'' \geqq a' \geqq a$ cu „a''/a' = normal relativ la a''/a, este tot una cu «a''/a' = normal relativ la Ω/a».

Noțiunea de normalitate relativă constitue o generalizare a normalității lui Uzcov, conducând la teoreme de rafinare Schreier-Zassenhaus mai sărace în conținut dar, încă semnificative. Adăugăm că noțiunea de normalitate relativă a fost introdusă de către Prof. D. B a r b i l i a n [6], dar numai în cadrul normalităților lui O. Ore.

Un tip important de normalitate relativă este de sigur normalitatea α (vezi mai departe 35°).

Pentru axiomatizarea pe care o avem în vedere, cererea $\mathfrak{R}$ este încă prea largă; ea poate fi întărită, potrivit scopului, prin adăugarea uneia sau alteia din următoarele două cereri:

1) Cererea noastră preliminară $\mathfrak{V}$;

2) Cererea $\widetilde{\mathfrak{V}}$, al cărei enunț este următorul:

$\widetilde{\mathfrak{V}}$. Fie $\Omega \geqq a$ și $\Omega \geqq b' \geqq b$ cu Ω/a = *normal* Ω/b = *normal și* Ω/b' = *normal relativ la structura câtului* Ω/b; *atunci*, $b'/a \wedge b'$ = *normal.*

E clar că cererea $\widetilde{\mathfrak{V}}$ implică cererea I_2 a lui Uzcov și deci, *a fortiori*, cererea $\mathfrak{V}$; într'adevăr, dacă $\Omega \geqq b$ cu Ω/b = normal, atunci rezultă din cererea $\mathfrak{R}$ că Ω/b = normal relativ la structura câtului Ω/b. Dar, în acest caz, conform cererii $\widetilde{\mathfrak{V}}$, putem scrie $b/a \wedge b$ = normal.

In cadrul cererilor $\mathfrak{R} + \mathfrak{V}$, axiomele normalității relative sunt următoarele:

1. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* Ω/a = *normal și* Ω/b = *normal*; *atunci*

1. 1. $\Omega/a \vee b$ = *normal, relativ la structura câtului* Ω/a resp. Ω/b;

1. 2. *Câturile* $b/a \wedge b$, $a/a \wedge b$ *sunt simultan normale*;

2. *Fie* $\Omega \geqq a$ *și* $\Omega \geqq x$ *cu* Ω/a = *normal și cu* $\Omega//x$ = *normal*; *atunci*

2. 1. *Din* $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ *cu* x/p' = *normal relativ la* $x/a \wedge x$, *rezultă* $a \vee x/a \vee p'$ = *normal relativ la* $a \vee x/a$.

2. 2. *In aceeași ipoteză ca în* 2. 1, *avem* $\chi\varphi(p') = p'$ *unde* χ, φ *sunt funcțiile ce definesc conexiunea monotonă mixtă* $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$.

[3]) Exemplul dat ne arată însă că β-normalitatea *autoduală* ($\beta^1 + \beta^2$) și seminormalitatea autoduală sunt noțiuni independente. Există însă structuri în care cele două noțiuni coincid, de exemplu structurile nulo-concave [6].

In cadrul cererilor $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{P}}$, *axiomele normalității relative sună astfel:*

1*. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* Ω/a = *normal și* Ω/b = *normal, atunci*

1*. 1. $\Omega/a \vee b$ = *normal relativ la* Ω/a *resp.* Ω/b.

2*. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* Ω/a = *normal și* Ω/b = *normal, atunci*

2*. 1. *Din* $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ *cu* b/p' = *normal relativ la* $b/a \wedge b$ *rezultă* $a \vee b/a \vee p'$ = *normal relativ la câtul* $a \vee b/a$.

2*. 2. *In aceeași ipoteză ca în* 2*. 1 *avem* $\chi\varphi(p') = p'$ *unde* χ, φ *sunt funcțiile ce definesc conexiunea monotonă mixtă* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

Sistemul 1+2, cu cererile preliminare $\mathfrak{R}+\mathfrak{P}$, este de tipul sistemului originar al lui Uzcov, în timp ce sistemul 1*+2*, cu cererile preliminare $\mathfrak{R}+\widetilde{\mathfrak{P}}$ este de tipul sistemului nostru I+II de axiome al normalității $\mathfrak{P}$ (cap. I).

Cu privire la relația între cele două sisteme de axiome de mai sus, $\mathfrak{R}+\mathfrak{P}+1+2$ și $\mathfrak{R}+\widetilde{\mathfrak{P}}+1^*+2^*$, este de notat faptul că *primul este întotdeauna o consecință logică a celui de al doilea* (demonstrația mai departe), fără ca reciproca să aibă loc în mod obligatoriu; se va observa totuși că aserțiunile 1^*+2^* spun mai puțin decât aserțiunile 1+2.

Această din urmă împrejurare, precum și faptul că în aplicații, axioma $\widetilde{\mathfrak{P}}$ este întotdeauna verificată (chiar sub o formă mai tare), arată că sistemul $\mathfrak{R}+\widetilde{\mathfrak{P}}+1^*+2^*$ este preferabil sistemului $\mathfrak{R}+\mathfrak{P}+1+2$ în ceea ce privește analiza normalităților *relative* din sistemele algebrice uzuale.

Vom nota, în sfârșit, că o normalitate relativă care verifică cererea de mai jos (numită axioma lui Curoș R_χ):

Dacă $\Omega \geqq \overline{a} \geqq a$ cu Ω/a = normal și $\Omega/\overline{a}$ = normal relativ la Ω/a atunci, Ω/a = normal, - este o normalitate « absolută ».

Acesta este cazul normalității β.

33°. *Ipoteza SZ «relativizată»*. Fie R o normalitate care verifică cererile $\mathfrak{R}+\mathfrak{P}$; asupra acestei normalități facem următoarea ipoteză:

Ipoteza SZ relativizată. Două lanțuri normale, cu extremități comune

$$\begin{matrix} a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{i-1} \geqq a_i \geqq \ldots \geqq a_r \\ b_0 \geqq b_1 \geqq \ldots \geqq b_{j-1} \geqq b_j \geqq \ldots \geqq b_s \end{matrix} \qquad (a_0 = b_0,\ a_r = b_s).$$

se transformă prin rafinările lui Zassenhaus în două lanțuri, astfel încât intervalele conjugate să fie asemenea (în sensul lui Ore) și astfel ca fiecare interval $a_{i-1} \geqq a_i$ ($i=1,2,\ldots,r-1$), resp. $b_{j-1} \geqq b_j$ ($j=1,2,\ldots s-1$) să fie acoperit de un lanț normal *relativ la structura acestui interval* $a_{i-1} \geqq a_i$, resp. $b_{j-1} \geqq b_j$, intervalele $a_{r-1} \geqq a_r$ și $b_{s-1} \geqq b_s$, fiind acoperite de lanțuri normale.

Se poate arăta că *această ipoteză SZ este totdeauna o consecință logică a sistemului* $\mathfrak{R}+\mathfrak{P}+1+2$, demonstrația fiind cea uzuală. Reciproca, anume că *ipoteza SZ relativizată + cererea* $\mathfrak{P}$ *au drept consecință logică sistemul* 1+2, se poate demonstra cu prețul următoarei întăriri a cererii $\mathfrak{R}$:

$\widetilde{R}$. *Dacă* $\Omega \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r$ *este un lanț «absolut» normal, atunci este un lanț normal și relativ la structura câtului* $\Omega \geqq a_r$.

Cu alte cuvinte, dacă avem a_{i-1}/a_i = normal pentru $i = 1, 2, \ldots, r$ ($a_0 = \Omega$) atunci, avem și a_{i-1}/a_i = normal relativ la structura câtului a_{i-1}/a_r, $i = 1, 2, \ldots, r$.

In ceea ce privește relația dintre ipoteza *SZ* relativizată și sistemul $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{P}} + 1^* + 2^*$, se poate spune că, deoarece acest sistem are drept con-

secință logică sistemul $\mathfrak{R} + \mathfrak{P} + 1 + 2$ (v. 34°), ipoteza *SZ* relativizată va fi, conform celor precedente, o consecință a sistemului $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{P}} + 1^* + 2^*$.

34° *Despre implicația logică* $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{P}} + 1^* + 2^* \quad \mathfrak{R} + \mathfrak{P} + 1 + 2$. Demonstrația implicației din titlu urmează, în esență, linia demonstrațiilor din alineatele 8°, 9°.

L e m a 1. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/a = normal$, $\Omega/b = normal$; *fie de asemenea* p' *cu* $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ *și cu* b *normal și finit accesibil din* p' *relativ la structura câtului* $b/a \wedge b$. *Atunci*:

1) $a \vee b$ *este normal și finit accesibil din* $a \vee p'$ *relativ la structura câtului* $a \vee b/a$; 2) *elementul* p' *este perfect în conexiunea monotonă mixtă*

$$a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b.$$

D e m o n s t r a ț i e. Intr'adevăr, fie $b \geqq p'_1 \geqq p'_2 \geqq \ldots \geqq p'$, lanțul normal *relativ la structura* $b/a \wedge b$ care leagă — prin ipoteză — pe p' de b.

Deoarece $b/p'_1 =$ normal relativ la $b/a \wedge b$ urmează, conform cererii $2^*.1$ că $a \vee b/a \vee p' =$ normal relativ la $a \vee b/a$, iar, conform cererii $2^*.2$ urmează că $\chi\varphi\,(p'_1) = p'_1$. Or, această ultimă relație se scrie explicit $b \wedge (a \vee p'_1) = p'_1$; deoarece, pe de altă parte, $a \vee b/a \vee p'_1 =$ normal relativ la $a \vee b/a$, deci $a \vee p'_1/a$-normal (căci $a \vee b/a =$ normal conform lui $\widetilde{\mathfrak{P}}$ și $1^*.1$) rezultă, aplicând din nou pe $\widetilde{\mathfrak{P}}$ înfășurărilor:

$$a \vee b \geqq a \vee p'_1 \geqq a,$$

$$a \vee b \geqq b,$$

că vom putea scrie

$$a \vee p'_1/b \wedge (a \vee p'_1) = \text{normal},$$

adică $a \vee p'_1/p'_1 =$ normal. Rezultă de aici că p'_2 are în conexiunea

$$a \vee p'_1/a \rightleftarrows p'_1/a \wedge p'_1$$

rolul pe care p'_1 îl are în conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$; raționamentul precedent arată, în acest caz, că $a \vee p'_1/a \vee p'_2 =$ normal relativ la $a \vee p'_1/a$ (sau, ceea ce e tot una, relativ la $a \vee b/a$), că p'_2 este perfect în conexiunea $a \vee p'_1/a \rightleftarrows p'_1/a \wedge p'_1$ și că $a \vee p'_2/p'_2 =$ normal. Or, din faptul că p'_2 este perfect în $a \vee p'_1/a \rightleftarrows p'_1/a \wedge p'_1$ rezultă, după cum știm, că p'_2 este *perfect chiar în* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$.

Considerând acum pe p'_3 în conexiunea $a \vee p'_2/a \rightleftarrows p'_2/a \wedge p'_2$ putem, conform celor ce preced, continua același raționament, obținând $a \vee b/a \vee p'_3 =$ normal relativ la $a \vee b/a$, $\chi\varphi\,(p'_3) = p'_3$ și $a \vee p'_3/p'_3 =$ normal. Pe acest drum, din aproape în aproape, conchidem că lanțul

$$a \vee b \geqq a \vee p'_1 \geqq a \vee p'_2 \geqq \ldots \geqq a \vee p'$$

este normal relativ la $a \vee b/a$ și că $\chi\varphi\,(p') = p'$; *q.e.d.*

L e m a 2. *Fie* $\Omega \geqq a$ *și* $\Omega \geqq x$ *cu* $\Omega/a = normal$ *și cu* $\Omega//x = normal$; *fie de asemenea* p' *cu* $x \geqq p \geqq a \wedge x$ *și cu* $x/p' = normal$ *relativ la* $x/a \wedge x$. *Atunci*

1) $a \vee x/a \vee p' = normal$ *relativ la* $a \vee x/a$; 2) $\chi\varphi\,(p') = p'$, *unde* χ, φ *sunt funcțiile ce definesc conexiunea monotonă mixtă* $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$.

Vom demonstra ceva mai mult, şi anume că, dacă p' e cu $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ şi cu $x//p' =$ normal, relativ la $x/a \wedge x$, *atunci* $a \vee x//a \vee p' =$ *normal relativ la* $a \vee x/a$, *iar* $\chi\varphi(p') = p'$.

Fie $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{s-1} \geqq b_s = x$, lanţul normal ce uneşte pe x cu Ω; vom demonstra afirmaţia din enunţ printr'o inducţie finită asupra indicilor j ($j = 1, 2, \ldots, s$).

Pentru $j = 1$, prima treaptă a inducţiei, lema se verifică deoarece ea coincide în acest caz cu lema 1. Admitem deci că lema se verifică pentru toţi indicii j mai mici decât un indice fix j ($j > 1$), dar arbitrar ales şi să arătăm că, în acest caz, ea se verifică şi pentru indicele j.

Or, e clar că $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1} =$ normal (pentru orice j; aceasta rezultă din $\widetilde{\mathfrak{V}}$, în cadrul căreia am văzut că cererea lui Uzcov I_2 se verifică); dar avem şi $b_{j-1}/b_j =$ normal. Dacă deci, în conexiunea monotonă mixtă $(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j/a \wedge b_{j-1} \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j$ considerăm un element q' cu $b_j \geqq q' \geqq a \wedge b_j$ şi cu b_j normal şi finit accesibil din q', relativ la $b_j/a \wedge b_j$ (dar altfel, q' este arbitrar), $b_j \geqq q'_1 \geqq q'_2 \geqq \ldots \geqq q' \geqq a \wedge b_j$, vom avea în

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'_1 \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'_2 \geqq \ldots \geqq \ldots \geqq \tag{26}$$
$$\geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'$$

un lanţ normal relativ la $(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j/a \wedge b_{j-1}$, iar $\chi\varphi(q') = q'$ unde χ, φ sunt funcţiile conexiunii

$$(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j/a \wedge b_{j-1} \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j.$$

Or, conform cererii $1^*.1$, e clar că $b_{j-1}/(a \wedge b_{j-1}) \vee b_j$ T normal relativ la structura $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$. Deci, nu numai lanţul (26) este normal relativ la $b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$, dar chiar lanţul

$$b_{j-1} \geqq (a \wedge b_{j-1}) \wedge b_j \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'_1 \geqq \ldots \geqq (a \wedge b_{j-1}) \vee q'.$$

Incadrând acest lanţ în conexiunea $a \vee b_{j-1}/a \rightleftarrows b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}$, conchidem, *conform ipotezei raţionamentului prin recurenţă, că lanţul*

$$a \vee b_{j-1} \geqq a \vee b_j \geqq a \vee q'_1 \geqq \ldots \geqq a \vee q'$$

este normal relativ la $a \vee b_{j-1}/a$ şi deci şi la $a \vee b_j/a$ şi că $\tau\sigma[(a \wedge b_{j-1}) \vee q'] = (a \wedge b_{j-1}) \vee q'$ unde τ, σ sunt operaţiile ce definesc conexiunea

$$a \vee b_{j-1}/a \rightleftarrows b_{j-1}/a \wedge b_{j-1}.$$

Deoarece $(a \wedge b_{j-1}) \vee q' = \varphi(q')$, avem $\tau\sigma \cdot \varphi(q') = \varphi(q')$, deci $\chi\tau \cdot \sigma\varphi(q') = \chi\varphi(q') = q'$; dar $\chi\tau$ şi $\sigma\varphi$ sunt operaţiile ce definesc conexiunea $a \vee b_j/a \rightleftarrows b_j/a \wedge b_j$, cum se verifică imediat. Cu aceasta, lema 2 este complet demonstrată, căci recurenţa funcţionează.

Luarea împreună a rezultatelor precedente arată că sistemul $\mathfrak{R} + \mathfrak{V} + 1 + 2$ este totdeauna o consecinţă logică a sistemului $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{V}} + 1^* + 2^*$.

35° *Exemple de normalităţi relative.* Ca aplicaţie, vom considera aici cazul normalităţii α. Această normalitate verifică, în mod banal, cererile $\mathfrak{R} + \widetilde{\mathfrak{V}}$. Pe de altă parte, dacă $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ sunt cu $\Omega/a = \alpha$-normal şi $\Omega/b = \alpha$-normal, atunci $a \vee b$ este α-normal în structura câtului Ω/a, resp. Ω/b; aceasta constitue verificarea cererei $1^*.1$.

In ceea ce privește cererea $2^*.2$, ea este sigur verificată, deoarece avem $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$; rezultă de aici că cererea $2^* \cdot 1$ se verifică și ea, căci isomorfismul de structură conservă proprietatea de a fi α- normal.

Așa dar, α- normalitatea este o normalitate relativă în sensul cererilor $\mathfrak{R} + \mathfrak{V} + 1^* + 2^*$.

36° *Incheiere.* Aruncând o privire retrospectivă asupra rezultatelor obținute în această lucrare, vom observa următoarele:

1. Intreaga teorie a lanțurilor normale *finite derivă din teoria unei anumite conexiuni monotone mixte*; este vorba de conexiunea $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ unde a, b sunt normale într'un înfășurător comun Ω.

Ω/a = normal, Ω/b = normal. In cazul lanțurilor *transfinite*, vom arăta (nota III din apendicele lucrării de față), că teoria descompunerii de tipul Jordan-Hölder se subsumează *încă* proprietăților conexiunii monotone menționate, cu condiția ca lanțurile să fie (normale), *descendent bine ordonate și normale tare* (în sensul lui C u r o ș).

In ceea ce privește relațiile de normalitate ca α — normalitatea supra-invariantă, binormalitatea [2] și $\mathfrak{V}_\beta^0$- normalitatea, acestea au fost de asemenea definite *în termenii proprietăților unei anumite conexiuni monotone mixte*; e vorba de conexiunea $a \vee b_s/a \rightleftarrows b_s/a \wedge b_s$ unde a, $b_s \leqq \Omega$ cu $\Omega/a =$ = normal și cu $\Omega//b_s$ = normal (s, număr natural *arbitrar*). Este posibil ca, cu prețul unei anumite restricții [1]) să putem enunța definițiile normalităților în chestiune chiar în termenii proprietăților conexiunii monotone-$a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$ cu a, b normale în $\Omega \geqq a$, b.

S'ar putea ca acest punct de vedere din teoria lanțurilor normale să permită extinderea domeniului de valabilitate al acestei teorii la mulțimi parțial ordonate mai generale decât structurile [2]). In această privință am obținut până acum rezultate fragmentare, astfel că le-am omis din prezenta lucrare.

2. Sistemul nostru de axiome I + II ale normalității $\mathfrak{V}$ ridică problema independenței acestor axiome.

In aceeași ordine de idei, se pune întrebarea dacă omiterea cererii $\mathfrak{V}$ nu invalidează teorema de rafinare din 23°? Sau, mai particular: verifică orice β- normalitate cererea I_2 a lui Uzcov?

3. O altă problemă este extinderea teoremelor de descompunere din structurile sistemelor algebrice uzuale, prin mijlocirea unor relații de normalitate mai generale decât cele cunoscute până în prezent (normalitatea grupală și cuasi-grupală, cuasi-normalitatea lui Ore etc.).

Cu alte cuvinte, care este cea mai generală α- normalitate, resp. semi-normalitate grupală? Problema este dificilă; *în cazul p — grupurilor*, soluția a fost dată de A. H a l a n a y care a arătat [11], că α- normalitatea coincide aici cu cuasi-normalitatea lui O r e.

---

[1]) Care este numai aparentă.

[2]) Este, poate, locul să amintim că o încercare de a extinde teoria descompunerii la mulțimi parțial ordonate a fost făcută, de către O. O r e în Nota sa remarcabilă (7). Acest autor consideră însă numai șiruri absolute (lanțuri complete, în terminologia sa). Teoria respectivă are drept scop fundarea axiomatică a teoremei Jordan-Hölder asupra șirurilor normale, *independent de orice teoremă de rafinare.*

APENDICE

I. ASUPRA IPOTEZEI *SZ* ŞI A CONDIŢIILOR LUI UZCOV

După cum am observat în introducerea la lucrarea de faţă, K o ř í n e k pare să fie primul care, în teorema Schreier-Zassenhaus, distinge în mod net partea acesteia care se referă la normalitatea lanţurilor după rafinare, de partea care se referă la asemănarea căturilor conjugate. Acestor două părţi ale teoremei le corespunde, în terminologia noastră, *ipoteza S*, resp. *ipoteza Z*.

Este vorba acum de a găsi condiţii necesare şi suficiente pentru ca *una* sau *alta* din ipotezele *S* sau *Z* să se verifice aparte. Problema astfel pusă de K o ř í n e k, este rezolvată de acest autor în cadrul cererii sale preliminare $\mathfrak{K}$; dar normalitatea respectivă apare particulară, deoarece intervalele normale $c_1 \geqq c_2$, $d_1 \geqq d_2$ cu care lucrează K o ř í n e k, nu sunt extrase din lanţuri (normale) *cu extremităţi comune*.

Ne propunem să reluăm aici problema lui K o ř í n e k, analizând-o în cadrul cererii noastre preliminare $\mathfrak{V}$.

1. Condiţii necesare şi suficiente pentru ipoteza *S*

T e o r e m ă. *In cadrul cererii* $\mathfrak{V}$, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca ipoteza S să se verifice* (aşa dar, pentru ca două lanţuri normale, cu extremităţi comune, să posede rafinări Zassenhaus *încă normale*) este *ca relaţia de normalitate respectivă să verifice cererile* $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$ *şi cererea următoare*:

$\overline{\mathrm{II}}_2$. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/a = normal$, $\Omega/b = normal$; *fie de asemenea* $b \geqq p_1' \geqq p_2' \geqq a \wedge b$ *cu* $p_1'/p_2' = normal$ *şi cu* $p_1' \in \mathfrak{M}\left(\frac{b}{a \wedge b}\right)$ [1]. *Atunci* $a \vee p_1'/a \vee p_1' = normal$.

(Această cerere este evident o întărire a cererii II_2).

Demonstraţia acestei teoreme nu prezintă dificultăţi deosebite: suficienţa condiţiei din enunţ se demonstrează, făcând uz de un raţionament inductiv de tipul celui din 9°, iar pentru necesitate se foloseşte lema din 4° bis care, după cum se observă lesne, *se poate obţine numai cu ipoteza S*.

2. Condiţii necesare şi suficiente pentru ipoteza *Z*

T e o r e m a 1. *In cadrul cererii* $\mathfrak{V}$, *o condiţie necesară pentru asemănarea în sensul lui O r e a căturilor conjugate în rafinările Zassenhaus a două lanţuri normale cu extremităţi comune, este următoarea*:

Fie $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq x \geqq y$ cu $\Omega/a = normal$, $x/y = normal$ *şi cu* $\Omega//x = normal$; *atunci*,

$$(D)\quad x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee y.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Intr'adevăr, fie $\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{s-1} \geqq b_s = x$ lanţul normal ce leagă pe Ω de x; conform teoremei din 2°, există un element ω cu $\omega \leqq x \wedge y$ şi astfel ca $y/\omega =$ normal şi ca a să fie normal şi finit accesibil din ω printr'un lanţ de lungime aparentă $s + 1$.

[1] $\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a \wedge b}\right)$ are semnificaţia dată de definiţia din 12°; analog pentru $\mathfrak{M}\left(\frac{\vee}{a}\right)$.

Avem așa dar lanțurile normale:

$$\begin{aligned} &\Omega \geqq a \geqq \omega_{11} \geqq \omega_{12} \geqq \ldots \geq \omega_{1s} \geqq \omega \\ &\Omega \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_{s-1} \geqq x \geqq y \geqq \omega \end{aligned} \tag{27}$$

Să presupunem acum că rafinările Zassenhaus a două lanțuri normale cu extremități comune, duc la câturi conjugate asemenea în sensul lui O r e (ipoteza Z); aplicând aceasta lanțurilor normale (27), conchidem în particular că

$$a \vee x/a \vee y\,,\quad x/y \vee (x \wedge a) \tag{28}$$

(câturile lui Zassenhaus asociate câturilor $\Omega \geqq a$, $x \geqq y$) sunt câturi conjugate și deci direct asemenea cu câtul intermediar a lui Zassenhaus $x/y \vee (x \wedge a)$. Așa dar, câturile (28) trebue să fie direct asemenea, ceea ce conduce imediat la relația

$$x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee y \qquad q.e.d.$$

T e o r e m a 2. *Dacă o relație de normalitate verifică cererea I_2, atunci condiția necesară și suficientă pentru asemănarea în sensul lui O r e a câturilor conjugate în rafinările lui Zassenhaus a două lanțuri normale cu extremități comune, este dată de relația (D).*

D e m o n s t r a ț i e. Necesitatea condiției (D) este evidentă, deoarece cererea I_2 este o întărire a cererii preliminare $\mathfrak{P}$.

Pentru a demonstra suficiența condiției (D), trebue să verificăm relațiile

$$S \wedge (m \vee T) = T = S \wedge (n \vee T).$$

notațiile fiind cele obișnuite (cap. I, 12°). Or, conform cu lema din 7°, rezultă că M resp. N este normal și finit accesibil din $M \wedge N = S$; din aceeași propoziție mai rezultă că $S/M \wedge n$, $S/m \wedge N$ sunt câturi normale.

Așa fiind, putem scrie succesiv, ținând seama de condiția (D)

$$\begin{aligned} S \wedge (m \vee T) &= M \wedge N \wedge [\, m \vee (M \wedge n) \vee (N \wedge m)\,] = \\ &= M \wedge N \wedge [\, m \vee (M \wedge n)\,] = (M \wedge N \wedge m) \vee (M \wedge n) = T, \end{aligned}$$

adică, comparând primul cu ultimul membru $S \wedge (m \vee T) = T$. Analog, se verifică relația $S \wedge (n \vee T) = T$. Teorema 2 este demonstrată.

In cadrul normalității definite de cererile $I_2 + (D)$ se poate demonstra o teoremă de descompunere de tipul Jordan-Dedekind, care constitue analogonul abstract al teoremei de același tip demonstrate de Prof. D. B a r b i l i a n [6] pentrucă α- normalitate:

Două șiruri absolute, $I_2 + (D)$ - normale, cu extremități comune, au aceeași lungime veritabilă și câturile asemenea (într'o anumită ordine).

3. Asupra altor forme ale axiomei II_1

Fie $\mathfrak{N}$ o relație de normalitate ce verifică axiomele $I + II_2$; în cele ce urmează ne propunem să arătăm că, în acest cadru $I + II_2$, axioma II_1 și una din următoarele axiome *(de integritate)*:

H_1. Fie $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ cu Ω/a, Ω/b câturi normale; dacă avem $b > p' \geqq a \wedge b$ cu $b/p' =$ normal, atunci avem și $\varphi(b) > \varphi(p')$.

H_2. In aceleași ipoteze ca în H_1, dacă $\varphi(b) = \varphi(p')$, atunci, avem și $b = p'$, *sunt logic echivalente.*

Este clar că cererile H_1 şi H_2 sunt echivalente; vom arăta că Π_1 şi H_1 sunt echivalente.

Că axioma II_2 implică pe H_1 (chiar înafară de orice cadru axiomatic preexistent), aceasta se vede fără nicio dificultate: din $b > p'$ cu $b/p' =$ normal şi $\chi\varphi(p') = p'$ (axioma II_1) nu poate rezulta $\varphi(b) = \varphi(p')$ căci am avea atunci $\chi\varphi(b) = \chi\varphi(p')$ adică $b = p'$ şi ne-am contrazice. Dar avem oricum $\varphi(b) \geqq \varphi(p')$; urmează cu necesitate $\varphi(b) > \varphi(p')$.

Reciproc, să admitem că H_1 se verifică şi fie $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ cu $b/p' =$ = normal; trebue să demonstrăm că $\chi\varphi(p') = p'$. Dar avem oricum $\chi\varphi(p') \geqq \geqq p'$, deci să presupunem că am avea $\chi\varphi(p') > p'$. E clar că, conform cu $I + II_2$ avem $b/\chi\varphi(p') =$ normal; rezultă atunci din $b \geqq \chi\varphi(p') > p'$, aplicând pe I_2 că avem şi $\chi\varphi(p')/p' =$ normal.

Să considerăm atunci conexiunea monotonă

$$\varphi(p')/a \rightleftarrows \chi\varphi(p')/a \wedge b, \tag{28}$$

e clar că operaţiile care o definesc sunt chiar χ, φ căci $\chi\varphi(p')$ este perfect în $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$. Pe de altă parte, conform cu I_2 avem $\varphi p')/a =$ normal (aici intervine şi cererea I_1), iar conform cu $I + II_2$ avem şi $\varphi(p')/\chi\varphi(p') =$ $= a \vee p'/b \wedge (a \vee p') =$ normal. Incât, în conexiunea monotonă (28) ipotezele din H_1 sunt îndeplinite. Rezultă atunci că trebue să avem $\varphi.\chi\varphi(p') > \varphi(p')$, ceea ce este imposibil, întru cât se ştie că $\varphi\chi\varphi(p') = \varphi(p')$ pentru orice $p' \in b/a \wedge b$.

Este deci dovedit că, în cadrul $I + II_2$, cererile H_1 şi II_1 sunt echivalente.

Sistemele de axiome $I + II$, $I + II_2 + H_1$ şi $I + II_2 + H_2$ sunt logic echivalente.

Observaţie. Din cele ce preced, rezultă că *cea mai generală* funcţie Hölder (la care se referă Prof. D. Barbilian [1]) printre ale cărei atribute să figureze şi integritatea este, în cadrul F — normalităţii, *asemănarea în sensul lui Ore*.

II. ASUPRA CERERII PRELIMINARE $\mathfrak{K}$ A LUI KOŘINEK

Printre alte slăbiri, ce se pot aduce cererii K, este cel cuprins în aserţiunea următoare:

$\mathfrak{K}^*$. *Dacă* $\Omega \geqq a$ *şi* $\Omega \geqq x$ *cu* $\Omega/a =$ *normal, atunci există* ω *cu* $\omega \leqq a \wedge x$, *astfel ca* $x/\omega =$ *normal* (x *este arbitrar în* R_Ω).

E clar că cererea $\mathfrak{K}$ implică cererea $\mathfrak{K}^*$; reciproca nu este obligatorie.

In aplicaţii este în special utilă o anumită întărire a cererii; este vorba de propoziţia următoare:

$\mathfrak{K}_1^*$. *Dacă* $\Omega \geqq a$ *şi* $\Omega \geqq x$ *cu* $\Omega/a =$ *normal, atunci* $x\,a \wedge x =$ *normal* (x arbitrar în R_Ω).

Se verifică fără nicio dificultate că propoziţia $\mathfrak{K}_1^*$ este o consecinţă a ipotezei $(SZ)_2$ a lui Kořínek; de asemenea, se verifică imediat că o normalitate care satisface cererii $\mathfrak{K}_1^*$ satisface şi cererii I_2.

Definiţie. Vom numi $\aleph$-normalitate, o normalitate care verifică simultan cererile $\mathfrak{K}_1^*$ şi (D).

E clar că normalitatea $\aleph$ apare ca o abstragere a normalităţii α. Pentru această normalitate $\aleph$, teoremele de rafinare şi de descompunere demonstrate de noi în lucrarea [1], în cazul normalităţii α, sunt încă valabile. Avem anume, următoarele propoziţii:

[1] Această revistă, p 36, § 3.

Două lanțuri latero - $\aleph$ - normale, cu extremități comune se transformă prin rafinările lui Zassenhaus în două lanțuri latero - $\aleph$ - normale (prin perechi de elemente conjugate) având aceeași lungime și câturile conjugate asemenea.

Două șiruri latero - $\aleph$ - normale cu extremități comune au aceeași lungime și câturile asemenea într'o anumită ordine.

Omitem demonstrațiile deoarece, cu mici modificări, ele se desfășură pe linia demonstrațiilor corespunzătoare din [1].

III. TEOREMA SCHREIER-ZASSENHAUS PENTRU LANȚURI $\mathfrak{V}$-NORMALE TRANSFINITE [1])

In cele ce urmează, vom arăta că normalitatea noastră $\mathfrak{V}$ este un cadru suficient pentru obținerea unei teoreme de rafinare în cazul lanțurilor transfinite descendent bine ordonate și normale tare. Pentru a ușura lectura, vom da câteva definiții; o vedere mai completă a teoriei rafinărilor lanțurilor transfinite este totuși necesară [2]).

Fie S o structură arbitrară și (λ) o mulțime ordonată de indicii mulțimea (a_λ) de elemente din S se numește *lanț* dacă pentru orice pereche λ', $\lambda'' \varepsilon (\lambda)$ cu $\lambda' > \lambda''$ avem $a_{\lambda'} \geqq a_{\lambda''}$.

Vom presupune că (λ) posedă un prim element λ_0 și un ultim element λ_∞, astfel că pentru orice $\lambda \in (\lambda)$ avem $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_\infty$. Elementele corespunzătoare ale lanțului, așa dar a_{λ_0} și a_{λ_∞}, se vor zice respectiv închiderea *inferioară* și închiderea *superioară* a acestuia.

Dacă $\lambda'' > \lambda'$ (λ', $\lambda'' \in (\lambda)$) vom spune că λ'' este un *ulterior* al lui λ', în timp ce acesta va fi un *anterior* al lui λ''; corespunzător, $a_{\lambda''}$ va fi un *ulterior* al lui $a_{\lambda'}$ etc. Dacă intervalul $\lambda'' > \lambda'$ este *absolut prim*, vom spune că λ'' este un *ulterior imediat* al lui λ' sau că λ' este un *anterior imediat* al lui λ''; în acest caz, vom scrie $\lambda'' = \lambda' + 1$ resp. $\lambda' = \lambda'' - 1$.

Un lanț (a_λ) în care mulțimea (λ) este *ascendent bine ordonată* [3]) se numește *lanț ascendent bine ordonat*; în acest caz, fiecare termen a_λ are un ulterior imediat $a_{\lambda+1}$ (dar nu numaidecât și un anterior imediat). Intervalele unui astfel de lanț sunt de forma $a_{\lambda+1} / a_\lambda$, $\lambda < \lambda_\infty$.

Un lanț (a_λ), în care mulțimea (λ) este *descendent bine ordonată* [4]) se numește *lanț descendent bine ordonat*; în acest caz, fiecare termen a_λ are un anterior imediat $a_{\lambda-1}$ (dar nu numaidecât și un ulterior imediat). Intervalele unui astfel de lanț sunt de forma $a_\lambda / a_{\lambda-1}$, $\lambda > \lambda_0$ [5]).

---

[1]) Rezultatele din această parte a apendicelui au fost obținute în urma sugestiilor Prof. D. Barbilian.

[2]) Pentru aceasta trimitem la *Cursul autografiat de algebră axiomatică*, al Prof. D. Barbilian, ed. 1947 — 1948, p. 427.

[3]) O mulțime nevidă, ordonată, se numește *ascendent bine ordonată* dacă orice submulțime nevidă a sa are un *prim* element.

[4]) O mulțime nevidă, ordonată, se numește *descendent bine ordonată* dacă orice submulțime nevidă a sa are un *ultim* element.

[5]) Pentru un lanț (a_λ) de ordonare *arbitrară*, *intervalele sunt definite de câturile* $a_\lambda / \vee_{\lambda < \lambda'} a_{\lambda'}$ resp. $\wedge_{\lambda > \lambda'} a_{\lambda'} / a_\lambda$, $\lambda' \in (\lambda)$ aceste intervale se numesc virtuale, căci termenii $\vee_{\lambda' < \lambda} a_{\lambda'}$ resp. $\wedge_{\lambda' > \lambda} a_{\lambda'}$ nu aparțin, în general, lanțului dat. Este clar, de altfel, că în cazul lanțurilor bine ordonate (ascendent sau descendent) intervalele virtuale $\wedge_{\lambda' > \lambda} a_{\lambda'} / a_\lambda$ se reduc la $a_{\lambda+1} / a_\lambda$, în timp ce intervalele virtuale $a_\lambda / \vee_{\lambda' < \lambda} a_{\lambda'}$ se reduc la $a_\lambda / a_{\lambda-1}$.

Un lanţ (a_λ) se numeşte normal, când toate intervalele sale virtuale sunt normale. In cazul când (a_λ) este descendent bine ordonat, aceasta revine la a spune că toate intervalele $a_\lambda/a_{\lambda-1}$, $\lambda > \lambda_0$ sunt normale.

Un lanţ (a_λ) normal, se numeşte *normal tare* (în sensul lui A. Curoş [8]), dacă pentru fiecare $\lambda < \lambda_\infty$ există cel puţin $\lambda' > \lambda$, astfel ca $a_{\lambda'}/a_\lambda$ să fie normal.

In tot ceea ce urmează, vom presupune că relaţia de normalitate verifică cererea preliminară $\mathfrak{P}$; cu această cerere, se poate demonstra (printr'o dublă inducţie transfinită) următoarea propoziţie, care, în acest cadru, constitue analogonul transfinit al teoremei din cap. I, § 1, 2°.

Teorema 1. *Fie* $\Omega \geqq x$, $\Omega \geqq y$ *astfel că* Ω *este normal şi eventual transfinit accesibil din* x *şi din* y *prin lanţuri descendent bine ordonate şi normale tare; atunci există* $\omega \leqq x \wedge y$, *astfel că* x *şi* y *sunt normal şi eventual transfinit accesibile din* ω *prin câte un lanţ descendent bine ordonat şi normal tare* [1]).

Dacă înlocuim cererea $\mathfrak{P}$ cu cererea mai tare I_2 a lui Uzcov, enunţul teoremei precedente se întăreşte corespunzător; avem anume următoarea propoziţie:

Teorema 2. *Fie* $\Omega \geqq x$ şi $\Omega \geqq y$ *astfel că* Ω *este normal şi eventual transfinit accesibil din* x *şi din* y *prin lanţuri descendent bine ordonate şi normale tare; atunci,* x *şi* y *sunt normal şi eventual transfinit accesibile din* $x \wedge y$ *prin câte un lanţ descendent bine ordonat şi normal tare* [2]).

Considerăm acum o normalitate $\mathfrak{P}$, aşa dar o normalitate care verifică cererile I + II; demonstrăm următoarele două propoziţii:

Lema 1. *Fie* $\Omega \geqq a$, $\Omega \geqq b$ *cu* $\Omega/a = normal$, $\Omega/b = normal$; *fie de asemenea* p' *cu* $b \geqq p \geqq a \wedge b$ *şi astfel ca* b *să fie normal şi eventual transfinit accesibil din* p' *printr'un lanţ descendent bine ordonat şi normal tare. Atunci:*

1) p' *este perfect în conexiunea monotonă* $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$, adică $\varkappa\varphi(p') = p'$.

2) $a \vee b$ *este normal şi eventual transfinit accesibil din* $a \vee p'$ *printr'un lanţ descendent bine ordonat şi normal tare.*

Lema 2. *Fie* $\Omega \geqq a$ *şi* $\Omega \geqq x$ *cu* $\Omega/a = normal$ *şi* Ω *normal şi eventual transfinit accesibil din* x *printr'un lanţ descendent bine ordonat şi normal tare; fie, de asemenea,* p' *cu* $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ *şi astfel ca* x *să fie normal şi eventual transfinit accesibil din* p' *printr'un lanţ* $(p_{\lambda'})$ *descendent bine ordonat şi normal tare. Atunci:*

1) p' *este perfect în conexiunea monotonă* $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$;

2) $a \vee x$ *este normal şi eventual transfinit accesibil din* $a \vee p'$ *prin lanţul* $(a \vee p'_\lambda)$ *descendent bine ordonat şi normal tare.*

Demonstraţia lemei 1. Fie (p'_λ) lanţul normal descendent bine ordonat şi normal tare care leagă pe b de p'; punem $p'_{\lambda_\infty} = b$, $p'_{\lambda 0} = p'$. Pentru a demonstra lema, vom aplica o inducţie transfinită (descendentă) asupra indicilor (λ).

Deoarece lanţul (p'_λ) este descendent bine ordonat, există $p'_{\lambda_\infty - 1}$ şi avem prin ipoteză $b/p'_{\lambda_\infty - 1} = \text{normal}$. Conform cererilor II, rezultă atunci

$$\chi\varphi(p'_{\lambda_\infty - 1}) = p''_{\lambda_\infty - 1}, \quad a \vee b/a \vee p'_{\lambda_\infty - 1} = \text{normal} \tag{30}$$

[1]) Teorema este valabilă în orice mulţime parţial ordonată în care se poate defini o relaţie de normalitate, verificând cererea $\mathfrak{P}$.

[2]) Este important de subliniat că aceste două lanţuri sunt respectiv $x \geqq \ldots \geqq b_\mu \geqq \ldots \geqq x \wedge y$, $\mu \in (\mu)$ şi $y \geqq \ldots \geqq y \wedge c_\lambda \geqq \ldots \geqq y \wedge x$, $\lambda \in (\lambda)$ unde (c_λ) (b_μ) sunt respectiv lanţurile $\Omega \geqq \ldots \geqq x$, $\Omega \geqq \ldots \geqq y$

Vom considera relațiile (30) drept prima treaptă a inducției transfinite. Să presupunem acum că lema 1 este adevărată pentru toți $\lambda' > \lambda$ cu $\lambda < \lambda_\infty - 1$ (dar altfel, arbitrar) și să demonstrăm că lema 1 se verifică și pentru indicele λ.

Ipoteza inducției transfinite este, așa dar

$$\begin{cases} \chi\varphi(p'_{\lambda'}) = p'_{\lambda'}, \ \lambda' > \lambda, \ (\lambda < \lambda_\infty - 1) \\ a \vee b \text{ este normal și eventual transfinit accesibil din } a \vee p'_{\lambda'}, \\ \lambda' > \lambda \text{ printr'un lanț normal tare descendent bine ordonat.} \end{cases} \tag{31}$$

Or, deoarece lanțul (p'_λ) este prin ipoteză normal tare, există $\lambda' \in (\lambda)$ cu $\lambda' > \lambda$ și astfel ca $p'_{\lambda'}/p'_\lambda =$ normal.

Ținând seama de a doua parte din (31) și de teorema 2 de mai sus, rezultă că $a \vee p'_{\lambda'}/b \wedge (a \vee p'_{\lambda'}) =$ normal ceea ce, ținând seama de prima parte din (31), se scrie

$$a \vee p'_{\lambda'}/p'_{\lambda'} = \text{normal} \tag{32}$$

Pe de altă parte, ținând seama de a doua parte din (31), de $a \vee b/a =$ = normal și de teorema 2, rezultă imediat

$$a \vee p'_{\lambda'}/a = \text{normal} \tag{32'}$$

Să considerăm acum conexiunea monotonă

$$a \vee p'_{\lambda'}/a \rightleftarrows p'_{\lambda'}/a \wedge p'_{\lambda'}.$$

Doarece avem $p'_{\lambda'} \geqq p'_\lambda \geqq a \wedge p'_{\lambda'}$ $(= a \wedge b)$ și $p'_{\lambda'}/p'_\lambda =$ normal, rezultă, ținând seama de (32), (32') și de cererile II, că putem scrie:

$$\begin{cases} p'_{\lambda'} \wedge (a \vee p'_\lambda) = p'_\lambda \\ a \vee p'_{\lambda'}/a \vee p'_\lambda = \text{normal.} \end{cases} \tag{32''}$$

Dar, $p'_{\lambda'} = b \wedge (a \vee p'_{\lambda'})$, conform cu prima parte a ipotezei inductive (31), deci prima relație din (32'') se scrie

$$b \wedge (a \vee p'_{\lambda'}) \wedge (a \vee p'_\lambda) = p'_\lambda,$$

adică, ceea ce este tot una,

$$\chi\varphi(p'_\lambda) = p'_\lambda. \tag{31'}$$

Din a doua parte din (32'') și a doua parte din (31), rezultă evident că

$$\begin{cases} a \vee b \text{ este normal și eventual transfinit accesibil din } a \vee p'_\lambda \\ \text{printr'un lanț normal tare și descendent bine ordonat} \end{cases} \tag{31''}$$

Relațiile (31') și (31'') arată, comparate cu (31) și cu (30), că inducția transfinită funcționează. Rezultă nemijlocit că $\chi\varphi(p') = p'$ și că $a \vee b$ este normal și eventual transfinit accesibil din $a \vee p'$ printr'un lanț normal tare și descendent bine ordonat: lema 1 este astfel dovedită.

Observație. Importă să arătăm că unul din lanțurile normale de acces ale lui $a \vee b$ în raport cu $a \vee p'$ de care este vorba în enunțul lemei 1, este chiar lanțul $(a \vee p_\lambda)$.

Mai întâi, este clar că acest lanţ este descendent bine ordonat ódată cu (p'_λ); dacă arătăm că acest lanţ $(a \vee p'_\lambda)$ este normal, am terminat căci, calitatea sa de lanţ normal tare, se citeşte direct pe a doua relaţie din (32''). Or pentru a dovedi că odată cu $p'_\lambda/p'_{\lambda-1}$ = normal, avem şi $a \vee p'_\lambda/a \vee p'_{\lambda-1}$ = normal, $\lambda > \lambda_0$ este deajuns să reluăm cuvânt cu cuvânt argumentul prin care am dovedit a doua parte din (32''), înlocuind peste tot intervalul $p'_{\lambda'} \geqq p'_\lambda$ cu intervalul $p'_\lambda \geqq p'_{\lambda-1}$.

Demonstraţia lemei 2. Fie (b_μ) lanţul normal descendent bine ordonat şi normal tare care leagă pe Ω de x; punem $\Omega = b_{\mu_\infty}$, $x = b_0^\mu$. Pentru a demonstra lema 2, vom aplica o inducţie transfinită (descendentă) asupra indicilor μ.

Lanţul (b_μ) fiind descendent bine ordonat, există $b_{\mu_\infty - 1}$ şi avem prin ipoteză $\Omega/b_{\mu_\infty-1}$ = normal. *Conform lemei 1 şi observaţiei dela sfârşitul demonstraţiei acesteia, este clar că lema 2 se verifică pentru* $\mu = \mu_\infty - 1$: *vom considera aceasta drept prima treaptă a inducţiei transfinite.*

Să presupunem acum că lema 2 se verifică pentru toţi $\mu' > \mu$ ($\mu < \mu_\infty - 1$, dar altfel arbitrar) şi să demonstrăm că ea se verifică şi pentru indicele μ.

Or, lanţul normal (b_μ) fiind normal tare, există $\mu' > \mu$ astfel ca $b_{\mu'}/b_\mu$ = normal; dar lanţul (b_μ) este şi descendent bine ordonat, aşa dar, aplicând teorema 2, rezultă că avem şi $b_{\mu'}/a \wedge b_{\mu'}$ — normal. Aşa fiind, să considerăm conexiunea monotonă

$$(a \wedge b_{\mu'}) \vee b_\mu / a \wedge b_{\mu'} \rightleftarrows b_\mu / a \wedge b_\mu , \tag{33}$$

şi q' cu $b_\mu \geqq q' \geqq a \wedge b_\mu$ şi astfel ca b_μ să fie normal şi eventual transfinit accesibil din q', printr'un lanţ (q'_λ), $q'_{\lambda_\infty} = b$, $q'_{\lambda_0} = q'$ normal tare şi descendent bine ordonat. Conform cu lema 1 aplicată conexiunii monotone (33), rezultă că

$$b_\mu \wedge [(a \wedge b_{\mu'}) \vee q'] = q'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a \wedge b_{\mu'}) \vee b_\mu \text{ este normal şi eventual transfinit accesibil din } (a \wedge b_{\mu'}) \vee q' \\ \text{prin lanţul } ((a \wedge b_{\mu'}) \vee q'_\lambda) \text{ descendent bine ordonat şi normal tare.} \end{array} \right. \tag{33'}$$

Să considerăm atunci conexiunea monotonă

$$a \vee b_{\mu'} / a \rightleftarrows b_{\mu'} / a \wedge b_{\mu'}. \tag{34}$$

Deoarece $b_{\mu'}/(a \wedge b_{\mu'}) \vee b_\mu$ = normal (cererea I_1) rezultă, conform cu a doua relaţie din (33') că $b_{\mu'}$ este normal şi eventual transfinit accesibil din $(a \wedge b_{\mu'}) \vee q'$ prin lanţul, evident normal tare şi descendent bine ordonat

$$b_{\mu'} \geqq (a \wedge b_{\mu'}) \vee b_\mu \geqq \ldots \geqq (a \wedge b_{\mu'}) \vee q'_\lambda \geqq \ldots \geqq (a \wedge b_{\mu'}) \vee q'$$

în plus, avem $b_{\mu'} \geqq (a \wedge b_{\mu'}) \vee q' \geqq a \wedge b_\mu$.

In aceste condiţii, putem aplica în (34) ipoteza inducţiei transfinite ($\mu' > \mu$!); obţinem astfel

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{\mu'} \wedge [a \vee (a \wedge b_{\mu'}) \vee q'] = (a \wedge b_{\mu'}) \vee q' \\ a \vee b_{\mu'} \text{ este normal şi eventual transfinit accesibil din } a \vee (a \vee b_{\mu'}) \vee q' = \\ = a \vee q' \text{ prin lanţul } a \vee b_{\mu'} \geqq a \vee b_\mu \geqq \ldots \geqq a \vee q'_\lambda \geqq \ldots \geqq a \vee q' \\ \text{evident normal tare şi descendent bine ordonat.} \end{array} \right. \tag{34'}$$

Combinând prima parte din (33′) cu prima parte din (34′), se deduce ușor

$$b_\mu \wedge (a \vee q') = q'$$

în timp ce, a doua parte din (34′) arată că lanțul

$$a \vee b_\mu \geqq \ldots \geqq a \vee q'_\lambda \geqq \ldots \geqq a \vee q',$$

este normal, normal tare și descendent bine ordonat: treapta μ a inducției transfinite este asigurată. Concluziile lemei 2 rezultă acum nemijlocit.

Observație. Din demonstrație rezultă că $a \vee b_{\mu'}/a \vee b_\mu$ = normal; deci avem, în particular și $a \vee b_\mu/a \vee b_{\mu-1}$ = normal, $\mu > \mu_0$. Așa dar, lanțul $(a \vee b_\mu)$ este normal și normal tare.

Cele ce preced sunt suficiente pentru a putea demonstra următoarea teoremă de rafinare:

Teoremă. *Două lanțuri* (a_λ), (b_μ), $\mathfrak{V}$ *normale, transfinite, descendent bine ordonate, normale tare și cu extremități comune (cea inferioară fiind naturală), posedă rafinări Zassenhaus, care le transformă în două lanțuri încă* $\mathfrak{V}$*-normale, normale tare și descendent bine ordonate cu căuturi conjugate asemenea și având proprietatea*

$$\mathfrak{M}\left(\frac{a_{\lambda\mu}}{a_{\lambda,\mu-1}}\right) \leftrightarrow \mathfrak{M}\left(\frac{b_{\mu\lambda}}{b_{\mu,\lambda-1}}\right), \tag{35}$$

unde s'a notat:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-1} \vee (a_\lambda \wedge b_\mu); \quad \lambda > \lambda_0, \quad \mu \in (\mu)$$
$$b_{\mu\lambda} = b_{\mu-1} \vee (b_\mu \wedge a_\lambda); \quad \mu > \mu_0, \quad \lambda \in (\lambda),$$

și unde $\mathfrak{M}$ *are, pentru lanțuri normale eventual transfinite descendent bine ordonate și normale tare, semnificația pe care o are în cazul lanțurilor normale finite (12°).*

Demonstrație. Faptul că lanțurile rafinate sunt încă descendent bine ordonate este un rezultat al Prof. D. Barbilian[1]); faptul că intervalele se grupează în perechi (după îndepărtarea așa numiților termeni parazițI, ale căror intervale sunt nule) este, de asemenea, un rezultat al teoriei rafinărilor lanțurilor transfinite, a Prof. D. Barbilian[1]).

Pentru a dovedi celelalte părți ale enunțului, să notăm ca de obicei

$$a_\lambda = M, \; a_{\lambda-1} = m \; ; \quad b_\mu = N, \; b_{\mu-1} = n$$
$$S = M \wedge N, \; T = (M \wedge n) \vee (N \wedge m).$$

Conform ipotezei și teoremei 2, rezultă că M, resp. N este normal și eventual transfinit accesibil din S prin lanțul normal tare și descendent bine ordonat

$$M \geqq \ldots \geqq M \wedge b_{\mu'} \geqq \ldots \geqq M \wedge N, \quad \mu' \geqq \mu,$$

respectiv prin lanțul normal tare și descendent bine ordonat

$$N \geqq \ldots \geqq N \wedge a_{\lambda'} \geqq \ldots \geqq N \wedge M, \quad \lambda' \geqq \lambda.$$

[1]) *Cursul autografiat de algebră axiomatică*, 1947 – 1948.

Considerând atunci conexiunile monotone

$$m \vee S \geqq m \vee T \geqq m \qquad n \vee S \geqq n \vee T \geqq n$$
$$S \geqq T \geqq m \wedge S \qquad S \geqq T \geqq n \vee S,$$

unde, evident, S/T = normal, se obţine pe baza lemei 2

$$m \vee S/m \vee T = \text{normal}, \qquad n \vee S/n \vee T = \text{normal}.$$

Rămâne să arătăm că lanţurile normale $(a_{\lambda\mu})$, $(b_{\mu\lambda})$ sunt normale tare [1]). Or, aceasta rezultă aproape imediat din observaţia dela sfârşitul demonstraţiei lemei 2: e deajuns să verificăm că intervalul $M \geqq m$ resp. $N \geqq n$ este rafinat [2]) de lanţul $\{m \vee (M \wedge b_\mu)\}$, $\mu \in (\mu)$, resp. de lanţul $\{n \vee (N \wedge a_\lambda)\}$, $\lambda \in (\lambda)$, ceea ce rezultă imediat din chiar forma intercalarilor $a_{\lambda\mu}$, $b_{\mu\lambda}$.[3])

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ СООТНОШЕНИЙ НОРМАЛЬНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

§ 1. **Определения и обозначения**

1. 1. Пусть $\mathfrak{S}$ произвольное частично упорядоченное множество (со-соотношение порядка $\leqq$, где «$a < b$» означает «$a \leqq$ и $a \neq b$»); пусть также $a \in \mathfrak{S}$.

Обозначим через R^a множество всех $x \in \mathfrak{S}$ таких, что $x \geqq a$; обозначим через R_a множество всех $x \in \mathfrak{S}$ таких, что $x \leqq a$. Наконец, если имеем $a \geqq b$, обозначаем через a/b множество всех $x \in \mathfrak{S}$ таких, что $a \geqq x > b$; это множество есть *частное* a/b.

1. 2. Пусть N бинарное соотношение, определенное для некоторых пар $a, b \in \mathfrak{S}$: aNb. Будем говорить, что N — соотношение нормальности (b нормальное в a), когда N удовлетворяет следующей аксиоме:

Если имеем aNb, тогда имеем также $b \leqq a$.

Для aNb почти всегда будем записывать a/b = нормальное («a/b нормальное частное»).

1. 3. Пусть $a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{r-1} \geqq a_r$ есть конечная цепь в $\mathfrak{S}$; если имеем a_{i-1}/a_i = нормальное, $i = 1, 2 \ldots, r$, будем говорить, что цепь — нормальна.

1. 4. Пусть $\Omega \in \mathfrak{S}$ и $x \in \mathfrak{S}$ с $x \leqq \Omega$ такие, что существует нормальная цепь (конечная), присоединяющая x к Ω, $\Omega \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{r-1} \geqq a_r = x$, a_{i-1}/a_i = нормальное, $i = 1, 2 \ldots, r$; тогда будем говорить, что Ω *нор-*

---

[1]) Relaţia de conexiune (35) o lăsăm cititorului spre a fi demonstrată; pentru aceasta, este suficient să aplicăm o nouă (dublă) inducţie transfinită, care prelungeşte pe aceea din 14 (punctul de plecare, îl constitue, ca şi în finit, lema dela începutul alineatului citat). Cititorul va putea reconstitui singur, fără mari dificultăţi, şi această parte a demonstraţiei.

[2]) Rafinările sunt acoperitoare din cauza închiderii inferioare comune care e naturală prin ipoteză.

[3]) NOTĂ. In lucrarea [1], s'a strecurat o greşită interpretare a ipotezelor unei teoreme a lui M. Ward (citate acolo). E vorba de fraza (p. 290) care începe cu cuvintele: «*Această caracterizare a structurilor modulare ...*» şi se sfârşeşte cu cuvintele: «*... lanţurilor ascendente resp. descedente*».

In consecinţă, cititorul este rugat să şteargă fraza citată, împreună cu frazele corespunzătoare (p. 308 resp. 314) din rezumatele în limbile rusă şi franceză. Adaug că eroarea în chestiune nu afectează niciunul din rezultatele lucrării.

мально и конечно достижимо от x, что запишем $\Omega // x =$ нормальное; это «*Auserreichbarkeit*» Узкова (*l.c.*). Множество (частично упорядоченное) всех $x \in \mathfrak{S}$ с $x \leqq \Omega$ и таких, что $\Omega // x =$ нормальное будет обозначено $\mathfrak{M}(R_\Omega)$ иногда названо множеством конечной, нормальной достижимости (присоединенное к Ω); также, если $\Omega \geqq \omega$, множество всех $x \in \mathfrak{S}$ с $\Omega \geqq x \geqq \omega$ и таких, что $\Omega // x =$ нормальное будет обозначено через $\mathfrak{M}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$.

Наконец, что касается понятия монотоной связности, автор ссылается на свою работу [I].

Вот краткое изложение настоящего сообщения.

§ 2. **Нормальность** $\mathfrak{N}$

2. 1. Пусть S произвольная структура, и выберем, раз навсегда элемент Ω_0, впрочем любой; пусть N — соотношение нормальности, определенное по меньшей мере для некоторых пар $x \geqq y$ из S.

В дальнейшем, будем всегда предполагать, что имеем $\Omega_0 \mid \Omega_0 =$ *нормальное.*

Будем говорить, что N — *нормальность* $\mathfrak{N}$, когда выполняются следующие аксиомы:

I. Пусть $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$, где $\Omega_0 // \Omega =$ нормальное, $\Omega / a =$ нормальное, $\Omega / b =$ нормальное, тогда:

I_1. *Имеем* $\Omega / a \vee b =$ нормальное, I_2. Имеем $b / a \wedge b =$ нормальное, $a / a \wedge b =$ нормальное.

II. *Пусть* $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$, где $\Omega_0 // \Omega =$ *нормальное*, $\Omega / a =$ *нормальное*; $\Omega / b =$ *нормальное*; *пусть* $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ с $b / p' =$ *нормальное*. *Тогда*:

II_1. *Имеем* $\chi\, \varphi\, (p') = p'$; II_2. *Имеем* $\varphi(b) / \varphi(p') =$ *нормальное*.

Здесь, χ φ суть функции, определяющие смешанную монотонную связность $a \vee b / a \rightleftarrows b / a \wedge b$;

$$\chi\,(p) = b \wedge p,\ p \in a \vee b / a\ ;\ \varphi\,(p') = a \vee p',\ p' \in b / a \wedge b.$$

Эту систему аксиом I + II автор назвал *условиями Узкова*; аксиомы $I = I_1 + I_2$ совпадают с аксиомами (6) и (7) Узкова[1]), аксиомы $II = II_1 + II_2$ являются лишь *более слабыми* формулировками аксиом (9), (8) того же автора (l.c.).

2. 2. Вот теперь формулировка *гипотезы SZ*, которая предполагается выполненной в подструктуре R_{Ω_0}):

Гипотеза *SZ*. *Две нормальные цепи с общими концами* $\Omega \geqq \omega$, $\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0 // \Omega =$ *нормальное преобразуются уплотнениями Цассенхауса в две цепи тоже нормальные и такие, что сопряженные частные являются непосредственно подобными* (*в смысле Оре*) *промежуточному частному присоединенному к ним.*

2. 3. Введем наконец то, что автор называет предварительной аксимомой $\mathfrak{N}$:

---

[1]) Zentralblat, v. 20, 1939, p. 206—207.

$\mathfrak{V}$. *Пусть* $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega, b \leqq \Omega$, где $\Omega_0//\Omega =$ *нормальное*, $\Omega/a =$ *нормальное*, $\Omega/b =$ *нормальное*; *тогда существует по меньшей мере одно* ω *такое*, что $\omega \leqq a \wedge b$ и что $a/\omega =$ *нормальное*, $b/\omega =$ *нормальное*.

Легко заметить, что эта аксиома $\mathfrak{V}$ слабее предварительной аксиомы Узкова (l.c.)

2. 4. Доказываем следующее предложение:

Основная теорема. *Гипотеза* $SZ +$ *аксиома* $\mathfrak{V}$, *с одной стороны, и условия Узкова* $I+II$, *с другой стороны, логически равносильны.*

Доказательство логического включения. «Гипотеза $SZ +$ аксимома $\mathfrak{V}$ условий Узкова $I+II$» не представляет затруднения; относительно же противоположного включения, его доказательство опирается на две следующие леммы:

Лемма I Пусть $\Omega \leqq \Omega_0$, $x \leqq \Omega$, $y \leqq \Omega$, где $\Omega_0//\Omega =$ нормальное, $\Omega//x =$ нормальное, $\Omega//y =$ нормальное; тогда, имеем $x//x \wedge y =$ нормальное и $y//x \wedge y =$ нормальное.

Эта лемма, как и ее доказательство, принадлежат в существенном Узкову [3].

Лемма II. *Пусть* $\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega \leqq a$, $\Omega \leqq x$, где $\Omega_0//\Omega =$ *нормальное*, $\Omega//a =$ *нормальное*, $\Omega//x =$ *нормальное*; *пусть также* $x \geqq p' \geqq a \wedge x$, где $x//p' =$ *нормальное*. *Тогда*:

1. $\chi\,\varphi\,(p') = p'$, 2. $\varphi\,(x)//\varphi\,(p') =$ нормальное.

Здесь χ, φ *являются функциями монотонной связности* $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$, $\chi\,(p) = x \wedge p$, $p \in a \vee x/a$; $\varphi\,(p') = a \vee p'$, $p' \in x/a \wedge x$.

Доказываем ее, исходя из аксиомы $\mathrm{II} = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2$, последовательным применением двух полных индукций, воспользовавшись аксиомой I_2 и леммой I Узкова.

2. 5. Теорема Шрейера-Цассенхауса. *Две* $\mathfrak{V}$ *— нормальные цепи* (a_i), (b_j), $i = 0, 1, 2, \ldots, r$; $j = 0, 1, 2, \ldots, s$ *с общим и концами* $\Omega \geqq \omega$ $(\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0//\Omega =$ *нормальное*, $a_0 = b_0 = \Omega$, $a_r = b_s = \omega)$ *преобразовываются уплотнениями Цассенхауса в две цепи тоже* $\mathfrak{V}$*-нормальные, имеющие ту же длину (настоящую) и такие, что их сопряженные частные* $a_{i,j-1}/a_{ij}$, $b_{j,i-1}/b_{ji}$ *будут подобными снизу* [4] *и что их* $\wedge$ *полуструктуры* $\mathfrak{M}\,(a_{i,j-1}/a_{ij})$ $\mathfrak{M}\,(b_{j,i-1}/b_{ji})$ *будут связаны соотношением изоморфизма*

$$\mathfrak{M}\left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right) \overset{\longleftrightarrow}{\longleftrightarrow} \mathfrak{M}\left(\frac{b_{j,i-1}}{b_{ji}}\right).$$

Здесь, обозначено,

$$a_{ij} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)\ (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 0, 1, 2, \ldots, s);$$

$$b_{ji} = b_j \vee (b_{j-1} \wedge a_i),\ (i = 0, 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s)$$

(уплотнения Цассенхауза)

§ 3. **Нормальности α и β**

3. 1. *Нормальность* α. Применение предыдущих результатов дает тотчас же следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы нормальность* α *была нормальностью* $\mathfrak{V}$ *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аксиомам* I_1 *и*

II_2; *нормальность* α *является* тогда нормальностью $\mathfrak{V}_{\alpha+\beta}$ (см.главу I, § 3, 15).

Для более подробного изучения нормальности α см. [2].

3. 2. *Нормальность* β.

Лемма. *Пусть* $\Omega \geqq \beta$, где $\Omega/\beta =$ *нормальное* и $x \in R_\Omega$; *пусть* также $x \geqq p' \geqq \beta \wedge x$ с $x/p' = \beta$-*нормальное*.

Тогда $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta$-*нормально*.

Теорема 1. *Для того чтобы нормальность* β *была нормальностью* $\mathfrak{V}$ *необходимо и достаточно*, чтобы *она удовлетворяла аксиомам* I_2 *и* II_1; *нормальность* β *является тогда нормальностью* $\mathfrak{V}_\beta$ (см.главу I, § 3, 14).

Теорема 2. *Предположим, что нормальность* β *удовлетворяет аксиоме* $\mathfrak{V}$; *тогда необходимым и достаточным условием, для выполнения в структуре, гипотезы S Шрейера* (см. приложение) *является выполнением аксиомы* I_2 *Узкова*.

Замечание. Эта теорема 2 приближается к теореме Шрейера для α-нормальных цепей, доказана в [2]; посредством этих теорем аксиоматическая роль нормальностей α и β в *классической* теореме уплотнения Шрейера является очевидной.

3. 3. *Нормальность* $\mathfrak{V}^0_\beta$.

Эта нормальность является подвидом нормальности β; она определена следующим образом:

Пусть $\Omega \geqq \beta$, $\Omega \geqq b$, где $\Omega/\beta =$ -нормальное и $\Omega//b = \beta$-нормально; будем говорить, что $\Omega/\beta = \mathfrak{V}^0_\beta$ — *нормально*, когда монотонная связность $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ обладает двумя следующими свойствами:

а) *Если имеем* $\beta \vee b \geqq p \geqq \beta$, где $\beta \vee b/p = \beta$-*нормальное*, *тогда имеем также* $\chi\,(\beta \vee b)/\chi\,(p) = \beta$-*нормальное*.

б) *Если имеем* $b \geqq p' \geqq \beta \wedge b$, где $b/p' = \beta$-*нормальное*, *тогда имеем также* $\chi \varphi\,(p') = p'$.

Здесь, χ, φ суть функции, определяющие связность $\beta \wedge b/\beta \rightleftarrows b/\beta \vee b$. Нормальность $\mathfrak{V}^0_\beta$, очевидно, является более общей, чем бинормальность, [2].

После ряда предварительных предложений (предл. A, B, C, гл. II, § 3, 26°) доказываемых индуктивно, устанавливаем некоторые леммы с помощью, которых можно доказать теорему Шрейера о $\mathfrak{V}^0_\beta$ нормальных цепях. Применяем взаимоотношения некоторых систем смешанных монотонных связностей и при доказательствах этих лемм можно отдать себе отчет, каким образом метод связностей позволяет углубить изучение соотношений нормальности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Гипотеза S («Шрейера»). *Две нормальные цепи с общими концами* $\Omega \geqq \omega$ ($\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0//\Omega$ -нормальное) *преобразуются уплотнениями Цассенхауса в две цепи, являющиеся также нормальными*.

Теорема. *Гипотеза* $S +$ *аксиома* $\mathfrak{V}$ логично равносильны аксимам $I_1 + I_2 + \widetilde{II}$, где $\widetilde{II}$ есть следующая аксиома:

$\widetilde{II}$. Пусть $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$, где $\Omega_0//\Omega =$ *нормальное*, $\Omega/a =$ *нормальное*, $\Omega/b =$ *нормальное*; пусть также $b \geqq p'_1 \geqq p'_2 \geqq a \wedge b$,

где $p'_1 \in \mathfrak{M}$ $(b/a \wedge b)$ *и* $p'_1/p'_2 =$ *нормальное. Тогда, имеем* $\varphi(p'_1)/\varphi(p'_2)$ *нормальное* $(\varphi(p') = a \vee p',\ p' \in b/a \wedge b)$.

Доказательство путем индукции.

2. Гипотеза Z («Цассенхауса»).

Две нормальные цепи с общими концами $\Omega \geqq \omega$ $(\Omega \leqq \Omega_0,\ \Omega_0//\Omega =$ *нормальное*) *преобразуются уплотнениями Цассенхауса в две цепи, сопряженные частные которых суть непосредственно подобны снизу присоединенному к ним промежуточному частному.*

Теорема. *Гипотеза* $Z +$ *аксиома* $\mathfrak{V}$ *влечет за собой следующее предложение*:

D. *Пусть* $a \leqq \Omega_0,\ y \leqq x \leqq \Omega_0$, где $\Omega_0/a =$ *нормальное* $\Omega_0//x =$ *нормальное и* $x/y =$ *нормальное. Тогда имеем* $x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee y$.

Следствие. Если аксиома I_2 *Узкова выполняется, тогда гипотеза* Z *и условие* D *— логически равносильны.*

3. Автор отмечает, что условия Узкова I+II. достаточны для получения теоремы уплотнения Шрейера относительно *трансфинитных* нормальных цепей в хорошем убывающем порядке и сильно пормальных (в смысле Куроша [8]).

THÉORIE ABSTRAITE DES RELATIONS DE NORMALITÉ

(RÉSUMÉ)

§ 1. Définitions et notations

1.1. Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble partiellement ordonné arbitraire (relation d'ordre $\leqq$ où « $a < b$ » signifie « $a \leqq$ et $a \neq b$'' »); soit de même $a \in \mathfrak{F}$.

Désignons par R_a l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{F}$ tels que $x \leqq a$; désignons par R^a l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{F}$ tels que $x \geqq a$. Enfin, si l'on a $a \geqq b$, nous désignons par a/b l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{F}$ tels que $a \geqq x \geqq b$; cet ensemble, c'est le *quotient* a/b.

1.2. Soit N une relation binaire définie pour certains couples $a, b \in \mathfrak{F}$: aNb. Nous dirons que N est une relation de normalité (b normal dans a) lorsque N vérifie l'axiome suivant:

Si l'on a aNb, *alors on a aussi* $b \leqq a$.

Pour aNb nous écrirons presque toujours $a/b =$ normal (« a/b, quotient normal »).

1.3. Soit $a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{r-1} \geqq a_r$ une chaîne finie dans $\mathfrak{F}$; si l'on a $a_{i-1}/a_i =$ normal, $i = 1, 2, \ldots, r$, on dira que la chaîne est normale.

1.4. Soit $\Omega \in \mathfrak{F}$ et $x \in \mathfrak{F}$ avec $x \leqq \Omega$ et tel qu'il existe une chaîne normale (finie) reliant x à Ω, $\Omega \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq a_{r-1} \geqq a_r = x$, $a_{i-1}/a_i =$ normal, $i = 1, 2, \ldots, r$; nous dirons alors que Ω est *normalement et finiment accessible de* x, ce que nous écrirons $\Omega//x =$normal; c'est la « Auserreichbarkeit » d'Ouzkov (l.c.). L'ensemble (partiellement ordonné) de tous les $x \in \mathfrak{F}$ avec $x \leqq \Omega$ et tels que $\Omega//x =$ normal, sera désigné par la notation $\mathfrak{M}(R_\Omega)$ et nommé quelquefois l'ensemble d'accessibilité normale finie (associé à Ω); pareillement, si $\Omega \geqq \omega$, l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{F}$ avec $\Omega \geqq x \geqq \omega$ et tels que $\Omega//x =$ normal sera désigné par $\mathfrak{M}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$.

Enfin, pour ce qui a trait à la notion de connexion monotone, l'Auteur renvoie le lecteur à son travail [1].

Voici maintenant un aperçu sur le contenu de ce travail:

§ 2. La normalité $\mathfrak{N}$

2.1. Soit S une structure arbitraire et choisissons-y, une fois pour toutes, un élément Ω_0 d'ailleurs quelconque; soit N une relation de normalité définie au moins pour certains couples $x \geqq y$ de S.

Dans la suite, nous supposerons toujours qu'on a $\Omega_0/\Omega_0 = normal$.

Nous dirons que N est une *normalité* $\mathfrak{N}$, lorsque les axiomes suivants sont en puissance:

I. Soient $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$ avec $\Omega_0//\Omega$ = normal, Ω/a = normal et Ω/b = normal; alors:

I_1. *On a* $\Omega/a \vee b$ = normal, I_2. On a $b/a \wedge b$ = normal, $a/a \wedge b$ = normal.

II. *Soient* $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$ *avec* $\Omega_0//\Omega = normal$, $\Omega/a = normal$; $\Omega/b = normal$; *soient* $b \geqq p' \geqq a \wedge b$ *avec* $b/p' = normal$. *Alors*:

II_1. *On a* $\chi\varphi(p') = p'$, II_2. *On a* $\varphi(b)/\varphi(p') = normal$.

Ici, χ, φ sont les fonctions qui définissent la connexion monotone mixte $a \vee b/a \rightleftarrows b/a \wedge b$; *à savoir:*

$$\chi(p) = b \wedge p,\ p \in a \vee b/a;\ \varphi(p') = a \vee p',\ p' \in b/a \wedge b.$$

Ce système d'axiome I + II, l'Auteur l'appelle *conditions d'Ouzkov*; c'est que les axiomes $I = I_1 + I_2$ coïncident (à la notation près) avec les axiomes (6) et (7) d'Ouzkov [1]) tandis que ses axiomes $II = II_1 + II_2$ ne sont toujours que des formulations *plus faibles* des axiomes (9), (8) du même auteur (l.c. sous [1])).

2.2. Voici maintenant l'énoncé de *l'hypothèse SZ* (supposée valide dans la sous-structure R_{Ω_0}):

Hypothèse SZ. Deux chaînes normales aux extrémités communes $\Omega \geqq \omega$, $\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0//\Omega$ = *normal se transforment par les raffinements de Zassenhaus en deux chaînes toujours normales et telles que les quotients conjugués soient directement semblables (au sens de Ore) au quotient intermédiaire qui leur est associé.*

2.3. Introduisons enfin ce que l'Auteur a appelé l'axiome préliminaire $\mathfrak{N}$:

$\mathfrak{N}$. *Soient* $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$ *avec* $\Omega_0//\Omega = normal$, $\Omega/a = normal$, $\Omega/b = normal$; *alors, il existe au moins un* ω *avec* $\omega \leqq a \wedge b$ *et avec* $a/\omega = normal$, $b/\omega = normal$.

Cet axiome $\mathfrak{N}$ est, comme on s'aperçoit immédiatement, plus faible que l'axiome préliminaire d'Ouzkov (l.c. sous [1])).

2.4. On démontre la proposition suivante:

Théorème fondamental. *L'hypothèse SZ + l'axiome* $\mathfrak{N}$ *d'une part et les conditions d'Ouzkov I + II d'autre part, sont logiquement équivalentes.*

La démonstration de l'implication logique.

« Hypothèse *SZ* + l'axiome $\mathfrak{N}$ ⊏ conditions d'Ouzkov I + II » n'offre aucune difficulté; quant à l'implication contraire, sa démonstration repose sur les deux lemmes suivants:

---

[1]) Zentralblatt, v. 20, 1939, p. 206 — 207.

Lemme 1. Soient $\Omega \leqq \Omega_0$, $x \leqq \Omega$, $y \leqq \Omega$ avec $\Omega_0//\Omega = \text{normal}$, $\Omega//x = \text{normal}$, $\Omega//y = \text{normal}$; alors, on a $x//x \wedge y = \text{normal}$ et $y//x \wedge y = \text{normal}$.

Ce lemme ainsi que sa démonstration sont dus, pour l'essentiel, à Ouzkov [3].

Lemme 2. *Soient* $\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega \leqq a$, $\Omega \leqq x$ *avec* $\Omega_0//\Omega = \text{normal}$, $\Omega/a = \text{normal}$, $\Omega//x = \text{normal}$; *soient, de même,* $x \geqq p' \geqq a \wedge x$ *avec* $x//p' = \text{normal}$. *Alors*:

1. $\chi\varphi(p') = p'$; 2. $\varphi(x)//\varphi(p') = \text{normal}$.

Ici χ, φ *sont les fonctions de la connexion monotone* $a \vee x/a \rightleftarrows x/a \wedge x$

$$\chi(p) = x \wedge p \ , \ p \in a \vee x/a \ ; \ \varphi(p') = a \vee p' \ , \ p' \in x/a \wedge x$$

On le démontre, en partant des axiomes $\text{II} = \text{II}_1 + \text{II}_2$, par l'application successive de deux inductions complètes en utilisant les axiomes I et le lemme 1 d'Ouzkov.

2.5. Théorème Schreier-Zassenhaus. *Deux chaînes* $\mathfrak{N}$ *normales* (a_i), (b_j), $i = 0, 1, 2, \ldots, r$, $j = 0, 1, 2, \ldots s$ *aux extrémités communes* $\Omega \geqq \omega$ $(\Omega \leqq \Omega_0, \ \Omega//\Omega_0 = \text{normal}, \ a_0 = b_0 = \Omega, \ a_r = b_s = \omega)$ *se transforment par les raffinements de Zassenhaus en deux chaînes toujours* $\mathfrak{N}$*-normales ayant même longueur (véritable) et telles que leurs quotients conjugués* $a_{i,j-1}/a_{ij}$, $b_{j,\,i-1}/b_{ji}$ *soient semblables d'en bas* [4] *et que leurs* $\wedge$*-semistructures* $\mathfrak{M}(a_{i,\,j-1}/a_{ij})$, $\mathfrak{M}(b_{j,\,i-1}/b_{ji})$ *soient reliées par la relation d'isomorphisme*

$$\mathfrak{M}\left(\frac{a_{i,\,j-1}}{a_{ij}}\right) \leftrightarrows \mathfrak{M}\left(\frac{b_{j,\,i-1}}{b_{ji}}\right).$$

Ici, on a posé, comme à l'ordinaire

$$a_{ij} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j), \ (i = 1,2, \ldots, r; \ j = 0,1,2, \ldots, s)$$

$$b_{ji} = b_j \vee (b_{j-1} \wedge a_i), \ (i = 0,1,2, \ldots, r; \ j = 1,2, \ldots, s)$$

(les raffinements de Zassenhaus).

§ 3. Les normalités α et β

3.1. *La normalité* α. L'application des résultats précédents fournit immédiatement la proposition suivante:

Théorème. *Pour qu'une normalité* α *soit une normalité* $\mathfrak{N}$ *il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux axiomes* I_1 *et* II_2; *la normalité* α *est alors une normalité* $\mathfrak{N}_{\alpha+\beta}$ (voir Chap. I, § 3, 15°).

Pour une étude plus détaillée de la normalité α voir [2].

3.2. *La normalité* β.

Lemme. *Soient* $\Omega \geqq \beta$ *avec* $\Omega/\beta = \text{normal}$ *et* $x \in R_\Omega$; *soit, de même,* $x \geqq p' \geqq \beta \wedge x$ *avec* $x/p' = \beta\text{-normal}$. *Alors,* $\beta \vee x/\beta \vee p' = \beta\text{-normal}$.

Théorème 1. *Pour qu'une normalité* β *soit une normalité* $\mathfrak{N}$ *il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux axiomes* I_2 *et* II_1; *la normalité* β *est alors une normalité* $\mathfrak{N}_\beta$ (voir Chap. I, § 3, 14°).

Théorème 2. *Supposons qu'une normalité* β *vérifie l'axiome* $\mathfrak{N}$; *alors, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle entraîne la validité de l'hypothèse S de Schreier (voir l'Appendice) dans la structure — est qu'elle vérifie l'axiome* I_2 *d'Ouzkov.*

se *Remarque.* Ce théorème 2 est à rapprocher du théorème de Schreier pour les chaînes α-normales qu'on a démontré dans [2]; par ces théorèmes,

le rôle axiomatique des normalités α et β dans le théorème de raffinement *classique* de Schreier apparaît très nettement.

3.3. *La normalité* $\mathfrak{N}^0_\beta$.

Cette normalité est une sous-espèce de la normalité β; elle est définie comme suit:

Soient $\Omega \geqq \beta$, $\Omega \geqq b$ avec $\Omega/\beta = \beta$-normal et $\Omega//b = \beta$-normal: on dira que $\Omega/\beta = \mathfrak{N}^0_\beta$-*normal* lorsque la connexion monotone $\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$ jouit des deux propriétés suivantes:

a) *Si l'on a* $\beta \vee b \geqq p \geqq \beta$ *avec* $\beta \vee b/p = \beta$-*normal, alors on a aussi* $\chi(\beta \vee b)/\chi(p) = \beta$-*normal*;

b) *Si l'on a* $b \geqq p' \geqq \beta \wedge b$ *avec* $b/p' = \beta$-*normal, alors on a aussi* $\chi\varphi(p') = p'$.

Ici, χ, φ sont les fonctions définissant la connexion $\beta \wedge b/\beta \rightleftarrows b/\beta \vee b$. La normalité $\mathfrak{N}^0_\beta$ est évidemment plus générale que la binormalité [2].

Après une série de propositions préliminaires (prop. A, B, C, Chap. II, § 3, 26°) qu'on démontre inductivement, on établit certains lemmes propres à en déduire le théorème de Schreier sur les chaînes $\mathfrak{N}^0_\beta$-normales. Il y est fait usage des interrelations de certains systèmes de connexions monotones mixtes, et c'est à l'occasion des démonstrations de ces lemmes qu'on peut, surtout, se rendre compte comment la méthode des connexions permet d'approfondir l'étude des relations de normalité.

APPENDICE

1. *L'hypothèse S (« de Schreier »).* Deux chaînes normales aux extrémités communes $\Omega \geqq \omega$ ($\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0//\Omega$ = normal) *se transforment par les raffinements de Zassenhaus en deux chaînes qui sont, elles aussi, normales.*

Théorème. *L'hypothèse S + l'axiome* $\mathfrak{N}$ *sont logiquement équivalents aux axiomes* $I_1 + I_2 + \tilde{I}\tilde{I}$ *où* $\tilde{I}\tilde{I}$ *est l'axiome suivant*:

$\tilde{I}\tilde{I}$. Soient $\Omega \leqq \Omega_0$, $a \leqq \Omega$, $b \leqq \Omega$ *avec* $\Omega_0//\Omega = normal$, $\Omega/a = normal$, $\Omega/b = normal$; *soient, de même,* $b \geqq p_1' \geqq p_2' \geqq a \wedge b$ *avec* $p_1' \in \mathfrak{M}(b/a \wedge b)$ *et* $p_1'/p_2' = normal$. *Alors, on a* $\varphi(p_1')/\varphi(p_2')$ *normal* ($\varphi(p') = a \vee p'$, $p' \in b/a \wedge b$).

Démonstration par voie d'induction.

2. *L'hypothèse Z (« de Zassenhaus »).*

Deux chaînes normales aux extrémités communes $\Omega \geqq \omega$ ($\Omega \leqq \Omega_0$, $\Omega_0//\Omega = normal$) *se transforment par les raffinements de Zassenhaus en deux chaînes dont les quotients conjugués sont directement semblables d'en bas au quotient intermédiaire qui leur est associé.*

Théorème. *L'hypothèse Z + l'axiome* $\mathfrak{N}$ *entraînent la proposition suivante*:

D. *Soient* $a \leqq \Omega_0$, $y \leqq x \leqq \Omega_0$ *avec* $\Omega_0/a = normal$ $\Omega_0//x = normal$ *et* $x/y = normal$. *Alors on a* $x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee y$.

Corollaire. *Si l'axiome* I_2 *d'Ouzkov est en puissance, alors l'hypothèse Z et la condition D sont logiquement équivalentes.*

3. On signale enfin le fait que les conditions d'Ouzkov I + II sont suffisantes pour l'obtention d'un théorème de raffinement de Schreier à l'égard des chaînes normales *transfinies* à bonne ordination *descendante* et *fortement normales* (au sens de Kurosch, [8]).

BIBLIOGRAFIE

1. M. Benado, Studii şi Cercetări Matematice, 1950, v. I, fasc. 2, p. 282.
2. — Studii şi Cercetări Matematice, 1952, v. 3.
3. A. I. Uzkov, Recueil mathématique de l'Acad. de Moscou, serie nouă, 1938, t. 4, Nr. 46, p. 31.
4. Vladimir Kořínek, Vestnik Kral. Ceske. Spol. Nauk, 1941, v. XIV, p. 1.
5. A. H. Lifşiţ, Matematiceschi Sbornic, serie nouă, 1949, t. 24, 66 , fasc. 2, p. 227.
6. D. Barbilian, Disquis. Math. et Phys., 1946, t. V, p. 3
7. O. Ore, Bull. Of. the Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, p. 558.
8. A. Curoş, Matematiceschi Sbornic, 1945, t. 16, (58), p. 59.
9. — Sbornic pamiati Acad. D. A. Gravé, Moscova, 1940, p. 110 .
10. O. Ore, Transactions Amer. Math. Soc., 1937, v. 41, p. 226.
11. A. Halanay, Disquis. Math. et Phys., 1948, t. VII, p. 3.
12. O. Ore, Transactions of Amer. Math. Soc., 1944, v. 55, p. 493.
13. E. George , Journal für reine und angewandte Mathematik, 1939, v. 180, p. 110.
14. V. Kořínek, Colloq. Intern. d'Algèbre, Paris, 1949.
15. R. Pate a. R. J. Duffin, Duke Math. Journ., 1943, v. 10, p. 743.
16. H. Wielandt, Math. Zeitschrift, 1939, v. 45, p. 209.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

ASUPRA GRUPURILOR DE MIŞCARE ALE UNUI SPAŢIU RIEMANNIAN CU PATRU DIMENSIUNI

DE

G. VRĂNCEANU

CAPITOLUL 1

Spaţii V_4 având ca grup de stabilitate un G_4

1. Se ştie că spaţiile lui Riemann V_n au un grup de mişcare având cel mult $n(n+1)/2$ parametri şi acest maxim este atins numai pentru spaţiile cu curbură constantă. Grupul de stabilitate al unui punct O al unui astfel de spaţiu posedă $n(n-1)/2$ parametri şi acest grup are proprietatea de a conserva o formă pătratică definită pozitivă.

Dacă punctul O este originea coordonatelor $O(x^1 = \ldots = x^n = 0)$ şi dacă $x^1, \ldots, x^n$ sunt coordonate normale, grupul de stabilitate este grupul rotaţiilor originii [1] [1]), deci este generat de transformările infinitesimale

$$X_{pq} = x^p \frac{\partial f}{\partial x^q} - x^q \frac{\partial f}{\partial x^p}. \tag{1}$$

Să presupunem acum că se consideră un spaţiu V_n al cărui grup de stabilitate al originii este grupul (1). Se poate vedea uşor că metrica unui astfel de spaţiu trebue să fie de forma

$$ds^2 = \alpha [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + \beta (x^1 dx^1 + \ldots + x^n dx^n)^2 \tag{2}$$

unde α, β sunt funcţii de $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. In adevăr, este evident că metrica (2) posedă grupul (1), căci cele trei expresii

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2, (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2, x^1 dx^1 + \ldots + x^n dx^n \tag{3}$$

care intervin în această metrică, sunt invarianţi ai grupului (1). Invers, cum pentru $n > 2$ aceste expresii sunt singurii invarianţi ai acestui grup [7] [2]), metrica spaţiului trebue să fie de forma (2).

Grupul (1) este evident un grup intransitiv şi varietăţile sale de intransitivitate sunt hipersferele

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = C$$

unde C este o constantă. Grupul (1) poate fi grupul complet al spaţiului (2)

---

[1]) p. 534.
[2]) p. 31.

sau poate fi un subgrup al acestui grup. In acest din urmă caz, grupul complet al transformărilor spaţiului (2) este transitiv, căci un grup intransitiv nu poate avea mai mult de $n(n-1)/2$ parametri [1][1]). Grupul fiind transitiv, rezultă atunci că spaţiul (2) este cu curbură constantă.

Dacă un spaţiu V_n nu este cu curbură constantă, după un rezultat al lui F u b i n i, din 1903, spaţiul nu poate avea un grup având $n(n+1)/2-2$ parametri, deci cu un parametru mai puţin decât spaţiile cu curbură constantă.

Rezultatul lui F u b i n i a fost precizat de E g o r o v [3], care a arătat că un spaţiu V_n, care nu este al lui Einstein, posedă un grup având cel mult $n(n-1)/2+1$ parametri şi acest maxim este atins, după cum ne arată exemplul unui spaţiu V_n, a cărui metrică se scrie:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2 \tag{3'}$$

unde $d\sigma^2$ este metrica unui spaţiu cu curbură constantă nenulă, în variabilele $x^2, \ldots, x^n$. Noi am arătat [4] că singurele spaţii reductibile, deci în particular neeinsteiniene, care posedă un grup de mişcare cu $n(n-1)/2+1$ parametri, sunt spaţii care se reduc la forma (3').

Pentru spaţiile lui Einstein, E g o r o v a arătat că grupul de mişcare poate avea cel mult $n(n-1)/2+2$, dacă dimensiunea n a spaţiului este mai mare decât 3. Am arătat [4][2]) că numărul $n(n-1)/2+2$ poate fi scăzut cu $n-4$ unităţi, deci poate fi considerat ca maxim numărul $(n-1)(n-2)/2+5$. Acest număr este inferior maximului $n(n-1)/2+1$ al parametrilor unui spaţiu V_n neeinsteinian, afară de cazul $n=4$, când întrece acest maxim cu o unitate, şi de cazul în care $n=5$, când ele sunt egale.

Se poate deci enunţa teorema:

Un spaţiu V_n $(n>4)$, care nu este cu curbură constantă, posedă cel mult un grup de mişcare având $n(n-1)/2+1$ parametri şi acest maxim este atins.

Teorema este de asemenea adevărată pentru $n=3$, după cum rezultă din clasificarea dată de B i a n c h i spaţiilor V_3[1][3]).

In cazul $n=4$, noi am dat ca exemplu un spaţiu definit prin componentele tensorului de curbură [4][4]), care posedă un grup transitiv cu 8 parametri, deci teorema nu se aplică pentru $n=4$.

Vom arăta acum că nu există alte spaţii V_4 care posedă un G_8, ca grup de mişcare. Intr'adevăr, dacă grupul G_8 este transitiv, grupul de stabilitate al unui punct posedă patru parametri şi vom arăta în primul rând cum se pot forma toate spaţiile având această proprietate.

2. Spaţiile V_4 pe care le avem în vedere intră într'o clasă generală de spaţii cu un număr par $n=2p$ de dimensiuni al căror grup de stabilitate a originii O conservă forma lui Pfaff

$$\omega = x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \ldots + x^{2p-1}\,dx^{2p} - x^{2p}\,dx^{2p-1}. \tag{4}$$

Se vede uşor că transformările infinitesimale în număr de p

$$X_{12},\ X_{34},\ \ldots,\ X_{2p-1,\,2p} \tag{5}$$

---

[1]) p. 515.
[2]) p. 35.
[3]) p. 538.
[4]) p. 43.

conservă forma ω. Aceeaşi proprietate o au şi transformările infinitesimale în număr de p (p_{-1})

$$X_{2s-1,\,2r-1} + X_{2s,\,2r}\,,\quad X_{2s-1,\,2r} - X_{2s,\,2r-1} \tag{6}$$

unde r, s sunt mai mici sau egali cu p.

Se poate arăta aceasta, observând că, dacă notăm prin

$$X = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,,\quad \pi = \lambda_i\, dx^i$$

o transformare infinitesimală şi o formă a lui Pfaff, forma π este invariantă prin transformarea X, dacă avem

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}\xi^j + \lambda_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$$

sau, cum se mai spune, dacă derivata lui Lie a vectorului λ_i este nulă.

Se poate forma acum cu cei trei invarianţi (3) şi cu forma ω o metrică

$$\begin{aligned} ds^2 = a\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + b(x^1\,dx^1 + \ldots + x^n\,dx^n)^2 + \\ + c\,(x^1\,dx^1 + \ldots + x^n\,dx^n)\,\omega + d\omega^2 \end{aligned} \tag{7}$$

unde a, b, c, d sunt funcţii numai de $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Această metrică posedă atunci grupul de stabilitate (5), (6), care conţine p^2 parametri.

In cazul când $n = 2$, deci $p = 1$, invariantul (4) nu este independent de invarianţii (3), căci avem identitatea

$$(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2)^2 + (x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2][(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$$

Rezultă că, în cazul $n = 2$, spaţiile (2) şi (7) reprezintă spaţii ale lui Riemann, posedând grupul cu un parametru

$$x'^1 = x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta,\quad x'^2 = x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta$$

deci grupul format din rotaţiile în jurul originii şi ele coincid dacă $c = 0$.

In cazul $n = 4$, deci $p = 2$, (7) reprezintă spaţii V_4 al căror grup de stabilitate a originii O posedă patru parametri şi grupul de stabilitate (1) a originii O, posedă ca varietăţi de intrasivitate sferele cu centrul în O.

Să presupunem că se dă un spaţiu V_4, ai cărui coeficienţi a_{ij} ai metricii sunt, în vecinătatea originii, egali cu δ^i_j, ceea ce este totdeauna posibil. Dacă X este o transformare infinitesimală a grupului de stabilitate a originii spaţiului V_4, această transformare este de forma

$$X = aX_{12} + bX_{13} + cX_{14} + d\,X_{23} + e\,X_{24} + f\,X_{34} + \ldots$$

unde a, b, ..., f sunt constante şi unde termenii nescrişi sunt cel puţin de ordinul al doilea în variabilele x^1, ..., x^4. Aceşti termeni nu intervin în relaţiile de structură, aşa că îi vom lăsa la o parte. Termenii scrişi ai lui X constitue o formă bilineară în variabilele x^i şi $y^i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, deci, printr'o transformare ortogonală aplicată în acelaşi timp lui x^i şi y^i, se poate reduce b, c, d, e la zero [4][1]). Cât despre a şi f, unul din ei este de asemenea zero, dacă

[1]) p. 146.

determinantul formei bilineare este nul. Dacă f de exemplu, este de asemenea zero, transformarea $X = a X_{12}$ este o rotaţie în planul variabilelor x^1, x^2.

Dacă spaţiul V_4 posedă două transformări infinitesimale X şi Y se poate lua, printr'o schimbare de variabile şi printr'o eventuală schimbare a operatorilor:

$$X = X_{12} + kX_{34},\ Y = \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \gamma X_{23} + \delta X_{24} + \lambda X_{34} + \ldots$$

şi paranteza $(X\ Y)$ se scrie

$$(XY) = -(\alpha - k\delta) X_{23} - (\beta + k\gamma) X_{24} + (\gamma + k\beta) X_{13} + (\delta - k\alpha) X_{14}.$$

Se vede că, dacă $\lambda \neq 0$, deci dacă Y conţine X_{34} şi X, Y formează un grup, acest grup este abelian, şi avem sau $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, sau $k^2 = 1$. In acest caz, putem avea $k = 1$ şi deci $\delta = \alpha$, $\gamma = -\beta$ şi se vede uşor că în grup există două rotaţii reale, deci putem lua pentru cele două transformări X, Y, cele două rotaţii X_{12}, X_{34}.

Aceeaşi proprietate are loc dacă $\lambda = 0$.

Vom arăta acum că grupul de stabilitate al unui spaţiu V_4 nu poate fi un G_5. In adevăr, să presupunem că transformările infinitesimale A, B, C, D, E ale unui astfel de grup ar fi independente în X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, deci că avem:

$$B = X_{13} + bX_{34},\ C = X_{14} + cX_{34}.$$

Paranteza (BC) se scrie

$$(BC) = -X_{34} + bX_{13} + cX_{14}$$

ceea ce ne spune că trebue să avem

$$b^2 + c^2 + 1 = 0$$

deci b, c nu pot fi reali.

Rezultă că, pentru $n = 4$, grupul de stabilitate al unui punct al unui spaţiu V_n posedă sau şase parametri, deci e de forma (2), sau acest grup posedă patru parametri, cum este cazul spaţiilor (7).

3. Vom arăta acum că se poate face astfel ca un grup de stabilitate cu patru parametri să fie definit în spaţiul V_4 prin transformările infinitesimale

$$X_{12},\ X_{34},\ X_{13} + X_{24},\ X_{14} - X_{23} \tag{8}$$

deci astfel ca să fie grupul de stabilitate a spaţiului (7), pentru $n = 4$, ceea ce constitue o proprietate demonstrată în 1908 de S. Medici [8][1]). Noi vom demonstra această proprietate presupunând că, printr'o transformare de variabile, una din transformările infinitesimale, să spunem A, poate fi luată ca X_{12}. In adevăr, se poate întotdeauna presupune că A se poate rezolva în raport cu X_{12}. In ceea ce priveşte cea de a doua transformare, să spunem B, se poate presupune că ea nu conţine X_{12}, şi conţine X_{34} afară de cazul particular, pe care-l lăsăm pentru moment de o parte, când transformările A, B, C, D ale lui G_4 nu conţin X_{34}. Cât despre C, D se poate presupune, în cazul general, că sunt funcţii independente, de X_{13}, X_{14}, deci se poate lua

$$A = X_{12},\ B = X_{34} + aX_{23} + bX_{24}$$
$$C = X_{13} + \alpha X_{23} + \beta X_{24},\ D = X_{14} + \rho X_{23} + \lambda X_{24}$$

unde a, b, α, β, ρ, λ sunt constante.

[1]) p. 159.

Dacă am fi luat $A = X_{12} + pX_{23} + qX_{24}$, atunci A ar fi fost deasemenea o rotaţie şi deci $p = q = 0$ nu restrânge generalitatea.

Astfel, avem

$$(AB) = aX_{13} + bX_{14} = aC + bD - (a\alpha + b\rho)\, X_{23} - (a\beta + b\lambda)\, X_{24}.$$

Pentru ca A, B, C, D să formeze un grup, trebue deci să avem

$$a\alpha + b\rho = 0, \quad a\beta + b\lambda = 0. \tag{8'}$$

De asemenea, avem

$$(AC) = -X_{23} + \alpha X_{13} + \beta X_{14}, \quad (AD) = -X_{24} + \rho\, X_{13} + \lambda X_{14},$$

ceea ce ne dă condiţiile

$$\alpha^2 + \beta\rho + 1 = 0, \ (\alpha + \lambda)\beta = 0, \ (\alpha + \lambda)\,\rho = 0, \ \lambda^2 + \beta\rho + 1 = 0. \tag{9}$$

Comparând prima cu ultima dintre aceste relaţii, rezultă că avem $\alpha^2 = \lambda^2$, deci $\alpha = -\lambda$ sau $\alpha = \lambda$. Pe de altă parte, dacă a, b nu sunt amândouă nule, ecuaţiile (8') ne spun că trebue să avem

$$\alpha\lambda - \beta\rho = 0 \tag{9'}$$

ceea ce ne permite să scriem prima formulă (9) sub forma

$$\alpha\,(\alpha + \lambda) + 1 = 0$$

Deci α, λ, $\alpha + \lambda$ nu pot fi nule. Cea de a doua (9) ne spune că β trebue să fie nul, ceea ce este în contradicţie cu (9'). Rezultă că trebue să avem $a = b = 0$ deci că transformarea B coincide cu X_{34} şi ecuaţiile (8') sunt verificate identic.

Deoarece avem

$$(BC) = -X_{14} - \alpha X_{24} + \beta X_{23}$$

ceea ce ne spune să trebue să avem

$$\lambda = \alpha, \quad \rho = -\beta. \tag{10}$$

Asociate lui (9), ele ne dau ca singure soluţii reale $\alpha = \lambda = 0$, $\rho = -\beta = \pm 1$. Rezultă că grupul $(ABCD)$ este sau grupul (8), dacă $\beta = -\rho = 1$, sau grupul generat prin transformările infinitesimale

$$X_{12}, \ X_{34}, \ X_{13}, -X_{24}, \ X_{14} + X_{23},$$

care se obţin din (8), prin schimbarea indicelui 3 cu indicele 4, deci de fapt reprezintă acelaşi grup.

Să presupunem acum că transformările infinitesimale C, D nu sunt linear independente nici în X_{13}, X_{14}, nici în X_{23}, X_{24} caz, care se obţine din primul prin schimbarea lui 1 cu 2. Putem atunci lua

$$\begin{aligned} A &= X_{12} + \alpha X_{14} + \beta X_{24} + \gamma X_{23}, \ C = X_{13} + kX_{14} \\ B &= X_{34} + mX_{14} + nX_{24} + rX_{23}, \ D = pX_{23} + qX_{24} \end{aligned} \tag{11}$$

unde unul cel puţin din coeficienţii p, q este diferit de zero. In acest caz însă, C, D sunt rotaţi, deci grupul are rotaţii şi putem presupune că $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

---

[1]) p. 159.

Avem deci

$$(AB) = -mX_{24} + nX_{14} + rX_{13},$$
$$(AC) = -X_{23} - kX_{24}\,(AD) = pX_{13} + qX_{14}$$

şi ultima paranteză ne spune că p trebue să fie diferit de zero, deci se poate lua $p = 1$ şi $r = 0$. In acest caz, pentru ca A, B, C, D să formeze un grup, trebue să avem

$$k = q,\ m = n = 0.$$

Pe de altă parte, avem

$$(BC) = -X_{14} + kX_{13} = kC - (1 + k^2)\,X_{14}.$$

Trebue deci să avem $1 + k^2 = 0$, deci k este imaginar şi, prin urmare, cazul (11) nu este posibil.

Mai rămâne de considerat cazul în care transformările B, C, D nu conţin X_{34}. Transformările B, C, D pot deci să fie luate ca funcţii lineare de X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24} şi putem presupune că sunt independente în X_{13}, X_{14}, X_{23}, deci că avem

$$A = X_{12},\ B = X_{13} + mX_{24},\ C = X_{14} + nX_{24},\ D = X_{23} + lX_{24}. \qquad (12)$$

In adevăr, dacă B, C, D ar fi independente în X_{13}, X_{14}, X_{24} de exemplu, ar fi suficient să schimbăm 3 cu 4 pentru a ne reduce la primul caz.

Paranteza transformărilor A, C se scrie

$$(AC) = -X_{24} + nX_{14} = nC - (1 + n^2)\,X_{24}.$$

Trebue deci ca $n^2 + 1 = 0$, deci n este imaginar.

Avem deci teorema:

Dacă un spaţiu V_4 posedă ca grup complet de stabilitate a originii un G_4, se poate face astfel ca acest G_4 să fie definit prin transformările infinitesimale

$$X = X_{12},\ Y = X_{34},\ U = X_{13} + X_{24},\ V = X_{14} - X_{23} \qquad (13)$$

făcând abstracţie, eventual, de termeni de ordinul al doilea.

4. Am văzut că spaţiile V_4, a căror metrică este dată de formula (7), posedă grupul G_4 definit prin transformările X, Y, U, V. Se poate arăta că acestea sunt singurele spaţii care posedă un G_4. In primul rând, se poate arăta că se poate face astfel ca termenii de ordinul al doilea şi de ordin superior să fie nuli, deci ca G_4 să fie definit de (13). Proprietatea este generală, şi anume, dacă într'un spaţiu cu conexiune afină A_n se aleg într'un punct coordonate normale, coeficienţii de ordinul al doilea şi de ordin superior în transformările grupului de stabilitate sunt nuli [5][1]). Noi vom da aici o demonstraţie directă.

Pentru aceasta, să considerăm ca noi coordonate

$$x^1 = u\cos\varphi\ \cos\theta,\ x^2 = u\cos\varphi\sin\theta,\ x^3 = u\sin\varphi\cos\varphi,\ x^4 = u\sin\varphi\sin\varphi \qquad (13')$$

---

[1]) v. I, p. 219.

In raport cu aceste variabile, X, Y sunt rotaţii de unghiuri θ şi φ, deci avem

$$X = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

făcând abstracţie de termenii de ordinul al doilea.

Cât despre U şi V, ele devin în aceleaşi condiţii

$$\begin{aligned} U &= \cos(\theta - \varphi)\frac{\partial f}{\partial \nu} + \sin(\theta - \varphi)\left[\operatorname{tg}\nu \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cotg}\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] \\ V &= -\sin(\theta - \varphi)\frac{\partial f}{\partial \nu} + \cos(\theta - \varphi)\left[\operatorname{tg}\nu \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cotg}\nu \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

In adevăr avem,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = -u\sin\nu\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x^1} - u\sin\nu\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x^2} + u\cos\nu\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x^3} + u\cos\nu\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -u\cos\nu\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x^1} + u\cos\nu\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -u\sin\nu\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x^3} + u\sin\nu\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x^4}$$

Inmulţind prima din aceste relaţii cu $\cos(\theta - \varphi)$, cea de a doua cu $\sin(\theta - \varphi)\operatorname{tg}\nu$ şi a treia cu $\sin(\theta - \varphi)\operatorname{cotg}\nu$, coeficientul lui $\frac{\partial f}{\partial x^1}$ devine

$$-\cos(\theta - \varphi)\, u \sin\nu\cos\theta - \sin(\theta - \varphi)\operatorname{tg}\nu\, u\cos\nu\sin\theta = -x^3$$

deci el reprezintă coeficientul lui $\frac{\partial f}{\partial x^1}$ în U. Verificări analoage sunt valabile pentru ceilalţi coeficienţi ai lui U şi V.

Să observăm acum că structura grupului (13) este definită de formulele

$$\begin{aligned} &(XY) = 0,\ (XU) = V,\ (XV) = -U \\ &(YU) = -V,\ (YV) = U,\ (UV) = 2X - 2Y. \end{aligned} \tag{14'}$$

Deoarece X, Y sunt transformări independente şi determină un grup abelian, se poate totdeauna lua (5)[1])

$$X = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

variabilele spaţiului fiind u, ν, θ, φ. Se poate deci presupune că în primele două formule (13), termenii de ordinul al doilea sunt nuli.

[1]) v. I, p. 34.

Făcând aceasta, celelalte formule (14′), afară de ultima, ne spun că trebue să avem

$$U = \cos(\theta - \varphi)\ N + \sin(\theta - \varphi)\ M$$
$$V = -\sin(\theta - \varphi)\ N + \cos(\theta - \varphi)\ M$$

unde am pus

$$M = a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v} + c\frac{\partial f}{\partial \theta} + d\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$
$$N = \alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \beta\frac{\partial f}{\partial v} + \gamma\frac{\partial f}{\partial \theta} + \delta\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

coeficienţii $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ fiind independenţi de θ şi φ. Rezultă că transformările X, Y, N constitue un grup abelian, deci că ne putem aranja astfel ca să avem

$$N = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Făcând aceasta, avem

$$(U\,V) = \frac{\partial}{\partial v} M - (c - d)\ M.$$

Dacă se impune lui U, V ultima condiţie (14′), se găsesc relaţiile

$$\begin{aligned} &a_v - (c - d)\ a = 0, \quad b_v - (c - d)\ b = 0 \\ &c_v - (c - d)\ c = 2, \quad d_v - (c - d)\ d = -2. \end{aligned} \tag{14″}$$

Primele ne dau, presupunând $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$\frac{a_v}{a} = \frac{b_v}{b} = c - d$$

deci $b = ka$ unde k este independentă de v. De asemenea, punând $c - d = 2\alpha$, $cd = \beta$, ultimele ecuaţii (14″) se scriu

$$\alpha_v = 2(1 + \alpha^2), \quad \beta_v = 4\alpha(\beta - 1).$$

Avem deci, adăugând eventual lui v o funcţie de u

$$\alpha = -\operatorname{cotg} 2v, \quad \beta = 1 + m\ (\sin 2v)^{-2}, \quad a = n\ (\sin 2v)^{-1},$$

unde m şi n sunt funcţii de u. Se poate deci lua

$$c = \operatorname{tg} v + p, \quad d = \operatorname{cotg} v + p$$

unde p este definit de formula

$$p = \frac{1}{\sin 2v}\left(-1 \pm \sqrt{1 + m}\right).$$

Rezultă deci că avem valorile lui U, V date de formulele (13), dacă $a = b = p = 0$. Astfel, se adaugă lui U, de exemplu, expresia

$$\frac{\sin(\theta-\varphi)}{2\sin\nu\cos\nu}\left[n\left(\frac{\partial f}{\partial u}+k\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)+\left(-1\pm\sqrt{1+m}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right] \tag{14'''}$$

Avem însă, ţinând seama de formulele (13′)

$$\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\nu\cos\nu}=\frac{x^2x^3-x^1x^4}{u^2\sin^2\nu\cos^2\nu}=\frac{u^2(x^2x^3-x^1x^4)}{[(x^1)^2+([x^2)^2][x^3)^2+(x^4)^2]}$$

unde $u^2=(x^1)^2+\ldots+(x^4)^2$.

Ţinând seama de valorile $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial \nu}$, $\frac{\partial f}{\partial\theta}$, $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$, cu ajutorul variabilelor x^1, x^2, x^3, x^4, se vede uşor că expresia (14‴) nu este de ordinul întâi în origine, coeficienţii săi devenind infiniţi. Deci, avem teorema:

Cele patru transformări infinitesimale ale grupului de stabilitate, având structura (14′), *pot fi totdeauna considerate ca date de formulele* (13).

5. Pentru ca o metrică în variabilele θ, φ, u, ν să admită transformările infinitesimale X, Y, trebue să fie de forma

$$\begin{aligned}ds^2 &= a_{11}\,du^2+2a_{12}\,du\,d\theta+2a_{13}\,du d\nu+2a_{14}\,du\,d\varphi\\&+a_{22}\,d\theta^2+2a_{23}\,d\theta\,d\nu+2a_{24}\,d\theta\,d\varphi\\&+a_{33}\,d\nu^2+2a_{34}\,d\nu\,d\varphi+a_{44}\,d\varphi^2\end{aligned} \tag{15}$$

unde coeficienţii a_{ij} nu depind de variabilele θ, φ.

Pentru ca această metrică să admită o transformare infinitesimală $\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$, trebue ca a_{ij} să satisfacă condiţiilor lui Killing [1] [1])

$$\xi^\lambda\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^\lambda}+a_{i\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^k}+a_{k\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^i}=0.$$

sau, cum se spune încă, trebue ca derivata lui Lie a lui a_{ik} cu ajutorul lui ξ^λ să fie nulă.

Dacă se consideră ca transformare infinitesimală, transformarea U şi se dau ca indici 1, 2, 3, 4 variabilelor u, θ, ν, φ, avem, ţinând seama de faptul că a_{ij} nu depind de θ şi φ

$$\cos(\theta-\varphi)\frac{\partial a_{ik}}{\partial\nu}+a_{i\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^k}+a_{k\lambda}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^i}=0 \tag{16}$$

Deoarece coeficienţii lui U nu depind de u, avem pentru $i=k=1$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial\nu}=0. \tag{16'}$$

[1]) p. 495.

De asemenea, ţinând seamă că $\xi^1 = 0$ şi că ξ^3 nu depinde de φ, avem pentru $i = k = 3$

$$\cos(\theta - \varphi)\frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} + 2\left(\frac{a_{23}}{\cos^2\varphi} - \frac{a_{34}}{\sin^2\varphi}\right)\sin(\theta - \varphi) = 0.$$

Această relaţie, ţinând seama că a_{ij} nu depind de θ şi φ, ne dă

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{a_{23}}{\cos^2\varphi} - \frac{a_{34}}{\sin^2\varphi} = 0. \tag{17}$$

Dacă se dă lui i şi k valoarea 2, se obţine

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} + 2a_{22}\operatorname{tg}\varphi + 2a_{24}\operatorname{cotg}\varphi = 0, \; a_{23} = 0 \tag{18}$$

deci, avem de asemenea, $a_{34} = 0$, în virtutea ultimei ecuaţii (17).

Dacă $i = k = 4$, avem

$$\frac{\partial a_{44}}{\partial \varphi} - 2a_{24}\operatorname{tg}\varphi - 2a_{44}\operatorname{cotg}\varphi = 0. \tag{19}$$

In sfârşit, pentru $i = 1$, $k = 2$, avem

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi} + a_{12}\operatorname{tg}\varphi + a_{14}\operatorname{cotg}\varphi = 0, \; a_{13} = 0, \tag{20}$$

pentru $i = 1$, $k = 3$ şi $i = 1$, $k = 4$, avem

$$\frac{a_{12}}{\cos^2\varphi} - \frac{a_{14}}{\sin^2\varphi} = 0, \quad \frac{\partial a_{14}}{\partial \varphi} - a_{12}\operatorname{tg}\varphi - a_{14}\operatorname{cotg}\varphi = 0 \tag{21}$$

pentru $i = 2$, $k = 3$ şi $i = 3$, $k = 4$ avem

$$\frac{a_{22}}{\cos^2\varphi} - \frac{a_{24}}{\sin^2\varphi} - a_{33} = 0, \quad \frac{a_{24}}{\cos^2\varphi} - \frac{a_{44}}{\sin^2\varphi} + a_{33} = 0 \tag{22}$$

şi pentru $i = 2$, $k = 4$ avem

$$\frac{\partial a_{24}}{\partial \varphi} - a_{22}\operatorname{tg}\varphi - a_{24}\operatorname{cotg}\varphi + a_{24}\operatorname{tg}\varphi + a_{44}\operatorname{cotg}\varphi = 0. \tag{23}$$

Se vede că formulele (16′), (17), (18) şi (20) ne spun că avem

$$a_{13} = a_{23} = a_{34} = 0$$

şi că a_{11}, a_{33} sunt independente de variabila φ.

Dacă se pune

$$a_{12} = a\cos^2\varphi, \; a_{14} = a\sin^2\varphi$$

formulele (20) şi (21) ne spun că a este o funcţie independentă de φ. De asemenea, formulele (22) ne spun că se poate pune

$$a_{24} = b\sin^2\varphi, \; \cos^2\varphi, \; a_{22} = a_{33}\cos^2\varphi + b\cos^4\varphi, \; a_{44} = a_{33}\sin^2\varphi + b\sin^4\varphi$$

şi formulele (19) şi (23) ne spun că b este o funcţie independentă de φ.

Se poate deci scrie metrica (15) sub forma

$$ds^2 = a_{11}\,du^2 + a_{33}\,d\rho^2 + 2a\,(\cos^2\rho\,d\theta + \sin^2\rho\,d\varphi)\,du + \\ + a_{33}\,(\cos^2\rho\,d\theta^2 + \sin^2\rho\,d\varphi^2) + b\,(\cos^2\rho\,d\theta + \sin^2\rho\,d\varphi)^2 \qquad (24)$$

unde cele patru funcţii a_{11}, a_{33}, a şi b depind numai de variabila u.

Revenind la variabilele x^1, x^2, x^3, x^4 şi ţinând seama că avem

$$u^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^4)^2,\ u\,du = x^1dx^1 + \ldots + x^4\,dx^4$$

$$(dx^1)^2 + \ldots + (dx^4)^2 = du^2 + u^2d\rho^2 + u^2\,(\cos^2\rho\,d\theta^2 + \sin^2\rho\,d\varphi^2)$$

$$x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 = u^2\cos^2\rho\,d\theta,\ x^3dx^4 - x^4\,dx^3 = u^2\sin^2\rho\,d\varphi$$

metrica (24) se scrie

$$ds^2 = \left(a_{11} - \frac{a_{33}}{u^2}\right)\left(x^1\,dx^1 + \ldots + x^4\,dx^4\right)^2 + \frac{a_{33}}{u^2}\left[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^4)^2\right] + \\ + \frac{2a}{u^2}(x^1\,dx^1 + \ldots + x^4dx^4)\,\omega + \frac{b}{u^4}\,\omega^2.$$

Această metrică este, prin urmare, de forma (7).

Avem deci teorema:

Dacă un spaţiu V_4 admite ca grup de stabilitate a originii un grup G_4, se poate totdeauna face în aşa fel ca metrica sa să fie de forma (7).

CAPITOLUL II

Spaţii V_4 având un G_8

1. Se ştie că un spaţiu V_4 cu curbură constantă are ca grup de mişcare un G_{10}. Dacă spaţiul nu este cu curbură constantă, după teorema lui Fubini, el nu poate avea un grup de mişcare cu nouă parametri. Vrem să arătăm acum că spaţiile V_4 ce posedă un G_8 sunt spaţii simetrice ale lui Cartan, depinzând de o constantă arbitrară [4][1]).

Să arătăm în primul rând că grupul G_8 nu poate fi intransitiv. Intr'adevăr, să presupunem că grupul de stabilitate într'un punct este grupul G_8 definit de transformările infinitesimale (1).

Să arătăm că acest grup nu poate fi conţinut într'un G_8. Dacă A, B sunt alte două transformări ale grupului G_8 se poate, printr'o transformare ortogonală de coordonate şi prin combinaţii lineare ale celor doi operatori A, B, presupunem că avem

$$A = \frac{\partial f}{\partial x^1} + a^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i},\ B = \frac{\partial f}{\partial x^2} + b^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

unde a^i, b^i sunt de primul ordin cel puţin în x. Să considerăm acum parantezele lui Poisson formate cu A şi cu X_{13}, X_{14}. Avem

$$(AX_{13}) = \frac{\partial f}{\partial x^3} + c^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i},\ (AX_{14}) = \frac{\partial f}{\partial x^4} + d^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

[1]) p. 43.

şi, prin urmare, aceste paranteze nu se pot exprima numai cu A, B şi X_{pq}, deci aceşti operatori nu pot forma un grup G_8. Se poate observa de altfel că ei nu pot forma niciun G_9.

Grupul de stabilitate nu poate fi un G_5, căci am arătat în cap. I că grupul G_6 al rotaţiilor nu poate avea un G_5 real.

Rămâne deci de considerat numai cazul în care grupul de stabilitate este un G_4 şi deci grupul de mişcări ale spaţiului este transitiv. In acest caz, vrem să arătăm că spaţiul V_4 este simetric şi G_8 este grupul complet de mişcări ale spaţiului.

Pentru aceasta, vom pleca dela faptul demonstrat în cap. I că grupul de stabilitate G_4 poate fi considerat ca definit de transformările infinitesimale (13),

$$X = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad Y = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$U = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{25}$$

$$V = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

iar structura acestui grup este dată de formulele (14'):

$$\begin{aligned} &(XY) = 0, \ (XU) = V, \ (XV) = -U \\ &(YU) = -V, \ (YV) = U, (UV) = 2X - 2Y. \end{aligned} \tag{26}$$

Să presupunem acum că grupul (25) este conţinut într'un G_8 transitiv. Putem lua ca operatori ai lui G_8, operatorii X, Y, U, V şi operatorii

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + a_i^r \frac{\partial f}{\partial x^r} (i, r = 1, \ldots, 4) \tag{26'}$$

unde a_i^r sunt cantităţi de primul ordin cel puţin în x^i. Făcând astfel, avem formule de forma

$$\begin{aligned} (A_1 X) &= A_2 + \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 U + \delta_1 V \\ (A_2 X) &= -A_1 + \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 U + \delta_2 V \\ (A_3 Y) &= A_4 + \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 U + \delta_3 V \\ (A_4 Y) &= -A_3 + \alpha_4 X + \beta_4 Y + \gamma_4 U + \delta_4 V \end{aligned}$$

unde α, β, γ, δ sunt constante.

Ţinând seama de faptul că A_i sunt determinate de formulele (26'), abstracţie făcând de termeni lineari în X, Y, U, V, şi că, pe de altă parte, X şi Y sunt permutabili, rezultă că putem alege termenii lineari în X, Y, aşa fel ca α_i, β_i să fie nuli. In acest caz, A_i sunt determinate, abstracţie făcând de o transformare de forma

$$\overline{A}_i = A_i + c_i U + d_i V.$$

Ţinând seama de asemenea că avem

$$(A_i\ Y) = m_i\ X + n_i\ Y + p_i\ U + q_i\ V \quad (i = 1, 2)$$
$$(A_s\ X) = m_s\ X + n_s\ Y + p_s\ U + q_s\ V \quad (s = 3, 4)$$

putem alege c_i, d_i aşa ca să reducem la zero p_i, q_i şi atunci A_i sunt complet determinate în structura

$$(A_1\ X) = A_2 + \gamma_1\ U + \delta_1\ V, \qquad (A_1\ Y) = m_1\ X + n_1\ Y$$
$$(A_2\ X) = -\ A_1 + \gamma_2\ U + \delta_2\ V, \quad (A_2\ Y) = m_2\ X + n_2\ Y$$
$$(A_3\ Y) = A_4 + \gamma_3\ U + \delta_3\ V, \qquad (A_3\ X) = m_3\ X + n_3\ Y$$
$$(A_4\ Y) = -\ A_3 + \gamma_4\ U + \delta_4\ V, \quad (A_4\ X) = m_4\ X + n_4\ Y.$$

Considerând însă identităţile formate cu X, Y şi cu una dintre A_i, avem, ţinând seama că X, Y sunt permutabile

$$[(A_i\ X)\ Y] = [(A_i Y)\ X]$$

şi pentru $i = 1, 2$, avem

$$m_2\ X + n_2\ Y + \gamma_1\ V - \delta_1\ U = 0, \quad -\ m_1\ X - n_1\ Y + \gamma_2\ V - \delta_2\ U = 0$$

şi relaţii analoage pentru $i = 3, 4$, care ne spun astfel că m_i, n_i, γ_i, δ_i sunt toate nule, deci că avem formulele de structură

$$\begin{aligned}(A_1\ X) &= A_2,\ (A_1\ Y) = 0,\ (A_2\ X) = -\ A_1,\ (A_2\ Y) = 0\\ (A_3\ X) &= 0,\ (A_3\ Y) = A_4,\ (A_4\ X) = 0,\ (A_4\ Y) = -\ A_3\end{aligned} \tag{27}$$

Să considerăm acum parantezele

$$(A_1\ U) = A_3 + a_1\ X + b_1\ \ Y + c_1\ U + d_1\ V$$
$$(A_1\ V) = A_4 + \alpha_1\ X + \beta_1\ \ Y + \gamma_1\ U + \delta_1\ V$$
$$(A_2\ U) = A_4 + a_2\ X + b_2\ \ Y + c_2\ U + d_2\ V$$
$$(A_2\ V) = -\ A_3 + \alpha_2\ X + \beta_2 Y + \gamma_2\ U + \delta_2 V.$$

Identitatea formată cu A_1, U, Y se scrie

$$[(A_1\ U) Y] + [(U\ Y)\ A_1] = 0$$

şi ne dă

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,\ \delta_1 = c_1,\ \gamma_1 = -\ d_1.$$

Ţinând seama de aceste formule, identitatea formată cu A_1, U, X ne dă

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0.$$

In ceea ce priveşte identităţile $(A_1 V Y)$, $(A_2 U Y)$, $(A_2 U X)$, ele ne dau

$$a_1 = b_1 = 0,\ \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \lambda_2 = 0,\ c_1 = d_1 = 0.$$

Consideraţii analoage au loc pentru parantezele $(A_3 U)$, $(A_3 V)$, $(A_4 U)$, $(A_4 V)$, aşa că avem

$$\begin{aligned}(A_1\ U) &= A_3,\ (A_1 V) = A_4,\ (A_2\ U) = A_4,\ (A_2 V) = -\ A_3\\ (A_3\ U) &= -\ A_1,\ (A_3 V) = A_2,\ (A_4\ U) = -\ A_2,\ (A_4\ V) = -\ A_1\end{aligned} \tag{28}$$

2. Să considerăm de asemenea identităţile formate cu $A_1, A_2, X; A_1 A_2 Y$. Ele se scriu, ţinând seama de formulele (27)

$$[(A_1 A_2) X] = 0, \; [(A_1 A_2) Y] = 0$$

Deci rezultă că avem

$$(A_1 A_2) = lX + mY$$

şi identităţile $(A_1 A_2 U), (A_1 A_2 V)$ ne dau

$$\begin{aligned} (l - m) V - (A_1 A_4) + (A_2 A_3) &= 0 \\ (m - l) U + (A_1 A_3) + (A_2 A_4) &= 0. \end{aligned} \tag{28'}$$

De asemenea, identităţile $(A_1 A_3 X)$, $(A_1 A_3 Y)$ ne dau

$$\begin{aligned} [(A_1 A_3) X] - (A_2 A_3) &= 0 \\ [(A_1 A_3) Y] - (A_1 A_4) &= 0 \end{aligned}$$

astfel că, ţinând seama de formulele (28'), obţinem

$$\begin{aligned} 2(A_1 A_3) &= (l - m) U, \quad 2(A_2 A_4) = (l - m) U \\ 2(A_1 A_4) &= (l - m) V, \quad 2(A_2 A_3) = (m - l) V \end{aligned}$$

şi identitatea $(A_1 A_2 A_3)$ ne spune că $l = 2m$.

Considerând de asemenea identitatea $(A_2 A_3 U)$, obţinem

$$(A_3 A_4) = mX + 2mY$$

Punând

$$m = -2\lambda,$$

avem formulele de structură

$$\begin{aligned} (A_1 A_2) &= -4\lambda X - 2\lambda Y, \; (A_1 A_3) = -\lambda U, \; (A_1 A_4) = -\lambda V \\ (A_2 A_3) &= \lambda V, \; (A_2 A_4) = -\lambda U, \; (A_3 A_4) = -2\lambda X - 4\lambda Y, \end{aligned} \tag{29}$$

unde λ este o constantă şi se verifică uşor că toate identităţile sunt verificate.

Rezultă deci că operatorii $A_1, A_2, A_3, A_4, X, Y, U, V$, ale căror formule de structură sunt date de (26), (27), (28), (29), definesc un grup G cu 8 parametri.

Punând

$$A_5 = X, \; A_6 = Y, \; A_7 = U, \; A_8 = V$$

formulele de structură a grupului G sunt de forma

$$\begin{aligned} (A_k A_l) &= c_{kl}^{\alpha} A_\alpha \quad (h, k, l = 1, \ldots, 4) \\ (A_k A_\beta) &= a_{k\beta}^{h} A_h \quad (\alpha, \beta, \gamma = 5, \ldots, 8) \\ (A_\beta A_\gamma) &= c_{\beta\gamma}^{\alpha} A_\alpha \end{aligned} \tag{30}$$

unde $a_{k\beta}^{h}$ sunt strâmb simetrice în h, k.

Deoarece parantezele $(A_k A_l)$ se exprimă numai cu ajutorul operatorilor A_α ai grupului de stabilitate, rezultă că spaţiul V_4 ce are G ca grup de mişcare, este un spaţiu simetric al lui Cartan [2][1]).

[1]) p. 225.

3. Dacă considerăm formele ds^p $(p = 1, \ldots, 8)$, ce sunt lăsate invariante de grupul G, avem formulele de structură

$$\begin{aligned}
\Delta s^1 &= -[ds^2\, ds^5] - [ds^3\, ds^7] - [ds^4\, ds^8] \\
\Delta s^2 &= [ds^1\, ds^5] + [ds^3\, ds^8] - [ds^4\, ds^7] \\
\Delta s^3 &= [ds^1\, ds^7] - [ds^2\, ds^8] - [ds^1\, ds^6] \\
\Delta s^4 &= [ds^1\, ds^8] + [ds^2\, ds^7] + [ds^3\, ds^6] \\
\Delta s^5 &= -4\lambda[ds^1\, ds^2] - 2\lambda[ds^3\, ds^4] + 2[ds^7\, ds^8] \\
\Delta s^6 &= -2\lambda[ds^1\, ds^2] - 4\lambda[ds^3\, ds^4] - 2[ds^7\, ds^8] \\
\Delta s^7 &= -\lambda[ds^1 ds^3] - \lambda[ds^2\, ds^4] - [ds^5 ds^8] + [ds^6\, ds^8] \\
\Delta s^8 &= -\lambda[ds^1\, ds^4] + \lambda[ds^2\, ds^3] + [ds^5\, ds^7] - [ds^6\, ds^7]
\end{aligned} \tag{31}$$

unde am pus

$$\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a\,,\quad [ds^a\, ds^b] = ds^a\, \delta s^b - ds^b\, \delta s^a\,.$$

Forma pătratică

$$d\sigma^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2 + (ds^4)^2 \tag{32}$$

este deci un invariant la transformările grupului G. Pe de altă parte, primele 4 formule (31) ne arată că sistemul

$$ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = 0$$

este complet integrabil, deci putem scrie

$$ds^h = \lambda_i^h\, dx^i\,,\quad ds^\alpha = \lambda_i^\alpha\, dx^i + \lambda_\beta^\alpha\, dx^\beta \tag{32'}$$

unde h, i, variază dela 1 la 4, iar α, β, dela 5 la 8. Cantităţile λ_i^h depind atât de variabilele x^i, cât şi de variabilele x^α; metrica (32) depinde însă numai de variabilele x^i, deci avem

$$d\sigma^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

unde a_{ij} sunt funcţii numai de variabilele x^i. In adevăr, să presupunem că formăm covarianţii $\Delta s^h = \delta ds^h - d\delta s^h$ cu doi operatori d, δ, din care primul d are toate componentele dx^α nule, în timp ce al doilea δ are toate δx^i nule. Avem deci

$$\delta s^h = 0,\quad \Delta s^h = \delta ds^h \quad (h = 1, \ldots, 4).$$

Inmulţind acum Δs^h cu ds^h şi făcând suma, obţinem

$$\delta d\sigma^2 = 2d\sigma\, \delta d\sigma = 2ds^h\, \delta ds^h$$

sumă care, în virtutea primelor 4 ecuaţii (31), este nulă. Metrica (32) nu variază deci pentru o deplasare în care variază variabilele x^α, deci această metrică este independentă de aceste variabile. Formula (32) ne dă deci metrica spaţiului V_4, ce admite grupul G cu opt parametri, ca grup de mişcare.

In ce priveşte componentele tensorului de curbură pe cele 4 congruenţe ortogonale definite de cele patru forme Pfaff, $ds^1, \ldots, ds^4$, ele sunt date de formulele

$$\gamma^h_{klr} = a^h_{k\alpha}\, c^\alpha_{lr}\,.$$

Ţinând seama de formulele (27), (28) şi (29) rezultă că avem

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{212} = 4\lambda, \quad \gamma^1_{313} = \gamma^1_{414} = \lambda \\ &\gamma^h_{khk} = \gamma^\alpha_{\beta\alpha\beta}\,,\ \gamma^1_{234} = 2\lambda,\ \gamma^1_{324} = \lambda \ (\alpha, \beta, h, k = 1, \ldots, 4) \end{aligned} \tag{33}$$

unde h, k, α, β sunt indici distincţi. In ce priveşte componentele γ^h_{khl}, unde trei indici sunt distincţi, ele sunt toate nule. Formulele (33) coincid cu formulele (27) [4][1]), deci am regăsit aceleaşi spaţii simetrice V_4.

Avem deci teorema:

Spaţiile V_4 ce admit un grup de mişcare cu 8 parametri sunt spaţiile simetrice (33).

4. Ţinând seama de faptul că metrica (32) a spaţiului V_4 nu depinde de variabilele x^α, deci că este invariantă atunci când dăm valori particulare acestor variabile, putem să ne folosim de acest fapt pentru a căuta o soluţie particulară a ecuaţiilor (31), în care ds^5, ds^6, ds^7, ds^8 să fie combinaţii lineare de ds^1, ds^2, ds^3, ds^4. In adevăr, dacă x^α au valori particulare, atunci ds^α date de ultimele formule (32′) conţin numai diferenţialele dx^i, deci sunt combinaţii lineare de ds^h.

Se verifică uşor că o soluţie particulară se obţine punând

$$ds^5 = 2m\ ds^2,\ ds^6 = m\ ds^2,\ ds^7 = m ds^3,\ ds^8 = m ds^4 \tag{34}$$

unde constanta m este definită în funcţie de λ prin formula

$$m^2 = -\lambda$$

deci m este reală dacă λ este negativ.

Ţinând seama de (34) în formulele (31), obţinem

$$\begin{aligned} &\Delta s^1 = 0,\ \Delta s^2 = 2m\ [ds^1\, ds^2] + 2m\ [ds^3\, ds^4]\,, \\ &\Delta s^3 = m\ [ds^1 ds^3],\ \Delta s^4 = m\ [ds^1\, ds^4] \end{aligned} \tag{34′}$$

Rezultă deci că, dacă λ este negativ, grupul G are un subgrup simplu transitiv real, în timp ce, dacă λ este pozitiv, G are un subgrup simplu transitiv imaginar. In orice caz se poate satisface structurii (34′) punând

$$\begin{aligned} &ds^1 = dy^1\,,\ ds^2 = e^{-2my^1}\ (dy^2 - 2m\ y^3\, dy^4) \\ &ds^3 = e^{-my^1}\ dy^3,\ ds^4 = e^{-my^1}\ dy^4 \end{aligned}$$

Avem deci teorema:

Dacă curbura λ a spaţiului simetric (33) *este negativă, metrica spaţiului poate fi scrisă sub forma*

$$d\sigma^2 = (dy^1)^2 + e^{-4my^1}\ (dy^2 - 2my^3\, dy^1)^2 + e^{-2my^1}\ [(dy^3)^2 + (dy^4)^2]$$

unde $m = \sqrt{-\lambda}$.

[1]) p. 43.

CAPITOLUL III

Spaţii V_4 cu grup de mişcare transitiv cu mai puţin de 8 parametri

1. Lăsând la o parte cazul când grupul de stabilitate al unui V_4 are patru parametri să presupunem că grupul de stabilitate este un G_3. In acest caz putem lua ca primi operatori ai acestui grup

$$X = X_{12},\ U = \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \gamma X_{23} + \delta X_{24} + \lambda X_{34}, \tag{35}$$

dacă presupunem că grupul conţine cel puţin o rotaţie.

Ţinând seama că avem

$$(XU) = -\alpha X_{23} - \beta X_{24} + \gamma X_{13} + \delta X_{14} \tag{35'}$$

rezultă că dacă $\lambda \neq 0$ şi una cel puţin din constantele α, β, γ, δ este diferită de zero, trebue să avem ca al treilea operator al grupului G_3:

$$V = -\alpha X_{23} - \beta X_{24} + \gamma X_{13} + \delta X_{14} \tag{36}$$

Considerând acum paranteza (XV) avem

$$(XV) = -\alpha X_{13} - \beta X_{14} - \gamma X_{23} - \delta X_{24}$$

Or, această paranteză trebue să se exprime cu ajutorul lui X, U, V, dacă X, U, V formează un grup, şi cum în (XV) nu figurează nici X_{12} nici X_{34}, rezultă că $(XV) = \rho V$, deci avem relaţii de forma

$$-\alpha = \rho\gamma,\ -\beta = \rho\delta,\ \gamma = \rho\alpha,\ \delta = \rho\beta$$

ceea ce ne spune că ρ nu poate fi real. Acelaşi lucru are loc dacă avem $X = X_{12}$, $U = X_{34}$ şi V dat de formula (35). Rezultă deci că în formulele (35) trebue să avem $\lambda = 0$ şi deci una cel puţin din cantităţile α, β, γ, δ diferită de zero. Printr'o schimbare eventuală de indici, putem presupune că $\alpha \neq 0$. De asemenea, printr'o transformare ortogonală a variabilelor x^1, x^2, putem presupune că $\gamma = 0$, deci putem lua

$$X = X_{12},\ U = X_{13} + kX_{14} + lX_{24}.$$

Formula (35') ne spune că putem să luăm

$$V = X_{23} + kX_{24} - lX_{14}.$$

Dacă facem acum paranteza $(U\ V)$, avem

$$(UV) = -(1 + k^2 + l^2)\,X - 2lX_{34}$$

ceea ce ne spune că $l = 0$. Transformările grupului de stabilitate sunt deci date de

$$X = X_{12},\ U = X_{13} + kX_{14},\ V = X_{23} + kX_{24}$$

k fiind o constantă. Punând $k = \operatorname{tg}\alpha$ şi luând ca noi variabile

$$\bar{x}^1 = x^1, \quad \bar{x}^3 = \cos\alpha\, x^3 + \sin\alpha x^4$$

$$\bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^4 = -\sin\alpha x^3 + \cos\alpha x^4,$$

avem

$$X = \bar{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^2} - \bar{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}, \; U = \bar{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^3} - \bar{x}^3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}, \; V = \bar{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^3} - \bar{x}^3 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^2}$$

deci grupul este format din transformările infinitesimale ale grupului rotaţiilor în spaţiul cu trei dimensiuni $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$.

Avem deci teorema:

Grupurile de stabilitate G_3 cu trei parametri în V_4 sunt grupuri de rotaţie în trei variabile, dacă G_3 conţine cel puţin o rotaţie.

Putem lua deci

$$X = X_{12}, \; U = X_{13}, \; V = X_{23} \tag{37}$$

şi avem formulele de compoziţie

$$(UX) = V, \; (XV) = U, \; (VU) = X.$$

Dacă G_3 nu conţine nicio rotaţie, el poate fi scris sub forma [8][1])

$$X = X_{12} - X_{34}, \; U = X_{13} + X_{24}, \; V = X_{14} - X_{23} \tag{37'}$$

şi constitue un subgrup al grupului (25). Prin calcule analoage se demonstrează uşor că spaţiile V_4 cu grup de mişcare transitiv, având grupul (37') ca grup de stabilitate, sunt spaţii euclidiene E_4.

Spaţiile V_4 ce admit grupul de stabilitate (37) au metrica dată de o formulă de forma

$$ds^2 = a\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + b\,(x^1 dx^1 + x^2\, dx^2 + x^3\, dx^3)^2$$
$$+ c\,(x^1\, dx^1 + x^2\, dx^2 + x^3\, dx^3)\; dx^4 + d\,(dx^4)^2$$

unde a, b, c, d sunt funcţii de $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ şi de x^4.

Există evident spaţii V_4 ce admit un grup de mişcare transitiv, având grupul (37) ca subgrup de stabilitate. Un exemplu de asemenea spaţii ne este dat de spaţiul reductibil având metrica

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^4)^2 \tag{37''}$$

unde $d\sigma^2$ este o metrică cu curbură constanta având variabilele x^1, x^2, x^3 drept coordonate normale. Se poate spune că spaţiul V_4 este în acest caz produsul direct al unui spaţiu V_3 cu curbură constantă şi al unei drepte euclidiene.

2. Să arătăm că acesta constitue singurul caz în care spaţiul V_4 cu grup de stabilitate (37) are un grup transitiv complet cu 7 parametri.

---

[1]) p. 159.

In adevăr, dacă A_i formează împreună cu (37) un grup cu 7 parametri transitiv, atunci avem formulele de forma:

$$\begin{aligned}
(A_1 X) &= A_2 + a_1 X + b_1 U + c_1 V \\
(A_2 X) &= -A_1 + a_2 X + b_2 U + c_2 V \\
(A_1 U) &= A_3 + \alpha_1 X + \beta_1 U + \gamma_1 V \\
(A_3 U) &= -A_1 + \alpha_3 X + \beta_3 U + \gamma_3 V \\
(A_2 V) &= A_5 + m_2 X + n_2 U + p_2 V \qquad (37''') \\
(A_3 V) &= -A_2 + m_3 X + n_3 U + p_3 V \\
(A_i X) &= a_i X + b_i U + c_i V \quad (i = 3, 4) \\
(A_i U) &= \alpha_i X + \beta_i U + \gamma_i V \quad (i = 2, 4) \\
(A_i V) &= m_i X + n_i U + p_i V \quad (i = 1, 4)
\end{aligned}$$

Utilizând transformări de forma

$$\overline{A}_i = A_i + \rho_i X + \lambda_i U + \mu_i V \qquad (37^{IV})$$

se pot folosi cei 12 coeficienţi ρ_i, λ_i, μ_i; să anulăm 11 coeficienţi din formulele (37'''), şi anume

$$b_1, b_3, c_3, b_4, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_2, \gamma_4, m_1, n_1$$

şi transformările (37^{IV}), care conservă această situaţie, sunt de forma

$$\overline{A}_1 = A_1 + a V, \overline{A}_2 = A_2 - aU, \overline{A}_3 = A_3 + aX, \overline{A}_4 = A_4 \qquad (37^{V})$$

Considerând identităţile formate cu un operator A_i şi cu doi din operatorii X, U, V, se găseşte că toate constantele a, b, c, α, β, γ, m, n, p din formulele (37''') sunt nule, deci că avem

$$\begin{aligned}
&(A_1 X) = A_2, \ (A_2 X) = -A_1, \ (A_3 X) = (A_4 X) = 0 \\
&(A_1 U) = A_3, \ (A_2 U) = 0, \quad (A_3 U) = -A_1, \ (A_4 U) = 0 \\
&(A_1 V) = 0, \quad (A_2 V) = A_3, \quad (A_3 V) = -A_2, \ (A_4 V) = 0.
\end{aligned}$$

Considerând identităţile formate cu A_1, A_2, X şi cu A_3, A_4, X, obţinem

$$[(A_1 A_2), X] = 0, \quad [(A_3 A_3), X] = 0.$$

Deci

$$(A_1 A_2) = m A_3 + n A_4 + rX, \ (A_3 A_4) = p A_3 + q A_4 + sX$$

şi printr'o transformare (37^{V}), putem face ca m să fie nul. Celelalte identităţi ne arată că vom avea atunci

$$\begin{aligned}
&(A_1 A_2) = rX, \ (A\ A_3) = r U, \ (A_2 A_3) = r V \\
&(A_1 A_4) = p A_1, \ (A_2 A_4) = p A_2, \ (A_3 A_4) = p A_3
\end{aligned} \qquad (37^{VI})$$

una din constantele p, r trebuind să fie nulă. In cazul când $p = 0$, avem

structura grupului metricei (37''), r fiind negativ dacă $d\sigma^2$ este cu curbură pozitivă şi invers. Dacă $r = 0$ şi $p \neq 0$, putem presupune $p = 1$ şi operatorii

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ X,\ U,\ V$$

definesc grupul de mişcare al metricei

$$ds^2 = e^{-2x^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2. \tag{38}$$

In adevăr, această metrică rămâne invariantă la o transformare ortogonală a variabilelor x^1, x^2, x^3 şi la o transformare de forma

$$x'^4 = x^4 + c,\ x'^i = e^c x^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Or, transformarea infinitesimală corespunzătoare acestei transformări este

$$A_4 = \frac{\partial f}{\partial x^4} + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

care, compusă cu $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, ne dă

$$(A_i\ A_4) = A_i$$

şi corespunde formulelor (37^{VI}), cu $r = 0$ şi $p = 1$.

Metrica (38) este însă cu curbură constantă negativă, deci grupul (37^{VI}) nu este grupul complet de mişcări al spaţiului. In adevăr, dacă putem

$$y^i = x^i,\ y^4 = e^{x^4},$$

metrica (38) se scrie

$$ds^2 = \frac{(dy^1)^2 + \ldots + (dy^4)^2}{(y^4)^2},$$

ce constitue forma canonică a lui Beltrami pentru un spaţiu V_4 cu curbură constantă -1.

Avem deci teorema:

Spaţiile V_4 care nu sunt euclidiene şi care admit un G_7 ca grup complet de mişcări, sunt formate din produsul direct al unui spaţiu V_3 cu curbură constantă şi al unei drepte euclidiene.

3. Să presupunem acum că grupul de stabilitate are doi parametri. Am văzut că acest grup este abelian şi că putem lua

$$X = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ Y = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3} \tag{38'}$$

Există de sigur o infinitate de spaţii V_4 ce admit acest grup de stabilitate. Sunt spaţiile (15) în care a_{ij} nu depind de variabilele θ, φ. Există de asemenea spaţii având un grup transitiv G_6 ce are $(X,\ Y)$ ca grup de stabilitate. Sunt spaţiile având metrica

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\pi^2 \tag{38''}$$

unde $d\sigma^2$ este o metrică cu curbură constantă în variabilele x^1, x^2 şi $d\pi^2$ o

metrică cu curbură constantă în variabilele x^3, x^4. Spaţiul este deci produsul direct a două spaţii cu curbură constantă.

Dacă A_i şi X, Y formează un grup transitiv cu 6 parametri, putem, în baza consideraţiilor făcute în capitolul II, să avem formulele de structură

$$\begin{aligned}&(A_1 X) = A_2,\ (A_2 X) = -A_1,\ (A_1 Y) = 0,\ (A_2 Y) = 0.\\&(A_3 X) = 0,\ (A_4 X) = 0,\quad (A_3 Y) = A_4,\ (A_4 Y) = -A_3\end{aligned} \tag{39}$$

şi identităţile formate cu A_i şi X, Y sunt satisfăcute.

Dacă considerăm identităţile formate cu A_1, A_2, X; $A_1 A_2, Y$, ele ne dau

$$[(A_1 A_2), X] = 0,\ [(A_1 A_2), Y] = 0$$

şi consideraţii analoage pentru A_3, A_4, deci avem

$$(A_1 A_2) = lX + mY,\ (A_3 A_4) = pX + qY.$$

De asemenea, identităţile formate cu A_1, A_3, X şi cu A_2, A_3, X ne dau

$$[(A_1, A_3) X] - (A_2 A_3) = 0,\ [(A_2 A_3) X] + (A_1 A_3) = 0.$$

Aceste identităţi ne spun că $(A_1 A_3)$ şi $(A_2 A_3)$ nu pot conţine termeni în A_3, A_4, X, Y. Dacă considerăm identităţile formate cu A_1, A_3, Y şi A_1, A_4, Y, obţinem

$$[(A_1 A_3) Y] - (A_1 A_4) = 0,\quad [(A_1 A_4) Y] + (A_1 A_3) = 0$$

şi ele ne spun că $(A_1 A_3)$ nu conţine nici termeni în A_1, A_2, deci $(A_1 A_3) = 0$ şi consideraţii analoage sunt valabile pentru celelalte paranteze $(A_1 A_4)$,$(A_2 A_3)$, (A_2, A_4) aşa că avem formulele

$$\begin{aligned}&(A_1 A_2) = lX + mY,\ (A_3 A_4) = pX + qY,\\&(A_1 A_3) = (A_1 A_4) = (A_2 A_3) = (A_2 A_4) = 0\end{aligned}$$

şi toate identităţile sunt verificate, afară de 4, şi anume, acele ce conţin trei operatori A. Aceste identităţi ne spun însă că

$$m = 0,\ p = 0.$$

Deci, A_1, A_2, X şi A_3, A_4, Y formează separat grupuri cu 3 parametri. Metrica spaţiului are deci forma dată de formula (38''). Avem deci teorema:

Spaţiile V_4 ce admit un grup transitiv cu 6 parametri sunt reductibile la produsul direct a două spaţii cu curbură constantă în două variabile.

3. Să considerăm cazul în care grupul de stabilitate este un G_1. In acest caz, operatorul transformării infinitesimale se poate scrie sub forma

$$X = X_{12} + kX_{34} \tag{39'}$$

Dacă această transformare este conţinută într'un grup transitiv şi A_i, X, sunt transformările grupului, avem

$$\begin{aligned}&(A_1 X) = A_2 + \alpha X,\quad (A_2 X) = -A_1 + \beta X\\&(A_3 X) = kA_4 + \gamma X,\quad (A_4 X) = -kA_3 + \delta X\end{aligned}$$

Dacă suntem în cazul general în care $k \neq 0$, putem, adăugând operatorilor A_i termeni convenabili în X, să anulăm α, β, γ, δ, deci să avem

$$(A_1 X) = A_2, \ (A_2 X) = -A_1$$
$$(A_3 X) = kA_4, \ (A_4 X) = -kA_3.$$

Din identităţile formate cu A_1, A_2, X şi A_3, A_4, X, rezultă că trebue să avem

$$(A_1 A_2) = aX, \ (A_3 A_4) = bX \tag{39''}$$

De asemenea, avem identităţile

$$\begin{aligned}
&[(A_1 A_3) X] - k(A_1 A_4) - (A_2 A_3) = 0 \\
&[(A_1 A_4) X] + k(A_1 A_3) - (A_2 A_4) = 0 \\
&[(A_2 A_3) X] - k(A_2 A_4) + (A_1 A_3) = 0 \\
&[(A_2 A_4) X] + k(A_2 A_3) + (A_1 A_4) = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Dacă aplicăm primei din aceste identităţi operatorul X, şi notăm pentru simplicitate $\{[(A_i A_j) X] X\}$ cu $[(A_i A_j) X^2]$, obţinem, ţinând seama de a doua şi de a treia formulă (40):

$$[(A_1 A_3) X^2] = -(k^2 + 1)(A_1 A_3) + 2k(A_2 A_4).$$

De asemenea, avem

$$[(A_2 A_4) X^2] = -(k^2 + 1)(A_2 A_4) + 2k(A_1 A_3) \tag{40'}$$

Dacă aplicăm formulei (40') operatorul X^2, avem

$$[(A_1 A_3) X^4] = [(k^2 + 1)^2 + 4k^2] \ (A_1 A_3) - 4k(k^2 + 1) \ (A_2 A_4).$$

Dacă scoatem $(A_2 A_4)$ din formula (40') şi introducem aici, avem

$$[(A_1 A_3) X^4] = -2(k^2 + 1)[(A_1 A_3) X^2] - (k^2 - 1)^2 (A_1 A_3) \tag{41}$$

ceea ce constitue o relaţie numai în operatorul $(A_1 A_3)$.

Dacă $k^2 \neq 1, 0, 4, 1/4$, această relaţie nu poate avea loc decât dacă $(A_1 A_3) = 0$. In adevăr, dacă punem

$$(A_1 A_3) = mA_1 + nA_2 + pA_3 + qA_4 + rX,$$

avem formulele

$$[(A_1 A_3) X^2] = -mA_1 - nA_2 - k^2(pA_3 + qA_4)$$
$$[(A_1 A_3) X^4] = mA_1 + nA_2 + k^4(pA_3 + qA_4)$$

Astfel că ecuaţia (41) se scrie

$$k^2(k^2 - 4)(mA_1 + nA_2) + (1 - 4k^2)(pA_3 + qA_4) + r(k^2 - 1)X = 0 \tag{40'''}$$

deci trebue să avem

$$m = n = p = q = 0.$$

Dacă $k^2 = 1$, atunci avem

$$(A_1 A_3) = cX.$$

Aceleași considerații au loc pentru celelalte paranteze $(A_2 A_3), (A_1 A_4)$, $(A_2 A_4)$. Deci, dacă $k^2 \neq 1, 0, 4, 1/4$, avem formulele

$$(A_1 A_3) = (A_1 A_4) = (A_2 A_3) = (A_2 A_4) = 0.$$

Dacă considerăm identitățile $(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_3, A_4)$, rezultă că a, b în formulele (39′) trebue să fie nule, deci A_1, A_2, A_3, A_4 formează un grup abelian. Aceeași proprietate are loc și pentru $k^2 = 1$. In adevăr, în acest caz, putem presupune $k = 1$ și avem, în baza formulelor (40)

$$(A_1 A_3) = cX, \ (A_1 A_4) = dX, \ (A_2 A_3) = -dX, \ (A_2 A_4) = cX$$

Considerând însă identitatea formată cu A_1, A_2, A_3 și A_1, A_2, A_4, avem

$$-aA_4 + dA_2 - cA_1 = 0, \ -bA_2 + dA_4 + cA_3 = 0$$

deci $a = b = c = d = 0$ și grupul este abelian. Avem deci teorema următoare:

Spațiile V_4 ce admit un grup transitiv G_5 cu transformarea grupului de stabilitate (39′), *cu* $k \neq 0, \pm 2, \pm 1/2$, *sunt spații euclidiene.*

4. Dacă $k = 0$, avem formulele de structură

$$(A_1 X) = A_2, (A_2 X) = -A_1,$$
$$(A_3 X = \alpha X, \ (A_4 X) = \beta X.$$

Făcând identitățile $(A_1 A_2 X)$, (A_3, A_4, X) rezultă că avem

$$(A_1 A_2) = pA_3 + qA_4 + rX \qquad (p\alpha + q\beta = 0)$$
$$(A_3 A_4) = mA_3 + nA_4 + sX \qquad (m\alpha + n\beta = 0).$$

De asemenea, avem în locul formulelor (40)

$$\begin{aligned} &[(A_1 A_3) X] - \alpha A_2 - (A_2 A_3) = 0 \\ &[(A_1 A_4) X] - \beta A_2 - (A_2 A_4) = 0 \\ &[(A_2 A_3) X] + \alpha A_1 + (A_1 A_3) = 0 \\ &[(A_2 A_4) X] + \beta A_1 + (A_1 A_4) = 0. \end{aligned} \qquad (41')$$

Aplicând operatorul X primei formule și ținând seama de a treia, avem

$$[(A_1 A_3) X^2] + 2\alpha A_1 + (A_1 A_3) = 0.$$

Rezultă că avem

$$\alpha = 0, \ (A_1 A_3) = \lambda A_1 + \mu A_2, \ (A_2 A_3) = \lambda A_2 - \mu A_1.$$

In mod analog, se găsește că $\beta = 0$ și că

$$(A_1 A_4) = \rho A_1 + \sigma A_2, \ (A_2 A_4) = \varphi A_2 - \sigma A_1.$$

Pe de altă parte, dacă adăugăm lui A_3 și A_4 termeni în X, putem să anulăm pe μ și σ.

Avem deci formulele de structură

$$(A_1 X) = A_2,\ (A_2 X) = -A_1,\ (A_3 X) = (A_4 X) = 0$$

$$(A_1 A_2) = p A_3 + q A_4 + r X$$

$$(A_3 A_4) = m A_3 + n A_4 + s X.$$

$$(A_1 A_3) = \lambda A_1,\ (A_2 A_3) = \lambda A_2,\ (A_1 A_4) = \rho A_1,\ (A_2 A_4) = \rho A_2$$

şi toate identităţile formate cu A_i, A_j şi X sunt verificate.

Să considerăm deci identităţile $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_2 A_3 A_4)$ $(A_1 A_2 A_4)$, $(A_1 A_3 A_4)$. Obţinem

$$q(A_3 A_4) + 2\lambda(A_1 A_2) = 0,\ p(A_3 A_4) - 2\rho(A_1 A_2) = 0,$$

$$m(A_1 A_3) + n(A_1 A_4) + s A_2 = 0,\ m(A_2 A_3) + n(A_2 A_4) - s A_1 = 0. \qquad (41'')$$

Dacă m şi n nu sunt amândouă nule, putem, printr'o schimbare liniară a lui A_3, A_4 să avem

$$m = 1,\ n = 0,\ s = 0$$

şi formulele (41'') ne dau

$$(A_1 A_3) = 0,\ (A_2 A_3) = 0;\ q = 0,\ p(1 - 2\rho) = 0,\ r = 0.$$

Rezultă deci că avem sau $p = 0$, sau $p \neq 0$ şi $\rho = 1/2$. In primul caz, avem structura

$$(A_1 X) = A_2,\ (A_2 X) = -A_1,\ (A_3 A_4) = A_3$$

$$(A_1 A_2) = (A_1 A_3) = (A_2 A_3) = (A_3 X) = (A_4 X) = 0 \qquad (42)$$

$$(A_1 A_4) = \rho A_1,\ (A_2 A_4) = \rho A_2$$

Operatorii A_1, A_2, A_3, A_4 determină un grup cu patru parametri, deci spaţiul admite acest grup ca grup simplu transitiv de mişcări. Formele cu diferenţiale totale lăsate invariante de acest grup au structura

$$\Delta s^1 = \rho[ds^1 ds^4],\ \Delta s^2 = \rho[ds^2 ds^4],\ \Delta s^3 = [ds^3 ds^4],\ \Delta s^4 = 0$$

şi putem satisface, punând

$$ds^4 = dy^4,\ ds^3 = e^{y^4} dy^3,\ ds^1 = e^{\rho y^4} dy^1,\ ds^2 = e^{\rho y^4} dy^2$$

Spaţiul V_4 are deci metrica

$$e^{2\rho y^4}[(dy^1)^2 + (dy^2)^2] + e^{2y^4}(dy^3)^2 + (dy^4)^2. \qquad (42')$$

Pentru $\rho = 1$, spaţiul este cu curbură constantă negativă şi, prin urmare, grupul (42) nu este grupul complet de mişcări al spaţiului.

Pentru $\rho = 0$, spaţiul V_4 este produsul direct al unui spaţiu euclidian $E(y^1, y^2)$ şi al unui spaţiu $V_2(y^3, y^4)$ cu curbură constantă negativă, deci nici în acest caz grupul (42) nu este grupul complet de mişcări al spaţiului.

Să presupunem că $\rho \neq 0, 1$, şi să calculăm forma pătratică a lui Ricci. Pentru aceasta, să observăm că coeficienţii de rotaţie a lui Ricci referitori la congruenţele definite de ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 sunt nuli, afară de

$$\gamma^1_{41} = -\rho,\ \gamma^2_{42} = -\rho,\ \gamma^3_{43} = -1.$$

Calculând γ^a_{bcd}, avem

$$\gamma^1_{212} = -\rho^2,\ \gamma^1_{313} = -\rho,\ \gamma^1_{414} = -\rho^2$$

$$\gamma^2_{323} = -\rho,\ \gamma^2_{424} = -\rho^2,\ \gamma^3_{434} = -1.$$

și cei cu trei sau patru indici distincți sunt nuli. Avem deci pentru tensorul lui Ricci, formulele

$$\gamma_{11} = -2\rho^2 - \rho,\ \gamma_{22} = -2\rho^2 - \rho,\ \gamma_{33} = -2\rho - 1,\ \gamma_{44} = -2\rho^2 - 1$$

Se vede că pentru ρ diferit de zero și 1, avem

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} \neq \gamma_{44},\ \gamma_{33} \neq \gamma_{44}$$

deci spațiul este reductibil în congruențe.

Avem de asemenea

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33}$$

numai dacă

$$2\rho^2 = \rho + 1 \tag{42''}$$

Să presupunem că ρ nu satisface la această ecuație. Atunci grupul de transformări de congruențe al spațiului lasă invariante formele ds^3, ds^4, iar ds^1, ds^2 suferă o transformare ortogonală. Grupul spațiului nu poate conține decât cel mult 5 parametri. Dacă ρ satisface ecuației (42''), ds^4 este un invariant și ds^1, ds^2, ds^3 suferă o transformare ortogonală. Deoarece însă tensorul de curbură γ^h_{klr} introduce legături între coeficienții transformării ortogonale, afară de cazul când avem $\gamma^1_{212} = \gamma^1_{313} = \gamma^2_{323}$, ceea ce nu are loc în cazul nostru, rezultă că coeficienții transformării ortogonale sunt legați cel puțin de o relație. Insă o transformare ortogonală în trei variabile, nu are decât subgrupuri cu un parametru, deci transformarea formelor ds^1, ds^2, ds^3 poate avea cel mult un parametru, deci grupul spațiului este cu 5 parametri. Avem deci teorema:

Grupul G_5 dat de formulele (42) este grupul complet de mișcări al spațiului V_4, dacă $\rho \neq 0$ și $\neq 1$.

Dacă $p \neq 0$ și $\rho = 1/2$, putem presupune $p = 1$ și avem structura

$$\begin{gathered}(A_1 X) = A_2,\quad (A_2 X) = -A_1,\quad (A_3 A_4) = (A_1 A_2) = A_3 \\ (A_1 A_3) = (A_2 A_3) = (A_3 X) = (A_4 X) = 0,\ (A_1 A_4) = {}^1/_2 A_1,\ (A_2 A_4) = {}^1/_2 A_2\end{gathered} \tag{43}$$

Și în acest caz, A_1, A_2, A_3, A_4 constitue un grup cu patru parametri, deci spațiul admite un grup simplu transitiv de mișcări. Formele ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 lăsate invariante de acest grup au structura

$$\Delta s^1 = \frac{1}{2}[ds^1\, ds^4],\quad \Delta s^2 = \frac{1}{2}[ds^2\, ds^4]$$

$$\Delta s^3 = [ds^1\, ds^2] + [ds^3\, ds^4],\quad \Delta s^4 = 0$$

și putem lua

$$ds^4 = 2\,dv,\ ds^1 = e^v\,dx,\ ds^2 = e^v\,dy,\ ds^3 = e^{2v}(du - x\,dy).$$

Spaţiul V_4 are deci metrica

$$ds^2 = e^{2\nu}(dx^2 + dy^2) + e^{4\nu}(du - x\,dy)^2 + 4\,d\nu^2 \tag{43'}$$

şi rămâne de văzut dacă grupul (43) este grupul complet de mişcări ale spaţiului.

Dacă $m = n = 0$ şi $s = 0$, deci A_3, A_4 sunt permutabile şi avem de asemenea două cazuri de considerat.

In primul caz, A_1, A_2 sunt de asemenea permutabile şi avem structura

$$\begin{gathered}(A_1 X) = A_2,\ (A_2 X) = -A_1,\ (A_3 A_4) = (A_1 A_2) = (A_3 X) = (A_2 X) = 0 \\ (A_1 A_3) = \lambda A_1,\ (A_2 A_3) = \lambda A_2,\ (A_1 A_4) = \rho A_1,\ (A_2 A_4) = \rho A_2.\end{gathered} \tag{44}$$

Lăsând la o parte cazul $\lambda = \rho = 0$, când V_4 este euclidian, putem să avem $\rho = 0$, $\lambda = 1$. Spaţiul are deci şi în acest caz un grup simplu transitiv A_1, A_2, A_3, A_4 şi formele invariante faţă de acest grup au structura

$$\Delta s^1 = [ds' ds^3)],\quad \Delta s^2 = [ds^2 ds^3],\quad \Delta s^3 = \Delta s^4 = 0$$

deci putem lua

$$ds^1 = e^u\,dx,\ ds^2 = e^u\,dy,\ ds^3 = du,\ ds^4 = d\nu$$

şi metrica spaţiului este dată de formula

$$ds^2 = e^{2u}(dx^2 + dy^2) + du^2 + d\nu^2 \tag{44'}$$

Spaţiul V_4 este deci produsul direct al unui spaţiu cu curbură constantă negativă cu trei dimensiuni (x, y, u) şi al dreptei euclidiene ν. Grupul complet al spaţiului este deci cu 7 parametri.

Dacă A_1, A_2 nu sunt permutabile, atunci avem $\rho = \lambda = 0$, deci structura

$$\begin{gathered}(A_1 X) = A_2,\ (A_2 X) = -A_1,\ (A_3 A_4) = (A_3 X) = (A_4 X) = 0 \\ (A_1 A_2) = pA_3 + qA_4 + rX,\ (A_1 A_3) = (A_1 A_4) = (A_2 A_3) = (A_2 A_4) = 0\end{gathered} \tag{45}$$

Dacă p, q nu sunt amândouă nule, putem face $p = 1$ şi $q = r = 0$. In acest caz, formele ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 invariante prin grupul simplu transitiv A_1, A_2, A_3, A_4 satisfac ecuaţiile de structură

$$\Delta s^1 = \Delta s^2 = \Delta s^4 = 0,\quad \Delta s^3 = [ds^1 ds^2],$$

astfel că metrica spaţiului V_4 este dată de formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (du - x dy)^2 + d\nu^2 \tag{45'}$$

Spaţiul V_4 este deci produsul direct al unui spaţiu cu trei dimensiuni $V_3(x, y, u)$ şi al dreptei euclidiene ν. Spaţiul V_3 nu este cu curbură constantă. In adevăr, coeficienţii de rotaţie ai congruenţelor ortogonale definite de formele $ds^1 = dx$, $ds^2 = dy$, $ds^3 = du - x dy$ sunt toţi nuli, afară de

$$\gamma^1_{23} = \gamma^3_{21} = \gamma^3_{12} = \frac{1}{2}\cdot$$

Calculând coeficienţii cu patru indici γ^h_{klr} ai lui Ricci, se constată că

$$\gamma^1_{212} = 0,\ \gamma^1_{313} = \frac{1}{4}$$

deci spaţiul $V_3(x, y, u)$ nu este cu curbură constantă şi prin urmare el are un grup cu patru parametri.

Rezultă deci că grupul (45) cu $p = 1$, $q = r = 0$ constitue grupul complet de mişcări al spaţiului (45′).

In cazul când în structura (45) avem $p = q = 0$ şi $r \neq 0$, parantezele $(A_i A_j)$ se exprimă numai cu ajutorul operatorului X, deci spaţiul V_4 este simetric. Este însă un spaţiu simetric reductibil a cărui metrică este de forma

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \qquad (45'')$$

unde $d\sigma^2$ este o metrică cu curbură constantă în variabilele x^1, x^2. Grupul complet al spaţiului este deci cu şase parametri.

Avem deci teorema:

Grupurile transitive G_5, în care grupul de stabilitate este o rotaţie în planul (x^1, x^2), au una din structurile (42), (43), (44), (45).

In ce priveşte spaţiile V_4 corespunzătoare, ele au metricele date de formulele (42′), (43′), (44′), (45′), (45″).

5. Rămâne de considerat acum cazul în care $k^2 = 4$ sau $k^2 = 1/4$. Unul din cazuri se reduce la celălalt prin schimbarea variabilelor x^1, x^2 cu x^3, x^4 şi putem totdeauna presupune $k = 2$. In acest caz, avem formulele

$$(A_1 X) = A_2, \quad (A_2 X) = -A_1, \quad (A_3 X) = 2A_4, \quad (A_4 X) = -2A_3$$

şi formula (39′) împreună cu (40′) şi (40″) ne spun că avem

$$(A_1, A_3) = (A_2 A_4) = m A_1 + n A_2$$

$$(A_1 A_4) = (A_2 A_3) = -n A_1 + m A_2$$

Să formăm acum identităţile (A_1, A_2, A_3), (A_1, A_2, A_4), (A_1, A_3, A_4), (A_2, A_3, A_4). Ele ne dau

$$a = b = n = 0$$

deci avem structura, presupunând că $m = 1$

$$(A_1 X) = A_2, (A_2 X) = -A_1, (A_3 X) = 2A_4, (A_4 X) = -2A_3$$
$$(A_1 A_2) = (A_3 A_4) = 0, \ (A_1 A_3) = (A_2 A_4) = A_1 \qquad 46)$$
$$(A_1 A_4) = (A_2 A_3) = A_2$$

Se vede că A_1, A_2, A_3, A_4 constitue un grup simplu transitiv al spaţiului. Formele invariante ale acestui grup au structura

$$\begin{aligned} \Delta s^1 &= [ds^1 ds^3] + [ds^2 ds^4], \ \Delta s^3 = 0 \\ \Delta s^2 &= [ds^1 ds^4] + [ds^2 ds^3], \ \Delta s^4 = 0 \end{aligned} \qquad (47)$$

şi se poate satisface, punând

$$ds^1 = e^{u+v}\, dx + e^{u-v}\, dy, \ ds^3 = du$$
$$ds^2 = e^{u+v}\, dx - e^{u-v}\, dy, \ ds^4 = dv,$$

iar metrica spaţiului este dată de formula

$$ds^2 = e^{2u+2v}\,dx^2 + e^{2u-2v}\,dy^2 + du^2 + dv^2.$$

Făcând transformarea ortogonală de coordonate

$$u + v = \sqrt{2}\alpha, \quad u - v = \sqrt{2}\beta,$$

putem scrie

$$ds^2 = e^{2\sqrt{2}\alpha}\,dx^2 + d\alpha^2 + e^{2\sqrt{2}\beta}\,dy^2 + d\beta^2. \tag{48}$$

Spaţiul V_4 este deci produsul direct a două spaţii V_2 cu două dimensiuni x, α şi y, β. Aceste spaţii V_2 fiind însă cu curbură constantă, spaţiul V_4 are un grup cu şase parametri, deci G_5 având structura (46) nu este grupul complet de mişcări al spaţiului.

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Егоров показал, что риманово пространство V_n $(n \geqslant 3)$ с непостоянной кривизной имеет самое большее $n\ (n-1)/2+1$ параметров, если оно не является пространством Эйнштейна, и что этот максимум достигнут. Егоров дает, если пространство V_n является пространством Эйнштейна, как максимум число $n\ (n-1)/2+2$ при $n>3$. Автор настоящей статьи показал в другой статье, опубликованной в этом же журнале, что число может быть уменьшено на $n-4$ единицы. При $n>4$ вытекает следовательно следующая теорема.

Пространство V_n, не имеющее постоянной кривизны, может иметь группу движений, имеющую самое большее $n\ (n-1)/2+1$ параметров, и этот максимум достигнут.

В той же статье автор рассматривал класс пространств V_4, группа устойчивости которого есть G_4. Так как пространства суть симметрические пространства Картана, они имеют G_8 как транзитивную группу движения, следовательно максимум Егорова $n\ (n-1)/2+2$ достигается лишь при $n=4$.

В первой главе настоящей статьи определяются все пространства V_4, обладающие как группой устойчивости G_4. В первую очередь получается вновь результат, полученный в 1908 г. С. Медичи, что G_4 всегда может быть определено линейными операторами.

$$X = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad Y = x^3\frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4\frac{\partial f}{\partial x^3}$$

$$U = x^1\frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

$$V = x^1\frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

13

Так как эти преобразования обладают четырьмя инвариантами

$$u^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$$

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

$$\lambda = x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + x^3\,dx^3 + x^4\,dx^4$$

$$\omega = x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + x^3\,dx^4 - x^4\,dx^3$$

вытекает, что метрика

$$ds^2 = \alpha(u^2)\,d\sigma^2 + \beta(u^2)\,\lambda^2 + \gamma(u^2)\,\lambda\,\omega + \delta(u^2)\,\omega^2 \qquad (7)$$

инвариантна при преобразованиях группы (13) и обратное также справедливо. Значит, пространства V_4, имея как метрику (7), имеют (13) как группу устойчивости и наоборот.

Во второй главе показывается, что единственными пространствами V_4, имеющими G_8 как группу движения, суть симметрические пространства, приведенные в предыдущей статье.

Отсюда вытекает, что выше сформулированная теорема действительна также при $n = 4$, за исключением этих симметричных пространств. С другой стороны, теорема действительна при $n = 3$, как это вытекает из классификации Бианки для пространств V_3 [I, стр. 547]. Поэтому, если переходить от пространства V_n $(n > 1)$ с постоянной кривизной, группа которой, как известно, имеет $n(n+1)/2$ параметров к пространству V_n с непостоянной кривизной число параметров уменьшается на $n-1$ единиц, за исключением случая симметричных пространств V_4, когда уменьшение составляет всего $n - 2$ $(=2)$ единиц, и случая пространств V_2, когда уменьшение составляет n $(=2)$ единиц. Это составляет значительное уточнение теоремы, доказанной Фубини в 1903 г., что уменьшение состоит по меньшей мере из 2 единиц.

В третьей главе автор получает результаты Медичи, что группы устойчивости с тремя параметрами пространства V_4, имеющего по меньшей мере одно вращение, могут быть определены операторами

$$X = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad U = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad V = x^2\frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial f}{\partial x^2}, \qquad (37)$$

следовательно оно группа вращений в некоторой гиперплоскости. Показывается также, что единственные пространства V_4 с группой устойчивости (37), имеющие как полные группы движения транзитивное G_7, суть прямые произведения пространства V_3 с постоянной кривизной и евклидовой прямой, значит они имеют как метрику

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^4)^2,$$

где $d\sigma^2$ есть метрика пространства постоянной кривизны в переменных x^1, x^2, x^3, x^4.

Пространства с группой устойчивости (37′) и с транзитивной группой движения G_7 суть евклидовые пространства.

Что касается групп устойчивости с двумя параметрами, то они суть абелевы и могут быть определены операторами

$$X = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad Y = x^3\frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4\frac{\partial f}{\partial x^3}$$

и единственные пространства V_4, имеющие транзитивное G_6 как группа движения, суть прямые произведения двух пространств постоянной кривизны в двух переменных. Другими словами метрика пространства V_4 записывается

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\pi^2,$$

где $d\sigma^2$ есть метрика пространства постоянной кривизны в переменных x^1, x^2 и $d\pi^2$, метрика пространства постоянной кривизны в переменных x^3, x^4.

Если группа устойчивости является однопараметрической, то она может быть определена оператором

$$X = x^1 \frac{\partial f}{dx^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + k\,(k^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3}).$$

Показывается, что когда $k \neq 0, \neq 2, \pm 1/2$, соответствующее пространство V_4 может иметь транзитивное G_5, для которого X был бы оператором группы устойчивости только в случае, когда V_4 есть евклидово пространство.

Показывается, что когда $k = 0$ имеются четыре структуры (42), (43), (44), (45) транзитивных групп G_5, содержащих вращение X, и даются метрики пространств V_4, имеющие G_5 как группы движения.

Так, при структуре (42) пространство V_4 имеет как метрику (42′)

$$ds^2 = e^{2\lambda y^4}[(dy^1)^2 + (dy^2)^2] + e^{y^4}(dy^3)^2 + (dy^4)^2$$

Показывается, что для P «постоянной» отличной от 0 и единицы, G_5 есть полная группа движения пространства.

В случае $k = 2$ структуру (46) группы G_5 можно записать

$$\begin{aligned} &(A_1X) = A_2,\ (A_2X) = -A_1,\\ &(A_3X) = 2A_4,\ (A_4X) = -2A_3\\ &(A_1A_2) = 0,\ (A_1A_3) = (A_2A_4) = A_1\\ &(A_1A_4) = (A_2A_3) = A_2,\ (A_3A_4) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

и метрика пространства может быть записана

$$ds^2 = e^{2\sqrt{2}u}(dx)^2 + (du)^2 + e^{2\sqrt{2}v}dz^2 + dv^2$$

Следовательно, пространство есть прямое произведение двух двумерных пространств $(x\,u)$ и $(y\,v)$ и, так как эти пространства имеют постоянную кривизну, группа (46) не есть полная группа движения пространства.

SUR LES GROUPES DE MOUVEMENT D'UN ESPACE DE RIEMANN À QUATRE DIMENSIONS

(RÉSUMÉ)

Récemment, Egoroff a montré qu'un espace $V_n\,(n \geqq 3)$ de Riemann qui n'est pas à courbure constante, possède au plus $n(n-1)/2 + 1$ paramètres, s'il n'est pas un espace d'Einstein et ce maximum est atteint. Si l'espace V_n

est un espace d'Einstein, Egoroff donne comme maximum, le nombre $n(n-1)/2+2$ pour $n>3$. L'Auteur a montré dans un autre Mémoire, publié dans cette même revue, que ce nombre peut être diminué par $n-4$ unités. Il en résulte donc, pour $n>4$ le théorème:

Un espace V_n qui n'est pas à courbure constante, peut avoir un groupe de mouvement ayant au plus $n(n-1)/2+1$ paramètres et ce maximum est atteint.

Dans le même Mémoire, on a considéré une classe d'espaces V_4 dont le groupe de stabilité est un G_4. Comme ces espaces sont des espaces symétriques de Cartan, ils possèdent un G_8 comme groupe transitif de mouvement, donc le maximum d'Egoroff $n(n-1)/2+2$ est atteint seulement pour $n=4$.

Dans le premier chapitre du présent Mémoire, on détermine tous les espaces V_4 ayant comme groupe de stabilité un G_4. On retrouve en premier lieu un résultat donné par S. Medici en 1908 que le G_4 peut toujours être défini par les opérateurs linéaires

$$\begin{aligned} X &= x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}\,,\; Y = x^3\frac{\partial f}{\partial x^4}-x^4\frac{\partial f}{\partial x^3}\\ U &= x^1\frac{\partial f}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^4}-x^4\frac{\partial f}{\partial x^2} \qquad (13)\\ V &= x^1\frac{\partial f}{\partial x^4}-x^4\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^3\frac{\partial f}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Comme ces transformations possèdent les quatre invariants

$$\begin{aligned} u^2 &= (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2\\ d\sigma^2 &= (dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2\\ \lambda &= x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3+x^4dx^4\\ \omega &= x^1dx^2-x^2dx^1+x^3dx^4-x^4dx^3 \end{aligned}$$

il en résulte que la métrique

$$ds^2=\alpha(u^2)\,d\sigma^2+\beta(u^2)\lambda^2+\gamma(u^2)\lambda\omega+\delta(u^2)\omega^2 \qquad (7)$$

est invariante aux transformations du groupe (13) et la réciproque est aussi vraie. Donc, les espaces V_4 ayant comme métrique (7), possèdent (13) comme groupe de stabilité et inversement.

Dans le second chapitre, on montre que les seuls espaces V_4 qui possèdent un G_8 comme groupe de mouvements, sont les espaces symétriques donnés dans le Mémoire précédent.

Il en résulte que le théorème énoncé plus haut est valable aussi pour $n=4$, à l'exception de ces espaces symétriques. D'autre part, le théorème est valable pour $n=3$, comme cela résulte de la classification de Bianchi pour les espaces V_3 [1, p. 547]. En passant donc d'un espace V_n $(n>1)$ à courbure constante, dont le groupe possède, comme on le sait, $n(n+1)/2$ paramètres à un espace V_n à courbure non constante, le nombre de paramètres diminue de $n-1$ unités, sauf le cas des espaces V_4 symétriques, quand la diminution est seulement de $n-2(=2)$ unités et le cas des espaces V_2 quand la diminution est de $n(=2)$ unités. Cela constitue une précision importante de la proposition démontrée en 1903 par Fubini, que la diminution est au moins de 2 unités.

Dans le troisième chapitre, l'Auteur retrouve le résultat de Medici que les groupes de stabilité à trois paramètres d'un V_4 qui possèdent au moins une rotation peuvent être définis par les opérateurs

$$X = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad U = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad V = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{37}$$

donc il est le groupe de rotations dans un certain hyperplan. Il montre aussi que les seuls espaces V_4 à groupe de stabilité (37), qui possèdent comme groupe complet de mouvement un G_7 transitif, sont les produits directs d'un espace V_3 à courbure constante et d'une droite euclidienne, donc ils ont comme métrique

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^4)^2$$

où $d\sigma^2$ est une métrique à courbure constante dans les variables x^1, x^2, x^3. Les espaces à groupe de stabilité (37′) et à groupe transitif G_7 de mouvement sont des espaces euclidiens.

En ce qui concerne les groupes de stabilité à deux paramètres, ils sont abéliens et peuvent être définis par les opérateurs

$$X = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad Y = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

et les seuls espaces V_4 qui possèdent un G_6 transitif, comme groupe de mouvement, sont le produit direct de deux espaces à courbure constante en deux variables. Autrement dit, la métrique de l'espace V_4 s'écrit

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\pi^2$$

où $d\sigma^2$ est une métrique à courbure constante dans les variables x^1, x^2 et $d\pi^2$, une métrique à courbure constante dans les variables x^3, x^4.

Si le groupe de stabilité est à un seul paramètre, il peut être défini par l'opérateur

$$X = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + k\left(x^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3} \right).$$

On montre que si $k \neq 0, \pm 2, \pm 1/2$ l'espace V_4 correspondant ne peut pas avoir un G_5 transitif dont X soit l'opérateur du groupe de stabilité, que si V_4 est euclidien.

Si $k = 0$, on montre qu'il y a quatre structures (42), (43), (44), (45), de groupes G_5 transitifs qui contiennent la rotation X et l'on donne les métriques des espaces V_4 qui possèdent les G_5 comme groupes de mouvement.

Ainsi pour la structure (42) l'espace V_4 a comme métrique (42′)

$$ds^2 = e^{2\rho y^4} [(dy^1)^2 + (dy^2)^2] + e^{2y^4} (dy^3)^2 + (dy^4)^2$$

On montre que pour ρ une constante différente de zéro et l'unité, le G_5 est le groupe complet de mouvement de l'espace.

Dans le cas $k = 2$, la structure (46) du groupe G_5 peut s'écrire

$$\begin{aligned} &(A_1 X) = A_2, \ (A_2 X) = -A_1, \\ &(A_3 X) = 2A_4, \ (A_4 X) = -2A_3 \\ &(A_1 A_2) = 0, \ (A_1 A_3) = (A_2 A_4) = A_1 \\ &(A_1 A_4) = (A_2 A_3) = A_2, \ (A_3 A_4) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

et la métrique de l'espace peut s'écrire

$$ds^2 = e^{2\sqrt{2}u}\ (dx)^2 + (du)^2 + e^{2\sqrt{2}v}\ dy^2 + dv^2.$$

L'espace est donc le produit direct de deux espaces à deux dimensions $(x\ u)$ et $(y\ v)$ et comme ces espaces sont à courbure constante le groupe (46) n'est pas le groupe complet de mouvement de l'espace.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Bologna, 1928.
2. E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 1926, v. 54, p. 214.
3. I. P. Egorov, Docladî Academii Nauc, 1949, v. 66, p. 793.
4. G. Vrănceanu, Studii şi Cercetări Matematice, 1951, v. II, p. 57.
5. — *Lecţii de Geometrie diferenţială*, v. I şi v. II, Bucureşti 1951, 1952.
6. — Bul. Soc. Ştiinţ., 1932, Cluj, t. 6, p. 429.
7. H. Weyl, *Classical groups.* Princeton, 1939.
8. S. Medici, Annali della Scuola normale superiore di Pisa, 1908, v. X, p. 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

CERCETĂRI ASUPRA SISTEMELOR DE ECUAŢII LINEARE CU DERIVATE PARŢIALE DE TIP LAPLACE

DE

I. P. ELIANU

Clasa de sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale care face obiectul studiului nostru, reprezintă — datorită algoritmului matricilor pe care-l utilizăm — o generalizare directă a ecuaţiilor cu derivate parţiale lineare, de ordinul al doilea, cu două variabile independente şi de tip hiperbolic. Aceste sisteme au mai fost considerate de diverşi cercetători pe care îi vom cita în ordine cronologică.

Alberto Tonelli [10] după ce a pus în evidenţă anumiţi invarianţi funcţionali, a schiţat felul cum se poate extinde la aceste sisteme metoda cascadelor a lui Laplace. Calculele sale sunt însă laborioase şi nu permit o prezentare simplă şi elegantă a metodei lui Laplace, aşa cum a făcut-o Darboux pentru ecuaţiile de ordinul al doilea.

Germay [3] a construit apoi pentru aceste sisteme nişte funcţii analoage cu funcţia lui Riemann, dela ecuaţiile de ordinul al doilea hiperbolice, iar N. Ciorănescu [1] a rezolvat problema lui Cauchy cu metoda lui Riemann, după ce rezolvase aceeaşi problemă cu metoda aproximaţiilor succesive, a lui Picard.

Spre deosebire de cercetătorii menţionaţi, care pentru simplicitatea scrierii au considerat cazul unui sistem de două ecuaţii cu două funcţii necunoscute, enunţând numai rezultatele pentru un sistem oarecare, D. V. Ionescu [5] a studiat pentru sistemele de n ecuaţii cu n funcţii necunoscute, o anumită problemă la limită, iar Martin [6] a demonstrat tot pentru cazul general, proprietatea de schimb a funcţiilor lui Riemann introduse de Germay şi totodată a dat soluţia problemelor lui Darboux-Picard şi a lui Cauchy, făcând şi o extensiune a metodei lui Riemann, care ca idee nu diferă de cea dată de N. Ciorănescu. Demonstraţiile lui Martin în cazul unui sistem oarecare se bazează însă pe rezultatele lui Germay şi N. Ciorănescu, care au fost numai enunţate în cazul general.

In prezenta lucrare, noi studiem din punct de vedere analitic, sistemele menţionate pe care le numim sisteme de tip Laplace. Instrumentul nou pe care îl introducem este calculul matricial şi el a mai fost utilizat într'un mod ingenios în teoria sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale care intervin mai ales în fizica matematică, de Gr. Moisil [7], [8] şi de N. Teodorescu [9].

Acest instrument de cercetare se dovedeşte a fi cel mai indicat pentru a pune în valoare sugestiile pe care ni le procură studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea hiperbolice, studiu în care contribuţiile analitice sau geometrice sunt datorite câtorva mari matematicieni străini, însă alături de aceste contribuţii trebue să considerăm ca pe una dintre cele mai importante, prin multiplicitatea aspectelor sale geometrice, şi prin varietatea rezultatelor obţinute, pe aceea a marelui geometru român, G. Ţ i ţ e i c a [11], [12]. Menţionăm de asemenea cercetările făcute în această direcţie, în ultimul deceniu, de G. V r ă n c e a n u [14], [15].

Limbajul matricilor ne-a permis să punem imediat în evidenţă doi invarianţi matriciali complet analogi cu invarianţii lui Darboux, relativi la o singură ecuaţie, şi să extindem apoi metoda cascadelor a lui Laplace, împreună cu şirul lui Laplace asociat.

Pe lângă algebra matricială, am fost obligaţi să introducem chiar dela început şi calculul infinitesimal matricial sub forma derivatei sau integralei în sensul lui Volterra şi a seriei matrizante. Aceste noţiuni şi-au găsit apoi utilizarea naturală şi în problema integrării cu diverse condiţii la limită (metoda lui Riemann).

Din seria de probleme pe care le pune şirul lui Laplace asociat sistemului, dintre care am examinat mai întâi câteva cazuri particulare interesante, am studiat şirurile lui Laplace terminate într'un caz destul de general, pe care l-am numit cazul ordinar.

Rezultatele obţinute în această problemă de analiză clasică şi care au pus în joc algebra abstractă modernă şi operaţiile infinitesimale lineare, pot fi continuate pe diverse planuri, dintre care vom menţiona următoarele: studiul sistemelor cu derivate parţiale, pe care elevii lui D e D o n d e r le numesc *sisteme diagonale*, caracterizate prin aceea că în fiecare ecuaţie a sistemului, derivatele de ordinul cel mai înalt operează asupra aceleiaşi funcţii necunoscute; fundarea unui capitol de geometrie diferenţială analog cu teoria reţelelor; extensiunea metodelor utilizate la clase de ecuaţii sau la sisteme de ecuaţii funcţionale mai generale.

I. EXTENSIUNEA METODEI LUI LAPLACE

1. Forma matriceală a sistemului. Sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale, care face obiectul studiului nostru, este linear omogen, de ordinul al doilea şi are forma

$$L^\alpha(z) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x\,\partial y} + a^\alpha_\beta \frac{\partial z^\beta}{\partial x} + b^\alpha_\beta \frac{\partial z^\beta}{\partial y} + c^\alpha_\beta z^\beta = 0, \ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

unde $z^1, \ldots, z^n$ sunt funcţiile necunoscute, iar x şi y, variabilele independente şi unde am adoptat în scriere convenţia de sumare a indicilor muţi din calculul tensorial. Vom presupune că într'un anumit domeniu D, coeficienţii a^α_β, b^α_β şi c^α_β sunt funcţii continue de variabilele x şi y.

Pentru ceea ce urmează, este mai comod să scriem sistemul (1) sub formă matricială. Introducând matricile funcţionale de ordinul n

$$Z = \left\| \begin{matrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{matrix} \right\|, \ A = \| a^\alpha_\beta \| \ , \ B = \| b^\alpha_\beta \| \ , \ C = \| c^\alpha_\beta \|,$$

sistemul (1) se scrie sub forma simplă și sugestivă,

$$L(Z) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + CZ = 0, \tag{2}$$

pe care o vom utiliza de acum înainte. Din cauza analogiei cu o singură ecuație, vom spune că sistemul (1) sau (2) este un sistem de tip Laplace.

2. Dacă ne propunem să scriem polinomul diferențial $L(Z)$ cu coeficienți matriciali, sub una din formele

$$L(Z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + M\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + N\right)Z - PZ$$

$$L(Z) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + N\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + M\right)Z - PZ$$

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ fiind matrici scalare operaționale de ordinul n, iar M, N, P fiind niște matrici funcționale pătrate de același ordin, pe care trebue să le determinăm, găsim că în ambele cazuri matricile M, N, P au valori unice și bine determinate, date respectiv de relațiile

$$M = B, \quad N = A, \quad N_x + MN - P = C$$

$$M = B, \quad N = A, \quad M_y + NM - P = C$$

unde M_x, M_y înseamnă în general derivatele parțiale ordinare ale matricii M, respectiv în raport cu x și y.

Introducând expresiile matriciale

$$H = A_x + BA - C, \quad K = B_y + AB - C, \tag{3}$$

urmează că sistemul (2) se poate scrie sub una din formele echivalente

$$\begin{aligned} L(Z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right)Z - HZ = 0 \\ L(Z) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right)Z - KZ = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

și că aceste forme de scriere sunt unice, observare care ne va fi utilă în simplificarea calculelor ulterioare.

3. Invarianți matriciali. Să presupunem că asupra sistemului (2) facem o transformare lineară $Z = \Lambda\overline{Z}$, în care matricia $\Lambda = \| \lambda_\beta^\alpha \|$ este o matrice funcțională pătrată oarecare, nesingulară în domeniul D — deci det. $\Lambda \neq 0$ — și care admite derivate parțiale prime și secunde continue în D în raport cu x și y. Sistemul (2) se va transforma în altul de aceeași formă

$$\overline{L}(\overline{Z}) = \frac{\partial^2 \overline{Z}}{\partial x\, \partial y} + \overline{A}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} + \overline{B}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y} + \overline{C}\overline{Z} = 0 \tag{5}$$

Pentru a obține sistemul transformat (5) sub forma cea mai convenabilă, vom observa că putem scrie

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+B\right)(\Lambda\overline{Z})=\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}+\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda\right)\overline{Z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+A\right)(\Lambda\overline{Z})=\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}+\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}A\Lambda\right)\overline{Z},$$

unde Λ^{-1} este inversa matricii Λ. Referindu-ne apoi pe rând la fiecare din formele (4) ale sistemului $L(Z)=0$, vom avea succesiv

$$L(\Lambda\overline{Z})=\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}+\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}A\Lambda\right)\overline{Z}-H\Lambda\overline{Z}=0$$

$$L(\Lambda\overline{Z})=\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}+\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}A\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda\right)\overline{Z}-K\Lambda\overline{Z}=0$$

astfel că, înmulțind la stânga cu Λ^{-1}, deducem

$$L(\Lambda\overline{Z})=\Lambda^{-1}L(\Lambda\overline{Z})=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}A\Lambda\right)\overline{Z}-\Lambda^{-1}H\Lambda\overline{Z}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}A\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda\right)\overline{Z}-\Lambda^{-1}K\Lambda\overline{Z}=0.$$

Am obținut astfel pe $\overline{L}(\overline{Z})$ scris sub una din formele (4), de unde rezultă imediat expresiile coeficienților $\overline{A}$, $\overline{B}$ și printr'un calcul simplu, expresia lui $\overline{C}$, anume

$$\overline{A}=\Lambda^{-1}\Lambda_y+\Lambda^{-1}\overline{A}\Lambda,\ \overline{B}=\Lambda^{-1}\Lambda_x+\Lambda^{-1}B\Lambda,\ \overline{C}=\Lambda^{-1}L(\Lambda) \qquad (6)$$

și totodată

$$\overline{H}=\Lambda^{-1}H\Lambda,\ \overline{K}=\Lambda^{-1}K\Lambda, \qquad (7)$$

unde $\overline{H}$, $\overline{K}$ sunt matricile construite cu coeficienții $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$, adică $\overline{H}=\overline{A}_x+\overline{B}\,\overline{A}-\overline{C}$, $\overline{K}=\overline{B}_y+\overline{A}\,\overline{B}-\overline{C}$.

Relațiile (7) arată că matricile H și $\overline{H}$, respectiv K și $\overline{K}$, care au elementele din corpul funcțiilor de două variabile, sunt asemenea în acest corp. Matricile H și K sunt deci niște *invarianți relativi* în raport cu relația de asemănare corespunzătoare transformărilor nesingulare de forma $Z=\Lambda\overline{Z}$.

Evident că invarianții matriceali H și K vor fi niște invarianți absoluți, dacă și numai dacă matricea de transformare Λ este permutabilă cu fiecare în parte, ceea ce se întâmplă, de exemplu, în cazurile banale, când H, respectiv K, sunt niște matrici scalare, când Λ și H, respectiv K, sunt matrici diagonale, sau, în fine, când Λ este o matrice scalară.

4. In virtutea teoriei matricilor asemenea, putem pune imediat în evidență pentru Λ oarecare — odată cu invarianții matriceali relativi H și K — un număr apreciabil de *invarianți absoluți* care sunt sau *invarianți funcționali*, sau *invarianți numerici* (invarianții fundamentali ai matricilor H și K). Dintre acești invarianți absoluți, vom menționa rădăcinile ecuațiilor caracteristice ale matricilor H și K, deci coeficienții acestor ecuații care sunt suma minorilor principali de același ordin din determinanții matricilor H și K (în particular, chiar acești determinanți — deci și rangurile lor — și urmele matricilor H și K); ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor ecuațiilor caracteristice menționate; numerele care indică ordinele matricilor parțiale ale lui Jordan din forma sa redusă și în fiecare caz, numărul acestor matrici parțiale.

Se pot pune ușor în evidență și câteva *proprietăți invariante* pentru Λ oarecare și care se citesc imediat pe relațiile următoare

$$\begin{aligned}
&\det. H,\ \det. K = 0 \rightarrow \det. \overline{H},\ \det. \overline{K} = 0 && \text{(singularitatea)}\\
&H = K \rightarrow \overline{H} = \overline{K} && \text{(egalitatea)}\\
&HK = KH \rightarrow \overline{H}\,\overline{K} = \overline{K}\,\overline{H} && \text{(permutabilitatea)}\\
&H = h,\ K = k \rightarrow \overline{H} = h,\ \overline{K} = k && (h,\ k \text{ scalari})\\
&H^2 = H,\ K^2 = H \rightarrow \overline{H}^2 = \overline{H},\ \overline{K}^2 = \overline{K} && \text{(idempotență)}\\
&H^m = 0,\ K^n = 0 \rightarrow \overline{H}^m = 0,\ \overline{K}^n = 0 && \text{(nilpotență)}\\
&H^m = 1,\ K^n = 1 \rightarrow \overline{H}^m = 1,\ \overline{K}^n = 1 && \text{(invarianța ordinelor)}
\end{aligned}$$

De asemenea, specializând matricea de transformare Λ, putem semnala și următoarele proprietăți invariante:

H, Λ (resp. K, Λ) triunghiulare $\rightarrow$ $\overline{H}$ (resp. $\overline{K}$) triunghiulară

H (resp. K) simetrică (antisimetrică) și Λ ortogonală $\rightarrow$

$\overline{H}$ (resp. $\overline{K}$) simetrică (antisimetrică)

$\overline{H}$ (resp. K) ortogonală și Λ simetrică (antisimetrică) $\rightarrow$ $\overline{H}$ (resp. $\overline{K}$) ortogonală

5. Dacă presupunem acum că facem o schimbare de variabile independente de forma

$$x = x(\overline{x}), \qquad y = y(\overline{y}), \tag{8}$$

sistemul (2) devine

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \overline{x}\,\partial \overline{y}} + \frac{dy}{d\overline{y}} A \frac{\partial Z}{\partial \overline{x}} + \frac{dx}{d\overline{x}} B \frac{\partial Z}{\partial \overline{y}} + \frac{dx}{d\overline{x}} \cdot \frac{dy}{d\overline{y}} CZ = 0 \tag{9}$$

pentru care invarianții matriciali au expresiile

$$\overline{H} = \frac{dx}{d\overline{x}} \cdot \frac{dy}{d\overline{y}} H,\ \overline{K} = \frac{dx}{d\overline{x}} \cdot \frac{dy}{d\overline{y}} K \tag{10}$$

și *ei sunt deci și pentru transformarea* (8) *niște invarianți relativi.*

Din formulele de transformare (10), rezultă de asemenea că pentru transformarea (8), matricile HK^{-1}, $K^{-1}H$, $H^{-1}K$, KH^{-1} sunt niște *invarianți absoluți.*

Nu este inutil să remarcăm, pe forma (9) a sistemului transformat, că proprietatea de permutabilitate a matricilor A și B este invariantă față de schimbarea de variabile (8).

In fine, se vede imediat că schimbarea de variabile $x = \overline{y}$, $y = x$, permută cei doi invarianţi matriciali, între ei, adică $\overline{H} = K$ şi $\overline{K} = H$.

6. Forme reduse. Felul cum se transformă coeficienţii matriciali A, B, C într'o transformare nesingulară $Z = \Lambda\overline{Z}$, ne va permite, alegând în mod convenabil această transformare, să aducem sistemul cu derivate parţiale $L(Z) = 0$ la forme mai simple. Aceste forme simple, pe care le vom numi *forme reduse*, le vom obţine evident, impunând ca sistemul transformat

$$\overline{L}(\overline{Z}) = \frac{\partial^2 \overline{Z}}{\partial x \partial y} + \overline{A}\,\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} + \overline{B}\,\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y} + \overline{C}\,\overline{Z} = 0, \tag{11}$$

în care

$$\overline{A} = \Lambda^{-1}\Lambda_y + \Lambda^{-1}A\Lambda,\ \overline{B} = \Lambda^{-1}\Lambda_x + \Lambda^{-1}B\Lambda,\ \overline{C} = \Lambda^{-1}L(\Lambda) \tag{12}$$

să conţină termeni cât mai puţini.

De exemplu, pentru ca să avem $\overline{C} = 0$, va trebui ca $L(\Lambda) = 0$, fiindcă Λ este o matrice nesingulară. Aceasta înseamnă că vom avea în mod necesar

$$\frac{\partial^2 \lambda_\beta^\alpha}{\partial x \partial y} + a_\gamma^\alpha \frac{\partial \lambda_\beta^\gamma}{\partial x} + b_\gamma^\alpha \frac{\partial \lambda_\beta^\gamma}{\partial y} + c_\gamma^\alpha \lambda_\beta^\gamma = 0,\ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

adică elementele fiecărei coloane ale matricii Λ trebue să fie sisteme particulare de integrale linear independente ale sistemului $L(Z) = 0$. Dacă elementele fiecărei coloane ale unei matrice oarecare sunt integrale particulare ale sistemului $L(Z) = 0$, vom spune pe scurt că matricea menţionată este o *soluţie* sau o *matrice integrală* a sistemului. Cu această convenţie naturală, rezultă că vom avea $\overline{C} = 0$, numai atunci când matricea Λ este o soluţie particulară a sistemului $L(Z) = 0$, ceea ce înseamnă că *este necesar să cunoaştem în prealabil n sisteme particulare de integrale linear independente ale sistemului* $L(Z) = 0$.

Pentru a avea acum $\overline{A} = 0$, va trebui ca

$$\Lambda_y = -A\Lambda$$

sau, introducând derivata parţială stângă $\frac{d\Lambda}{dy}$ a lui Λ în sensul lui Volterra [13] [1])

$$\frac{d\Lambda}{dy} = -A,$$

ceea ce dă imediat

$$\Lambda = \overset{*}{\int}(-A)\,dy, \tag{13}$$

unde integrala în raport cu y, indicată cu simbolul $\overset{*}{\int}$, este o integrală stângă

[1]) p. 36 şi următoarele.

tot în sensul lui Volterra. In mod analog, putem determina pe Λ, astfel încât să avem $\overline{B} = 0$.

Să impunem acum ca doi din coeficienții matriciali ai sistemului transformat să fie nuli, de ex. $\overline{A} = 0$ și $\overline{C} = 0$, adică

$$\Lambda_y + A\Lambda = 0, \qquad L(\Lambda) = 0. \tag{14}$$

Condiția de integrabilitate a sistemului precedent se găsește imediat scriind că $\Lambda_{xy} = \Lambda_{yx}$, ceea ce conduce la relația

$$(A_x + BA - C)\Lambda = 0 \tag{15}$$

și cum am presupus că det. $\Lambda \neq 0$, *urmează că trebue să avem în mod necesar* $H = 0$. Dacă această condiție este satisfăcută, atunci Λ va fi dat de expresia 13). La fel se găsește că nu putem avea $\overline{B} = \overline{C} = 0$, *decât dacă invariantul* $K = 0$ și Λ se determină printr'o integrare parțială stângă în sensul lui Volterra.

Mai rămâne cazul cel mai interesant de examinat, acela când avem $\overline{A} = \overline{B} = 0$, ceea ce impune ca

$$\Lambda_x + B\Lambda = 0, \ \Lambda_y + A\Lambda = 0.$$

Condiția de integrabilitate a sistemului precedent se poate găsi calculând în două moduri diferite pe Λ_{xy} și ținând seamă de ecuațiile sistemului. Revine la același lucru, însă este mai util pentru cele ce urmează, să introducem derivate parțiale stângi în sensul lui Volterra și să scriem sistemul sub forma echivalentă

$$\frac{d\Lambda}{dx} = -B, \ \frac{d\Lambda}{dy} = -A,$$

care poate fi considerat ca un sistem cu diferențiale totale stângi, deoarece conține ambele derivate parțiale stângi ale lui Λ.

Condiția de integrabilitate a acestui sistem, cu notația lui Volterra, se scrie

$$\Delta'(-B, -A) = -A_x + B_y + AB - BA = 0,$$

de unde rezultă $H = K$, adică *este necesar și suficient ca cei doi invarianți matriciali să fie egali.*

Dacă această condiție este satisfăcută, diferențiala totală stângă $d\Lambda$, a lui Λ, va avea expresia

$$d\Lambda = (-B)\,dx\,(-A)\,dy.$$

Urmând metoda cunoscută de integrare a diferențialelor totale exacte în sensul lui Volterra [13][1]) se găsește că

$$\Lambda = \Lambda_0 \overset{*}{\int}\left[\Lambda_0^{-1}\left(-A - \frac{d\Lambda_0}{dy}\right)\Lambda_0\right] dy, \left(\Lambda_0 = \overset{*}{\int}(-B)\,dx\right) \tag{16}$$

integrările parțiale stângi și derivarea parțială stângă fiind evident efectuate tot în sensul lui Volterra.

[1]) p. 80.

Rezultă că *putem aduce sistemul* $L(Z) = 0$ *printr'o transformare nesingulară* $Z = \Lambda\overline{Z}$ *la forma redusă*

$$\frac{\partial^2 \overline{Z}}{\partial x\, \partial y} + \overline{C}\,\overline{Z} = 0$$

numai în cazul când invarianţii matriciali H *şi* K *sunt egali şi că această condiţie necesară este şi suficientă.*

Proprietatea precedentă va permite ca să se facă studiul sistemelor $L(Z)=0$ cu invarianţi matriceali egali, pe forma lor redusă, care este evident mai comodă în calcule.

7. Integrarea cu ajutorul seriei matrizante în cazul H = 0 sau K = 0

Să considerăm sistemul (2) scris sub forma

$$L(Z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right)Z - HZ = 0 \tag{17}$$

şi să presupunem că $H = 0$ în tot domeniul D. In acest caz, sistemul (17) poate fi înlocuit cu sistemul linear de primul ordin, anume

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} + BZ_1 = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} + AZ = Z_1. \tag{18}$$

De asemenea, dacă scriem sistemul (2) sub formă echivalentă

$$L(Z) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right)Z - KZ = 0 \tag{19}$$

şi dacă presupunem că în D avem $K = 0$, el va putea fi înlocuit cu sistemul linear de primul ordin.

$$\frac{\partial Z_{-1}}{\partial y} + A\,Z_{-1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} + BZ = Z_{-1} \tag{20}$$

Forma specială a sistemului (18) sau (20) ne va permite să determinăm imediat soluţia Z a sistemului (2).

Dacă ne referim de exemplu la sistemul (18), primul său subsistem, care este omogen, ne va procura pe Z_1 şi apoi subsistemul al doilea, care este neomogen, ne va determina pe Z. Forma matricială sub care este scris sistemul (18) ne sugerează însă ideea de a integra pe rând fiecare subsistem al său cu metoda lui Peano-Baker, care cere introducerea noţiunii de serie matrizantă.

Presupunând că matricele A şi B sunt continue într'un domeniu dreptunghiular definit de relaţiile $|x - x_0| < a$ şi $|y - y_0| < b$ — acest domeniu fiind deci inclus în D — şi notând în general cu

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\Omega}} M\ (\tau, y), \quad \overset{y}{\underset{y_0}{\Omega}} M\,(x, \tau)$$

seriile matrizante parţiale ale matricii $M(x, y)$ respectiv în raport cu x şi y — convergenţa uniformă şi absolută a acestor serii, cel puţin în domeniul dreptunghiular definit mai sus, rezultând ca şi în cazul unei singure variabile

numai din ipoteza de continuitate a matricii $M(x, y)$ în domeniul considerat — vom putea scrie pentru sistemul (18), mai întâi

$$Z_1 = \left[\overset{x}{\underset{x_0}{\Omega}}\left(-B(\tau, y)\right)\right] Y,$$

unde Y este o matrice cu o coloană cu elementele funcții arbitrare de y (valoarea lui Z_1 pentru $x = x_0$). Urmează că Z va fi dat de sistemul linear neomogen

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + A\,Z = \left[\overset{x}{\underset{x_0}{\Omega}}\left(-B(\tau, y)\right)\right] Y$$

și deci vom avea

$$Z = \left[\overset{y}{\underset{y_0}{\Omega}}\left(-A(x, \tau)\right)\right]\left\{X + \int_{y_0}^{y}\left[\overset{y}{\underset{y_0}{\Omega}}\left(-A(x, \tau)\right)\right]^{-1}\left[\overset{x}{\underset{x_0}{\Omega}}\left(-B(\tau, y)\right)\right] Y\,dy\right\} \quad (21)$$

semnul $\int$ fiind simbolul de integrare ordinară a unei matrici, iar X indicând o matrice cu o coloană cu elementele funcții arbitrare de x (valoarea lui Z pentru $y = y_0$). Expresia obținută pentru Z este de forma

$$Z = M\left(X + \int N\,Y\,dy\right), \quad (22)$$

M și N fiind matrici pătrate nesingulare în domeniul dreptunghiular considerat cu elementele funcții determinate de x și y, iar X și Y fiind matrici arbitrare cu o coloană, care depind respectiv numai de x sau numai de y.

Se vede că, luând matricea Y nulă, vom obține soluția mai puțin generală, $Z = MX$ în care nu mai intervine simbolul cuadraturii.

Reciproc, să arătăm că, dacă sistemul $L(Z) = 0$ admite o soluție de forma $Z = MX$, unde M este o matrice pătrată determinată nesingulară, iar X o matrice arbitrară cu o coloană depinzând numai de x, *atunci în mod necesar* $H = 0$ *și deci sistemul se va integra prin serii matrizante.*

In adevăr, scriind că $Z = MX$ verifică sistemul și notând cu X' derivata ordinară a lui X, va trebui să avem

$$(M_y + AM)X' + L(M)\,X = 0,$$

oricare ar fi matricea arbitrară X. Aceasta cere ca cei doi coeficienți ai lui X și X' să fie nuli, căci în caz contrar — dând lui y o anumită valoare — elementele matricii X ar verifica un sistem diferențial linear și nu ar mai putea fi alese arbitrare. Vom avea deci, în mod necesar

$$M_y + AM = 0, \qquad L(M) = 0,$$

sistem identic cu (14) și a cărui condiție de integrabilitate este $HM = 0$. Deoarece M este nesingulară, deducem că $H = 0$.

Deci, *condiția necesară și suficientă ca invariantul matricial* H *să fie nul, este ca sistemul* L(Z) = 0 *să admită o soluție de forma* Z = M X, *unde* M(x, y) *este o matrice pătrată bine determinată nesingulară într'un anumit domeniu, iar* X *este o matrice arbitrară cu o coloană care depinde numai de* x.

Pentru cazul $K = 0$, sistemul echivalent (20) se integrează în mod analog prin serii matrizante şi se obţine astfel pentru sistemul $L(Z) = 0$ o soluţie de forma

$$Z = M\left(Y + \int NX\,dx\right), \tag{23}$$

unde existenţa soluţiei mai puţin generală $Z = MY$ poate constitui iarăşi o condiţie necesară şi suficientă ca invariantul matricial K să fie nul.

8. Transformarea lui Laplace. Să presupunem acum că niciunul din invarianţii matriciali H sau K nu este nul şi că în domeniul D ei sunt matrici nesingulare.

In cazul $H \neq 0$, să facem transformarea

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + AZ = Z_1, \tag{24}$$

pe căre o vom numi *transformarea lui Laplace în sensul variabilei y*, fiindcă ea generalizează în mod direct transformarea relativă la o singură ecuaţie de tip Laplace. Sistemul $L(Z) = 0$, scris sub forma (17), va deveni

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} + BZ_1 = HZ. \tag{25}$$

Eliminând pe Z_1 între sistemele (24) şi (25), vom obţine evident pe $L(Z) = 0$. Deoarece am presupus că det. $H \neq 0$, vom putea elimina pe Z între (24) şi (25), fiindcă putem scrie

$$Z = H^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right) Z_1$$

şi înlocuind această expresie a lui Z în (24), deducem după efectuarea calculelor că Z_1 verifică sistemul

$$L_1(Z_1) = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial y} + A_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + B_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} + C_1 Z_1 = 0, \tag{26}$$

unde coeficienţii matriciali A_1, B_1, C_1 au expresiile

$$\begin{cases} A_1 = -H_y H^{-1} + HAH^{-1}, \; B_1 = B \\ C_1 = \left(-H_y H^{-1} + HAH^{-1}\right) B + B_y - H \end{cases} \tag{27}$$

Sistemul $L_1(Z_1) = 0$, care este transformatul prin transformarea (24) al sistemului $L(Z) = 0$, este de acelaşi tip cu acesta şi are invarianţii matriciali

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-H_y H^{-1} + HAH^{-1}\right) + B\left(-H_y H^{-1} + HAH^{-1}\right) \\ -\left(-H_y H^{-1} + HAH^{-1}\right) B - B_y + H, \; K_1 = H \end{aligned} \tag{28}$$

De asemenea, în cazul $K \neq 0$, să facem transformarea

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + BZ = Z_{-1}, \tag{29}$$

pe care o vom numi *transformarea lui Laplace în sensul variabilei* x. Sistemul $L(Z) = 0$, scris sub forma (19), va deveni

$$\frac{\partial Z_{-1}}{\partial y} + AZ_{-1} = KZ \tag{30}$$

şi fiindcă am presupus că det. $K \neq 0$, vom putea elimina pe Z între relaţiile (29) şi (30). Vom avea mai întâi

$$Z = K^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right)Z_{-1}$$

şi înlocuind expresia lui Z în (29), după efectuarea calculelor deducem că Z_{-1} verifică sistemul

$$L_{-1}(Z_{-1}) = \frac{\partial^2 Z_{-1}}{\partial x \partial y} + A_{-1}\frac{\partial Z_{-1}}{\partial x} + B_{-1}\frac{\partial Z_{-1}}{\partial y} + C_{-1}Z_{-1} = 0, \tag{31}$$

coeficienţii matriciali A_{-1}, B_{-1}, C_{-1} având valorile

$$\begin{cases} A_{-1} = A\,,\ B_{-1} = -K_x K^{-1} + KBK^{-1} \\ C_{-1} = (-K_x K^{-1} + KBK^{-1})A + A_x - K. \end{cases} \tag{32}$$

Sistemul $L_{-1}(Z_{-1}) = 0$ este transformatul sistemului $L(Z) = 0$ prin transformarea (29). El este de acelaşi tip cu sistemul iniţial şi invarianţii săi matriceali sunt:

$$H_{-1} = K\,,\ K_{-1} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-K_x K^{-1} + KBK^{-1}\right) + A\left(-K_x K^{-1} + KBK^{-1}\right) - \tag{33}$$
$$-(-K_x K^{-1} + KBK^{-1})A - A_x + K.$$

Utilizând deci transformarea lui Laplace în sensul variabilei y sau x, am asociat sistemului $L(Z) = 0$ alte două sisteme de acelaşi tip $L_1(Z_1) = 0$ şi $L_{-1}(Z_{-1}) = 0$. Este clar că, dacă primul sistem asociat are invariantul $H_1 = 0$, sau dacă al doilea sistem asociat are invariantul $K_{-1} = 0$, atunci fiecare din aceste sisteme va putea fi integrat prin serii matrizante şi vom obţine apoi pe Z prin diferenţieri şi operaţii algebrice simple.

9. **Şirul lui Laplace.** Evident că, dacă matricele $H_1 \neq 0$ sau $K_{-1} \neq 0$ şi dacă ele sunt nesingulare, vom putea aplica transformarea lui Laplace şi sistemelor (26) sau (31). Este de remarcat însă că transformarea lui Laplace în sensul variabilei x, în virtutea relaţiei (25), va transforma sistemul $L_1(Z_1) = 0$ în sistemul iniţial $L(Z) = 0$, în care Z este înlocuit cu $H^{-1}Z$. De asemenea, transformarea lui Laplace în sensul variabilei y, în virtutea relaţiei (30), va transforma sistemul $L_{-1}(Z_{-1}) = 0$ tot în sistemul iniţial $L(Z) = 0$, în care Z este schimbat în $K^{-1}Z$.

Dacă privim ca echivalente două sisteme care se aduc unul la altul prin schimbarea lui Z în ΛZ, care au deci invarianţi matriciali asemenea şi prin urmare aceiaşi invarianţi absoluţi, rezultă că transformarea lui Laplace în sensul celor două variabile, aplicată în mod succesiv diverselor sisteme distincte obţinute, ne va procura un şir linear $[L]$ de sisteme de acelaşi tip.

$$\ldots, (L_{-2}), (L_{-1}), (L), (L_1), (L_2), \ldots \qquad [L]$$

cu indici pozitivi sau negativi, în care sistemul oarecare (L_i) se duduce din sistemul (L_{i-1}), utilizând transformarea lui Laplace în sensul variabilei y, sau din sistemul (L_{i+1}), utilizând transformarea lui Laplace în sensul variabilei x.

Pentrucă există o perfectă analogie între şirul $[L]$ şi cel care se obţine pentru o singură ecuaţie şi mai ales pentrucă procedeul nostru îşi are originea ca idee în opera lui Laplace, vom numi *şirul* [L], *şirul lui Laplace* asociat sistemului (L).

10. Pentru studiul ulterior al şirului lui Laplace, este necesar să menţionăm în general transformările şi relaţiile care leagă două sisteme consecutive din acest şir.

Dacă invariantul $H_{i-1} \neq 0$ şi det. $H_{i-1} \neq 0$, atunci transformarea

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + A_{i-1}\right) Z_{i-1} = Z_i\,, \qquad (i \geqslant 1)$$

va transforma sistemul (L_{i-1}) în sistemul

$$(L_i) = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x \partial y} + A_i \frac{\partial Z_i}{\partial x} + B_i \frac{\partial Z_i}{\partial y} + C_i\, Z_i = 0,$$

în care coeficienţii au expresiile

$$\begin{cases} A_i = -\dfrac{\partial H_{i-1}}{\partial y} H_{i-1}^{-1} + H_{i-1}\, A_{i-1}\, H_{i-1}^{-1}\,, \; B_i = B \\ C_i = \left(-\dfrac{\partial H_{i-1}}{\partial y} H_{i-1}^{-1} + H_{i-1}\, A_{i-1}\, H_{i-1}^{-1}\right) B + B_y - H_{i-1} \end{cases} \qquad (34)$$

şi care are invarianţii matriciali

$$H_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial H_{i-1}}{\partial y} H_{i-1}^{-1} + H_{i-1}\, A_{i-1}\, H_{i-1}^{-1}\right) + B\left(-\frac{\partial H_{i-1}}{\partial y} H_{i-1}^{-1} + \right.$$

$$\left. + H_{i-1}\, A_{i-1}\, H_{i-1}^{-1}\right) - \left(-\frac{\partial H_{i-1}}{\partial y} H_{i-1} + H_{i-1}\, A_{i-1}\, H_{i-1}^{-1}\right) B - \qquad (35)$$

$$- B_y + H_{i-1}\,, \; K_i = H_{i-1}$$

De asemenea, dacă invariantul $K_{-i+1} \neq 0$ şi det. $K_{-i+1} \neq 0$, atunci transformarea

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_{-i+1}\right) Z_{-i+1} = Z_{-i} \qquad (i \geqslant 1)$$

va transforma sistemul (L_{-i+1}) în sistemul

$$(L_{-i}) = \frac{\partial^2 Z_{-i}}{\partial x \partial y} + A_{-i} \frac{\partial Z_{-i}}{\partial x} + B_{-i} \frac{\partial Z_{-i}}{\partial y} + C_{-i}\, Z = 0,$$

în care coeficienții au valorile

$$\begin{cases} A_{-i} = A, \; B_{-i} = -\dfrac{\partial K_{-i+1}}{\partial x} K_{-i+1}^{-1} + K_{-i+1} B_{-i+1} K_{-i+1}^{-1} \\ C_{-i} = \left(-\dfrac{\partial K_{-i+1}}{\partial x} K_{-i+1}^{-1} + K_{-i+1} B_{-i+1} K_{-i+1}^{-1} \right) A + A_x - K_{-i+1} \end{cases} \tag{36}$$

iar invarianții matriciali au expresiile

$$H_{-i} = K_{-i+1}, \; K_{-i} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial K_{-i+1}}{\partial x} K_{-i+1}^{-1} + K_{-i+1} B_{-i+1} K_{-i+1}^{-1} \right) +$$

$$+ A\left(-\frac{\partial K_{-i+1}}{\partial x} K_{-i+1}^{-1} + K_{-i+1} B_{-i+1} K_{-i+1}^{-1} \right) - \tag{37}$$

$$-\left(-\frac{\partial K_{-i+1}}{\partial x} K_{-i+1}^{-1} + K_{-i+1} B_{-i+1} K_{-i+1}^{-1} \right) A - A_x + K_{-i+1}$$

Se observă din formulele precedente că, dacă se aplică indefinit transformarea lui Laplace în sensul variabilei y, atunci coeficientul B al sistemului rămâne același, o observare ana oagă fiind valabilă pentru transformarea în sensul variabilei x, însă relativă la coeficientul A.

In virtutea acestor observații, ținând seamă de relația generală

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x} + BZ_i = H_{i-1} Z_{i-1} ,$$

analoagă cu relația (25), deducem din aproape în aproape formula

$$Z = H^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right) H_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right) \ldots H_{i-1}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + B\right) Z_i , \tag{38}$$

care determină pe Z în funcție de Z_i și derivatele sale parțiale în raport cu x până la ordinul i.

De asemenea, ținând seama de relația generală

$$\frac{\partial Z_{-i}}{\partial y} + AZ_{-i} = K_{-i+1} Z_{-i+1} ,$$

analoagă cu relația (30), deducem din aproape în aproape formula

$$Z = K^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right) K_{-1}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right) \ldots K_{-i+1}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + A\right) Z_{-i} , \tag{39}$$

care determină pe Z în funcție de Z_{-i} și de derivatele sale parțiale în raport cu y până la ordinul i.

Șirul lui Laplace $[L]$ este în general nelimitat în ambele sensuri. Dacă $H_i = 0$ sau dacă det. $H_i = 0$ $(i \geqslant 0)$, ultimul sistem la dreapta al șirului va fi (L_i) și sistemul următor nu se va mai putea obține. Vom spune că șirul $[L]$ este *terminat în sensul variabilei* y *în cazul ordinar*, dacă $H_i = 0$ și *în cazu singular*, dacă $H_i \neq 0$, însă det. $H_i = 0$. Vom spune în mod analog că șirul

$[L]$ este *terminat în sensul variabilei* x, *în cazul ordinar sau în cazul singular*, după cum $K_{-i} = 0$ sau $K_{-i} \neq 0$, însă det. $K_{-1} = 0$ $(i \geqslant 0)$.

Este clar că, dacă şirul lui Laplace $[L]$ este terminat în cazul ordinar în sensul variabilei y sau x, la sistemul (L_i) sau (L_{-i}), atunci fiecare din aceste sisteme se va integra prin serii matrizante şi formulele (38) sau (39) ne vor da apoi prin diferenţieri şi calcule algebrice simple, integrala generală a sistemului iniţial (L).

II. SISTEME PARTICULARE INTERESANTE

11. **Sisteme invariante în transformarea lui Laplace.** Dintre numeroasele probleme ce se pot pune în legătură cu şirul lui Laplace $[L]$ asociat sistemului (L) să menţionăm de pe acum una destul de simplă şi interesantă.

Ne propunem să determinăm sistemele (L) care se transformă în ele însele printr'una din transformările lui Laplace sau prin amândouă, pentru care deci şirul $[L]$ are toate sistemele transformate dela dreapta (respectiv dela stânga) identice sau pentru care toate sistemele şirului $[L]$ şi dela dreapta şi dela stânga sunt identice. In acest din urmă caz, şirul $[L]$ va fi periodic cu perioada egală cu unitatea şi niciuna din transformările lui Laplace nu va prezenta vreun avantaj din punctul de vedere al integrării sistemului (L) prin metoda cascadelor, expusă mai sus.

Pentru ca sistemul (L) să fie invariant faţă de transformarea lui Laplace în sensul variabilei y, este evident necesar să avem

$$H_1 = H, \quad K_1 = K.$$

Deoarece avem în general, $K_1 = H$, deducem că în acest caz $H = K$ şi deci, *în mod necesar, sistemul* (L) *va avea invarianţii matriciali egali.*

Presupunând că am adus sistemul (L) la forma redusă

$$L(Z) = \frac{\delta^2 Z}{\partial x\, \partial y} - HZ = 0 \tag{40}$$

şi ţinând seamă de formulele (28), rezultă că

$$H_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(H_y H^{-1}) + H = H$$

şi deci H va satisface ecuaţia matricială cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial}{\partial x}(H_y H^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dH}{dy}\right) = 0 \tag{41}$$

unde am pus în evidenţă şi derivata parţială stângă în sensul lui Volterra, $\frac{dH}{dy}$ a lui H, ceea ce ne va permite să determinăm imediat pe H. Intr'adevăr, vom putea scrie mai întâi

$$\frac{dH}{dy} = \frac{dY}{dy},$$

unde Y este o matrice funcțională pătrată arbitrară, depinzând numai de y. Matricele H și Y având derivatele stângi în sensul lui Volterra egale, urmează că ele vor diferi printr'o matrice multiplicativă la dreapta, care depinde numai de x (constantă în raport cu y), deci

$$H = Y X,$$

X fiind o matrice pătrată arbitrară depinzând numai de x.

Se verifică imediat că, dacă luăm pentru H expresia de mai sus, sistemul (40) se transformă în el însuși prin transformarea lui Laplace în sensul variabilei y și că, deci, condiția găsită este nu numai necesară, ci și suficientă.

In mod analog, se găsește că, pentru ca sistemul (L) să fie invariant față de transformarea lui Laplace în sensul variabilei x, este necesar și suficient ca invarianții săi matriciali să fie egali și că, după aducerea la forma redusă, valoarea lor comună trebue să fie de forma $H = XY$, unde matricele pătrate arbitrare X, Y depind respectiv numai de x sau numai de y.

Din cele de mai sus, rezultă imediat că, *pentru ca sistemul* (L) *să fie invariant față de ambele transformări ale lui Laplace (deci ca șirul lui Laplace asociat să fie periodic cu perioada egală cu unitatea), este necesar și suficient ca invarianții matriciali* H *și* K *să fie egali, iar valoarea lor comună să fie de forma* XY, *matricele arbitrare pătrate* X, Y *fiind permutabile și depinzând respectiv numai de x sau y.*

In particular, aceasta este totdeauna posibil dacă invarianții H și K sunt egali și constanți.

12. Sistemul de tip Euler—Poisson. Este dificil în general să se obțină expresia invarianților sistemelor (L_i) sau (L_{-i}) în funcție de invarianții și coeficienții sistemului inițial (L). Să examinăm un caz particular interesant, când acest calcul este posibil, anume clasa sistemelor de forma

$$E(B, B') = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{B'}{x-y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{B}{x-y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \tag{42}$$

unde matricele B și B' sunt constante și permutabile. Vom numi sistemele de tipul precedent, sisteme Euler — Poisson, fiindcă ele generalizează ecuația cu același nume studiată în mod elegant de Darboux.

Un calcul imediat dă expresiile invarianților matriciali

$$H = \frac{B'(1-B)}{(x-y)^2}, \quad K = \frac{B(1-B')}{(x-y)^2}. \tag{43}$$

Aceste valori ale invarianților conduc la punerea în evidență a unor proprietăți ale sistemelor $E(B, B') = 0$. In adevăr, dacă facem aceeași transformare omografică (cu coeficienți constanți) asupra variabilelor x și y, anume

$$x = \frac{a\bar{x} + b}{c\bar{x} + d}, \; y = \frac{a\bar{y} + b}{c\bar{y} + d},$$

sistemul $E(B, B') = 0$ se va transforma în sistemul

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \bar{x}\, \partial \bar{y}} - \frac{B'}{\bar{x} - \bar{y}} \cdot \frac{c\bar{x} + d}{c\bar{y} + d} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \bar{x}} + \frac{B}{\bar{x} - \bar{y}} \cdot \frac{cy + d}{c\bar{x} + d} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \bar{y}} = 0, \qquad (44)$$

care are invarianţii matriciali

$$\overline{H} = \frac{B'(1 - B)}{(\bar{x} - \bar{y})^2}, \; \overline{K} = \frac{B(1 - B')}{(\bar{x} - \bar{y})^2},$$

adică aceeaşi invarianţi (43) în care variabilele x şi y sunt înlocuite cu $\bar{x}$ şi $\bar{y}$. Evident că, dacă matricea cu o coloană sau pătrată $\Phi(x, y)$ este o soluţie oarecare a sistemului (42), atunci matricea

$$\Phi\left(\frac{a\bar{x} + b}{c\bar{x} + d}, \; \frac{a\bar{y} + b}{c\bar{y} + d}\right)$$

va fi o soluţie a sistemului (44). In particular, pentru $c = 0$ şi $d = 1$, dacă facem abstracţie de numele variabilelor independente, sistemul (44) va coincide cu sistemul (42), adică sistemul $E(B, B') = 0$ este invariant faţă de schimbarea de variabile $x = a\bar{x} + b$, $y = a\bar{y} + b$.

Prin urmare, *din orice soluţie matricială particulară* $\Phi(x, y)$ *a sistemului* $E(B, B') = 0$ *putem deduce alta mai generală* $\Phi(ax + b, ay + b)$ *în care a şi b sunt constante arbitrare.*

Derivând în sensul obişnuit pe rând în raport cu b şi a pe $\Phi(ax + b, ay + b)$ şi făcând apoi $a = 1$ şi $b = 0$, vom obţine şi soluţiile matriciale.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \; x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

deci, *dintr'o soluţie matricială particulară* $\Phi(x, y)$ *a sistemului* $E(B, B') = 0$ *putem deduce alte două soluţii, dacă aplicăm lui* Φ *operatorii diferenţiali*

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \; x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Cele două propoziţii de mai sus sunt extensiuni restrânse ale unor propoziţii analoage relative la ecuaţia lui Euler — Poisson şi datorite lui Appell şi Lie [2][1]).

13. Să trecem acum la considerarea invarianţilor H_i şi K_i ai sistemului (E_i) dedus din sistemul iniţial (E) prin i transformări Laplace în sensul variabilei y, dacă $i > 0$ sau în sensul variabilei x, dacă $i < 0$.

In virtutea formulelor (34), (35) şi (36), (37) se poate arăta uşor prin recurenţă că, matricile B şi B' fiind permutabile, avem în general

[1]) p. 60.

$$H_i = \frac{(i + B')\ (i + 1 - B)}{(x - y)^2},\ K_i = \frac{(i - 1 + B')\ (i - B)}{(x - y)^2}. \qquad (45)$$

Din aceste relații, rezultă că șirul lui Laplace $[E]$, asociat sistemului $E(B, B') = 0$, va fi terminat în sensul variabilei y (deci pentru i pozitiv) și în cazul ordinar, dacă *una din matricile*

$$-B',\ B - 1$$

este un scalar întreg pozitiv sau nul, sau dacă niciuna din aceste condiții nefiind satisfăcută, avem totuși

$$(i + B')\ (i + 1 - B) = 0,$$

adică *matricile* $i + B'$ *și* $i + 1 - B$ *sunt divizori ai lui zero*, ceea ce cere în mod necesar ca ecuațiile caracteristice ale matricilor $-B'$ și $B - 1$ să admită o rădăcină comună întreagă pozitivă sau nulă.

Suntem în cazul singular dacă niciuna din condițiile precedente nu este îndeplinită și dacă cel puțin una din ecuațiile caracteristice ale matricilor $-B'$ sau $B - 1$ admite o rădăcină întreagă pozitivă sau nulă.

De asemenea, șirul lui Laplace $[E]$ va fi terminat în sensul variabilei x (deci pentru i negativ) și în cazul ordinar, dacă *una din matricile*

$$1 - B',\ B$$

este un scalar întreg negativ sau nul, sau dacă, niciuna din aceste condiții nefiind satisfăcută, avem totuși

$$(i + 1 - B')\ (i + B) = 0,$$

adică *matricile* $i + 1 - B'$ *și* $i + B$ *sunt divizori ai lui zero*, ceea ce impune ca mai sus ca ecuațiile caracteristice ale matricilor $1 - B'$ și B să admită o rădăcină comună, întreagă negativă sau nulă.

Vom fi în cazul singular dacă niciuna din condițiile enunțate nu este satisfăcută și dacă cel puțin una din ecuațiile caracteristice ale matricilor $1 - B'$ sau B are o rădăcină întreagă negativă sau nulă.

Din examinarea precedentă, rezultă că, dacă niciuna din ecuațiile caracteristice ale matricilor B sau B' nu admite o rădăcină reală întreagă, atunci șirul lui Laplace $[E]$ va fi nelimitat în ambele sensuri.

Tot astfel, dacă matricile B și B' sunt niște scalari întregi de același semn, unul dintre aceștia scalari fiind eventual nul, atunci șirul lui Laplace $[E]$ va fi terminat în cazul ordinar și în ambele sensuri.

Acest ultim rezultat trebue considerat ca banal, deoarece, dacă $B = \beta$ și $B' = \beta'$ — unde β, β' sunt niște scalari — sistemul $E(B, B') = 0$ se reduce la n ecuații $E(\beta, \beta') = 0$ de tipul Euler — Poisson cu aceeași coeficienți și în care numele funcției necunoscute este pe rând $z^1, \ldots, z^n$. Dacă, în plus, β și β' sunt întregi de același semn (sau zero), după cum a arătat D a r b o u x, integrala generală se poate obține fără nicio cuadratură.

14. Să mai semnalăm o ultimă proprietate a sistemelor $E(B, B') = 0$, care este o extensiune a unei proprietăți analoage a ecuației $E(\beta, \beta') = 0$.

Pentru aceasta, să scriem sistemul $E(B,\ B') = 0$ sub forma

$$(x - y)\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - B'\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

Derivând în raport cu x, el devine

$$(x - y)\frac{\partial^3 Z}{\partial^2 x \partial y} - B'\frac{\partial Z}{\partial x^2} + (B + 1)\frac{\partial Z}{\partial x \partial y} = 0,$$

relaţie care arată că $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ satisface sistemul $E(B + 1,\ B') = 0$.

Dacă notăm cu $Z(B,\ B')$ un sistem oarecare de soluţii al sistemului $E(B,\ B') = 0$, vom putea scrie deci

$$\frac{\partial Z(B, B')}{\partial x} = Z(B + 1,\ B') \tag{46}$$

şi, în mod analog, găsim

$$\frac{\partial Z(B,\ B')}{\partial y} = Z(B,\ B' + 1). \tag{47}$$

Aceste două formule conduc apoi la relaţia generală

$$\frac{\partial^{i+j} Z(B,\ B')}{\partial x^i \partial y^j} = Z(B + i, B' + i) \tag{48}$$

Relaţia generală (48), împreună cu relaţiile (46) şi (47), pe care ea le conţine, conduc la anumite consecinţe în ceea ce priveşte integralele generale ale sistemelor

$$E(B,\ B') = 0 \text{ şi } E(B + i, B' + j) = 0.$$

Pentru aceasta, să ne referim de exemplu la relaţia (46), care arată că, dacă Z este un sistem de soluţii pentru $E(B,\ B') = 0$, atunci $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ va fi un sistem de soluţii pentru $E(B,\ +\ 1,\ B') = 0$. Reciproc, să cercetăm acum dacă dintr'un sistem de soluţii Z^* al lui $E(B + 1,\ B') = 0$ putem deduce cu ajutorul formulei

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Z^*$$

un sistem de soluţii Z pentru $E(B,\ B') = 0$.

Introducând valoarea Z^* a lui $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ în sistemul $E(B,\ B') = 0$, acesta va deveni

$$(x - y)\frac{\partial Z^*}{\partial y} - B'Z^* + B\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

și această relație va procura pe $\frac{\partial Z}{\partial y}$ dacă B este o matrice nesingulară, deci dacă det. $B \neq 0$. Vom avea atunci

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = B^{-1} B' Z^* - (x - y) B^{-1} \frac{\partial Z^*}{\partial y}$$

și deci expresia diferențialei totale a lui Z va fi

$$dZ = Z^* dx + \left[B^{-1} B' Z^* - (x - y) B^{-1} \frac{\partial Z^*}{\partial y} \right] dy,$$

partea a doua a acestei relații fiind o diferențială totală exactă în virtutea sistemului $E(B + 1, B') = 0$ pe care-l verifică Z^*.

Rezultă deci că, dacă B este o matrice nesingulară, formula (46) aplicată diverselor sisteme de soluții ale lui $E(B, B') = 0$ va procura toate soluțiile sistemului $E(B + 1, B') = 0$ și deci integrala generală a acestui sistem din urmă, se va putea deduce cu ajutorul formulei menționate din integrala generală a sistemului $E(B, B') = 0$.

Evident că putem enunța în legătură cu formula (47), o propoziție analoagă, schimbând pe x cu y și pe B cu $-B'$, iar formula (48) ne va conduce, prin aplicarea repetată a rezultatelor deduse din formulele (46) și (47), la următoarea propoziție generală:

Integrala generală a sistemului $E(B + i, B' + j) = 0$ *se poate deduce din integrala generală a sistemului* $E(B, B') = 0$ *cu ajutorul formulei* (48), *dacă niciuna din matricile*

$$B,\ B + 1,\ \ldots,\ B + i - 1$$
$$B',\ B' + 1,\ \ldots,\ B' + j - 1$$

nu este singulară, deci dacă niciuna din rădăcinile ecuațiilor caracteristice ale matricilor B *sau* B' *nu este egală cu* $0, -1, \ldots, -(i - 1)$, *respectiv* $0, -1, \ldots, -(j - 1)$.

15. Sisteme adjuncte și autoadjuncte. Teoria integrării cu metoda lui Riemann a sistemelor care fac obiectul cercetării noastre, necesită introducerea noțiunii de sistem adjunct. Vom introduce acum această noțiune în mod formal, însă se va vedea mai departe că această introducere nu este deloc artificială și că ea este impusă în mod natural de considerentele amintite.

Vom numi sistemul adjunct al sistemului $L(Z) = 0$, sistemul

$$L^*(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{A} U) - \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{B} U) + \widetilde{C} U = 0, \qquad (49)$$

unde am notat în general cu $\widetilde{M}$ matricea transpusă a lui M.

In virtutea acestei definiții, se observă imediat că *relația de adjuncțiune este reciprocă*, adică

$$\text{adj. adj. } L(Z) = L(Z),$$

deoarece avem

$$\overset{*}{L}(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \widetilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} - \widetilde{B} \frac{\partial U}{\partial y} - (\widetilde{A}_x + \widetilde{B}_y - \widetilde{C})\, U = 0$$

şi deci putem scrie

$$\text{adj. } L^*(U) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(AZ) + \frac{\partial}{\partial y}(BZ) - (A_x + B_y - C)Z = L(Z)$$

Pe lângă relaţia precedentă dintre sistemul $L(Z) = 0$ şi sistemul său adjunct $L^*(U) = 0$, este interesant de semnalat o relaţie între invarianţii matriciali ai celor două sisteme, care poate fi utilă în studiul şirului lui Laplace.

Calculul invarianţilor matriciali H^* şi K^* ai sistemului adjunct nu prezintă nicio dificultate. Ei vor avea expresiile

$$H^* = -\widetilde{A}_x + \widetilde{B}\,\widetilde{A} + \widetilde{A}_x + \widetilde{B}_y - \widetilde{C} = \widetilde{K}$$

$$K^* = -\widetilde{B}_y + \widetilde{A}\,\widetilde{B} + \widetilde{A}_x + \widetilde{B}_y - \widetilde{C} = \widetilde{H}$$

adică, *invarianţii sistemului adjunct sunt egali cu transpuşii invarianţilor sistemului iniţial, însă consideraţi în ordine inversă.*

Rezultă de mai sus că, dacă $H = K$, atunci considerând sistemul iniţial sub forma sa redusă

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = HZ$$

acest sistem este autoadjunct dacă $H = \widetilde{H}$, adică *un sistem de tip Laplace cu invarianţi matriciali egali este autoadjunct, dacă aceşti invarianţi matriciali sunt simetrici.*

Sistemele de tip Laplace cu invarianţi matriciali egali şi simetrici au deci aceeaşi proprietate ca şi ecuaţiile hiperbolice de tip Laplace cu invarianţi egali, ceea ce sugerează ideea de a extinde la aceste sisteme şi alte proprietăţi ale ecuaţiilor menţionate.

III. PROBLEMA INTEGRĂRII CU CONDIŢII LA LIMITĂ

16. **Caracteristicile sistemului.** In vederea rezolvării problemelor la limită ce se pot pune în legătură cu sistemele de tip Laplace, care sunt analoage cu cele relative la o singură ecuaţie, este util să punem în evidenţă caracteristicile.

Dacă $G(x, y) = 0$ este o curbă caracteristică a sistemului, atunci ecuaţia cu derivate parţiale a curbelor caracteristice va fi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial y} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right)^n = 0, \qquad (50)$$

ceea ce înseamnă că dreptele $x = \text{const}$, şi $y = \text{const}$. cunt curbele caracteristice ale sistemului.

Toate curbele caracteristice fiind reale, urmează că printr'o extensiune a nomenclaturii lui Hadamard dela ecuaţiile cu derivate parţiale, sistemul

$L(Z) = 0$ este *total hiperbolic*. Forma caracteristică din ecuația (50) fiind însă o putere a unei forme pătratice nedefinite în două variabile, putem spune mai precis că sistemul $L(Z) = 0$ este de tip *polihiperbolic normal*.

Dintre cele patru probleme la limită ce se pun în mod obișnuit în legătură cu o ecuație de tip Laplace hiperbolică, noi vom trata pentru sistemele (L) problema lui Darboux-Picard și problema lui Cauchy.

Metoda matricială pe care o utilizăm va conduce mai rapid la soluțiile acestor probleme, considerate până acum și de alți cercetători și ea va fi în măsură să pună în lumină anumite elemente esențiale, pe care metoda directă nu le putea scoate în evidență. Aceeași metodă poate fi evident utilizată cu succes și pentru rezolvarea problemei lui Picard sau a lui Goursat.

17. Problema lui Darboux-Picard. Presupunând coeficienții matriciali A, B, C ai sistemului[1]),

$$L(Z) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + CZ = 0 \qquad (51)$$

că sunt funcții continue într'un domeniu D, problema lui Darboux-Picard consistă în determinarea unui sistem de soluții regulate, care să ia valori convenabil date pe două drepte caracteristice $x = x_0$ și $y = y_0$. Ar trebui deci să determinăm o matrice cu o coloană care să fie o soluție a sistemului și să verifice condițiile date.

Pentru cele ce urmează, este mai indicat să căutăm o matrice pătrată ca soluție a sistemului, deci n sisteme de soluții, ceea ce evident va rezolva și prima problemă.

Sub această formă, problema enunțată precis consistă în determinarea unei matrici funcționale pătrate $Z(x, y)$, soluție regulată a sistemului (adică elementele sale sunt funcții continue și cu derivate prime continue într'un anumit domeniu), astfel că

$$Z(x, y_0) = \Phi(x), \; Z(x_0, y) = \Psi(y), \qquad (52)$$

matricile pătrate date $\Phi(x)$, $\Psi(y)$ fiind presupuse continue, împreună cu derivatele lor prime și în plus $\Phi(x_0) = \Psi(y_0)$.

Putem presupune $x_0 = y_0 = 0$, dacă am făcut în prealabil o schimbare convenabilă de variabile independente care nu modifică forma sistemului. Va trebui deci să avem

$$Z(x, 0) = \Phi(x), \; Z(0, y) = \Psi(y) \text{ cu } \Phi(0) = \Psi(0).$$

Vom utiliza metoda aproximațiilor succesive, a lui Picard, punând însă în valoare faptul că sistemul este scris sub formă matricială, ceea ce va face să apară în mod clar analogia cu o singură ecuație de tip Laplace.

Vom alege ca prima valoare apropiată pentru matricea integrală $Z(x, y)$ soluția Z_0 a sistemului

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x \partial y} = 0, \qquad (53)$$

care satisface aceleași condiții și a cărei expresie este

$$Z_0 = \Phi(x) + \Psi(y) - \Phi(0).$$

[1]) Cazul când sistemul ar fi neomogen nu aduce modificări esențiale.

Pe urmă, vom determina matricile integrale $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m, \ldots$ ale sistemelor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial y} + A\dfrac{\partial Z_0}{\partial x} + B\dfrac{\partial Z_0}{\partial y} + CZ_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 Z_2}{\partial x \partial y} + A\dfrac{\partial Z_1}{\partial x} + B\dfrac{\partial Z_1}{\partial y} + CZ_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial Z_m}{\partial x \partial y} + A\dfrac{\partial Z_{m-1}}{\partial x} + B\dfrac{\partial Z_{m-1}}{\partial y} + CZ_{m-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{54}$$

care se anulează pentru $y = 0$, oricare ar fi x şi pentru $x = 0$, oricare ar fi y.

Să considerăm seria matricială

$$Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_m + \ldots \tag{55}$$

şi să arătăm că această serie este absolut şi uniform convergentă, împreună cu seriile obţinute derivând parţial în raport cu x şi y fiecare termen al ei.

Vom face demonstraţia după metoda binecunoscută, utilizând în plus noţiunea de valoare absolută a unei matrice introdusă de Frobenius.

Să presupunem că domeniul D în care matricile A, B, C sunt continue este dreptunghiul definit de relaţiile $0 \leqslant x \leqslant a$ şi $0 \leqslant y \leqslant b$ şi că $\Phi(x)$ este continuă în intervalul $(0, a)$, iar $\Psi(y)$ în intervalul $(0, b)$. Fie M maximul valorilor absolute ale elementelor lui A, B, C în D şi L maximul valorilor absolute ale elementelor matricilor Z_0, $\dfrac{\partial Z_0}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial Z_0}{\partial y}$, tot în D.

Primul sistem din (54) ne dă imediat

$$Z_1 = -\int_0^x \int_0^y \left(A\frac{\partial Z_0}{\partial x} + B\frac{\partial Z_0}{\partial y} + CZ_0 \right) dxdy,$$

astfel că un element oarecare al matricilor Z_1, $\dfrac{\partial Z_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Z_1}{\partial y}$ va admite ca funcţii dominante respectiv funcţiile

$$3n\,LMxy,\ 3n\,LMy,\ 3n\,LMx$$

şi deci vom putea scrie în D, pentru valorile absolute ale matricilor menţionate

$$|Z_1| < 3n^2\,LMxy < 3n^2\,LM\,\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\left|\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right| < 3n^2\,LMy < 3n^3\,LM\,(x+y)$$

$$\left|\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right| < 3n^2\,LMx < 3n^2\,LM\,(x+y).$$

Să presupunem că, în general, avem în domeniul D relațiile

$$|Z_{m-1}| < N\frac{(x+y)^m}{m!}\ ;\ \left|\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial y}\right| < N\frac{(x+y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

N fiind un număr pozitiv. Ținând seamă de expresia lui Z_m

$$Z_m = -\int_0^x\int_0^y\left(A\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial x} + B\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial y} + CZ_{m-1}\right)dx\,dy, \tag{56}$$

deducem că pentru valoarea sa absolută, vom putea scrie în acest caz

$$|Z_m| < n^2 MN\int_0^x\int_0^y\left[\frac{2(x+y)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(x+y)^m}{m!}\right]dx\,dy$$

și deci *a fortiori*

$$|Z_m| < n^2 MN\left[\frac{2(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(x+y)^{m+2}}{(m+2)!}\right] = n^2N\frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{m+2}\right]$$

In mod analog, se găsește

$$\left|\frac{\partial Z_m}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial Z_m}{\partial y}\right| < n^2N\frac{(x+y)^m}{m!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{m+1}\right]. \tag{57}$$

Este clar că, oricare ar fi m, putem alege totdeauna un număr pozitiv fix P, astfel ca în D să avem

$$|Z_m| < n^2NP\frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!}\ ;\ \left|\frac{\partial Z_m}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial Z_m}{\partial y}\right| < n^2NP\frac{(x+y)^m}{m!}.$$

De aici rezultă, din aproape în aproape

$$\begin{aligned} |Z_m| &< 3n^{2m}LMP^{m-1}\frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \\ \left|\frac{\partial Z_m}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial Z_m}{\partial y}\right| &< 3n^{2m}LMP^{m-1}\frac{(x+y)^m}{m!} \end{aligned} \tag{58}$$

ceea ce probează că serią matriceală (55) și cele două serii obținute din ea prin derivări parțiale sunt absolut și uniform convergente în D.

Dacă $Z(x, y)$ este suma seriei (55), ea va fi deci o matrice funcțională care admite derivate parțiale prime continue în D. Matricea $Z(x, y)$ verifică și sistemul $L(Z) = 0$, deoarece putem scrie

$$S_m(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y) - \Phi(0) -$$

$$-\int_0^x\int_0^y\left[A\frac{\partial S_{m-1}(x,y)}{\partial x} + B\frac{\partial S_{m-1}(x,y)}{\partial y} + CS_{m-1}(x,y)\right]dx\,dy$$

unde $S_m(x, y)$ este suma primilor m termeni ai seriei (55).

Când m tinde către infinit, S_m, $\frac{\partial S_{m-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial S_{m-1}}{\partial y}$, vor tinde uniform respectiv către Z, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ şi vom obţine la limită ecuaţia integrală

$$Z(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y) - \Phi(0) - \int_0^x \int_0^y \left(A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} + C Z \right) dx\, dy \tag{59}$$

şi deci $Z(x, y)$ este o soluţie a sistemului $L(Z) = 0$, care satisface în mod vizibil condiţiile la limită impuse.

Matricea $Z(x, y)$ a cărei existenţă am demonstrat-o, este singura soluţie regulată în D care satisface condiţiile impuse.

In adevăr, presupunând că ar mai exista o altă soluţie Z^*, regulată în D, care verifică sistemul $L(Z) = 0$ şi condiţiile la limită, dacă se consideră diferenţa $Z^* - S_m$, se arată fără nicio dificultate, în virtutea calculelor precedente, că această diferenţă tinde către zero când m tinde către infinit, şi deci Z^* coincide cu Z.

Problema lui Darboux-Picard *admite deci o soluţie şi această soluţie este unică.*

18. Problema lui Cauchy. Să considerăm acum a doua problemă, pentru cazul când sistemul este neomogen, deci de forma

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} + CZ = \Phi, \tag{60}$$

matricea cu o coloană Φ din partea doua fiind presupusă continuă în acelaşi domeniu D ca şi A, B, C.

Problema lui Cauchy pentru sistemul (60) consistă în determinarea unei matrice cu o coloană $Z(x, y)$, soluţie regulată a sistemului într'un anumit domeniu, cunoscându-se pe un arc IJ al curbei date Γ valorile lui Z şi $\frac{\partial Z}{\partial x}$ aceste valori fiind funcţii continue. Vom presupune în plus că una din coordonatele unui punct de pe Γ este o funcţie continuă şi monotonă de cealaltă, adică un arc oarecare al curbei Γ este tăiat de o paralelă la Ox sau Oy într'un singur punct.

Revine de fapt la acelaşi lucru, anume, să ne dăm pe arcul curbei Γ expresiile lui $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ şi valoarea lui Z într'un punct de pe Γ, deoarece vom obţine atunci pe Z printr'o integrală curbilinie. Fără să restrângem generalitatea, putem chiar admite că valorile pe Γ ale lui Z, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ sunt nule, fiindcă presupunând că am determinat soluţia Z^* care corespunde condiţiilor iniţiale date la început, este suficient să facem transformarea $Z = Z^* + \overline{Z}$ care nu schimbă decât expresia lui Φ, pentru a obţine acest din urmă caz.

Pentru a fixa ideile, vom presupune că ordonata unui punct de pe Γ este o funcţie descrescătoare de abscisa sa şi că extremităţile arcului de pe Γ sunt punctele $I(a, \beta)$ şi $J(b, \alpha)$. De asemenea, vom admite că domeniul D în care

A, B, C și Φ sunt continue este dreptunghiul definit de relațiile $a \leqslant x \leqslant b$ și $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Cu aceste ipoteze, vom arăta că există o soluție unică $Z(x, y)$ care satisface condițiile inițiale și că această soluție este regulată în dreptunghiul definit mai sus.

Pentru aceasta, vom considera un punct $P(x, y)$ în dreptunghiul menționat, pe care îl vom presupune situat de exemplu deasupra arcului IJ. Paralelele duse prin P la axa Ox și Oy întâlnesc arcul IJ respectiv în M și N.

Cu metoda aproximațiilor succesive, vom determina valoarea în punctul P a matricii integrale căutate.

Vom alege ca primă valoare apropiată a matricei integrale $Z(x, y)$, soluția Z_0 a sistemului

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x \partial y} = \Phi, \tag{61}$$

care satisface aceleași condiții inițiale, adică este nulă pe IJ împreună cu derivatele sale parțiale prime. Expresia lui Z_0 va fi

$$Z_0 = \iint_{PMN} \Phi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

integrala dublă fiind întinsă la triunghiul mixtiliniu PMN. Cu ipoteza referitoare la poziția lui P, această expresie satisface sistemul (61) și cum avem

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \int_N^P \Phi(x, \eta)\, d\eta, \quad \frac{\partial Z_0}{\partial y} = \int_M^P \Phi(\xi, y)\, d\xi,$$

derivatele parțiale $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$, $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$ se vor anula ca și Z_0 pe arcul IJ.

Trecând mai departe, vom determina matricile integrale $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m, \ldots$ ale sistemelor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial y} + A \dfrac{\partial Z_0}{\partial x} + B \dfrac{\partial Z_0}{\partial y} + C Z_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 Z_2}{\partial x \partial y} + A \dfrac{\partial Z_1}{\partial x} + B \dfrac{\partial Z_1}{\partial y} + C Z_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 Z_m}{\partial x \partial y} + A \dfrac{\partial Z_{m-1}}{\partial x} + B \dfrac{\partial Z_{m-1}}{\partial y} + C Z_{m-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{62}$$

care se anulează pe IJ împreună cu derivatele lor parțiale prime.

Să arătăm că seria matricială

$$Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_m + \ldots \tag{63}$$

este absolut şi uniform convergentă în dreptunghiul D, împreună cu seriile obţinute din ea derivând parţial fiecare termen în raport cu x şi y.

Pentru aceasta, fie M maximul valorilor absolute ale elementelor lui A, B, C, Φ în D şi L maximul valorilor absolute ale elementelor matricilor

$$Z_0, \frac{\partial Z_0}{\partial x}, \frac{\partial Z_0}{\partial y}, \text{ tot în } D.$$

Din primul sistem (62), deducem

$$Z_1 = -\iint_{PMN} \left(A(\xi, \eta) \frac{\partial Z_0}{\partial \xi} + B(\xi, \eta) \frac{\partial Z_0}{\partial \eta} + C(\xi, \eta) Z_0 \right) d\xi d\eta$$

şi înlocuind elementele matricilor care figurează în integrala dublă cu L sau M şi luând ca domeniu de integrare dreptunghiul D_1 definit de relaţiile $a < \xi < x$ şi $\alpha < \eta < y$, care este mai mare decât triunghiul mixtiliniu PMN rezultă că pentru valoarea absolută a matricei Z_1, putem scrie

$$|Z_1| < 3n^{\frac{3}{2}} LM(x-a)(y-\alpha) < 3n^{\frac{3}{2}} LM \frac{(x+y-a-\alpha)}{2!}$$

şi în mod analog, obţinem

$$\left|\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right| < 3n^{\frac{3}{2}} LM(x+y-a-\alpha).$$

In virtutea celorlalte sisteme (62), se poate arăta apoi, ca şi în cazul problemei precedente, că în D avem

$$|Z_m| < 3n^{\frac{3m}{2}} LMP^{m-1} \frac{(x+y-a-\alpha)^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\left|\frac{\partial Z_m}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial Z_m}{\partial y}\right| < 3n^{\frac{3m}{2}} LMP^{m-1} \frac{(x+y-a-\alpha)^m}{m!},$$

P fiind un număr pozitiv convenabil ales. Aceasta demonstrează convergenţa absolută şi uniformă în domeniul D a seriei (63) şi a seriilor obţinute din ea prin derivări parţiale.

Notând cu $Z(x, y)$ suma seriei (63) se arată apoi ca şi în cazul unei singure ecuaţii că ea este o matrice funcţională, soluţie regulată a sistemului $L(Z) = \Phi$, care satisface condiţiile iniţiale impuse şi că ea este singura soluţie regulată în D.

Problema lui Cauchy *admite deci o soluţie şi această soluţie este unică.*

19. **Extensiunea metodei lui Riemann.** Problemele preliminare tratate ne vor fi utile acum pentru a prezenta cu toată rigoarea extensiunea metodei lui Riemann relativă la problema lui Cauchy. Algoritmul matricilor ne va permite să facem expunerea într'un mod extrem de succint şi totodată să introducem în mod natural şi în această problemă, integrale în sensul lui Volterra.

Să considerăm din nou problema lui Cauchy pentru sistemul

$$L(Z) = \Phi, \tag{64}$$

presupunând că pe arcul IJ al curburei Γ se cunosc valorile lui Z și $\frac{\partial Z}{\partial x}$, aceste valori fiind funcții continue. Vom păstra aceleași ipoteze și notații ca la paragraful precedent.

Să asociem lui (64) sistemul omogen

$$L(Z) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + CZ = 0$$

și să considerăm, odată cu acesta, sistemul său transpus

$$\widetilde{L}(Z) = \frac{\partial^2 \widetilde{Z}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial x}\widetilde{A} + \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial y}\widetilde{B} + \widetilde{Z}\widetilde{C} = 0,$$

unde am notat cu $\widetilde{M}$ transpusa matricei M și deci în care $\widetilde{Z}$ este o matrice cu o linie.

Să considerăm de asemenea sistemul adjunct al sistemului $L(Z) = 0$, anume

$$L^*(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{A}U) - \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{B}U) + \widetilde{C}U = 0.$$

Prin integrări prin părți succesive, se poate obține imediat relația fundamentală

$$\widetilde{L}(Z)U - \widetilde{Z}L^*(U) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \widetilde{A}U\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial x} + \widetilde{Z}\widetilde{B}\right)U\right] \quad (65)$$

în care U este o matrice funcțională oarecare cu o coloană sau pătrată. In cele ce urmează, noi vom presupune că în relația precedentă U este o matrice pătrată (evident, de ordinul n).

In relația (65) să luăm pe Z egală cu matricea integrală cu o coloană $Z(x, y)$ a sistemului (64), care satisface condițiile lui Cauchy și a cărei existență și unicitate am demonstrat-o la Nr. 18, iar pe U, egală cu matricea pătrată $U(x, y)$, soluție regulată a sistemului adjunct $L^*(U) = 0$, în dreptunghiul definit de relațiile $a \leqslant x \leqslant b$ și $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. Aplicând formula lui Green în triunghiul mixtiliniu PMN și ținând seamă că prin ipoteză $\widetilde{L}(Z) = \widetilde{\Phi}$ și $L^*(U) = 0$, deducem că:

$$\iint_{PMN} \widetilde{\Phi} U d\xi d\eta + \int_{MN} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \widetilde{A}U\right)d\eta + \left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \xi} + \widetilde{Z}\widetilde{B}\right)U d\xi + \quad (66)$$

$$+ \int_{NP} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \widetilde{A}U\right)d\eta + \int_{PM}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \xi} + \widetilde{Z}\widetilde{B}\right)U d\xi = 0,$$

unde în toate matricele funcționale care figurează mai sus, variabilele x și y sunt înlocuite cu ξ și η.

In formula fundamentală precedentă, integrala dublă și cea curbilinie sunt evident cunoscute odată cu Z și U. Pentru a utiliza ideea lui Riemann,

trebue să alegem în mod convenabil matricea integrală U a sistemului adjunct, astfel că să dispară integralele de-a-lungul lui NP şi PM care nu se pot calcula din cauză că ele depind de valorile lui Z sau $\frac{\partial Z}{\partial x}$ pe dreptele considerate. Integrala de-a-lungul lui PM se mai poate însă scrie

$$\int_{PM}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \xi}+\widetilde{Z}\widetilde{B}\right)Ud\xi=\left(\widetilde{Z}U\right)_P^M-\int_{PM}\widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}-\widetilde{B}U\right)d\xi$$

şi înlocuind această expresie în formula (66), ea va deveni

$$\begin{aligned}&\iint_{PMN}\widetilde{\Phi}\,Ud\xi\,d\eta+\int_{MN}\widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}-\widetilde{A}U\right)d\eta+\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \xi}+\widetilde{Z}\widetilde{B}\right)Ud\xi+\\&+\int_{NP}\widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}-\widetilde{A}U\right)d\eta-\int_{PM}\widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}-\widetilde{B}U\right)d\xi+\left(\widetilde{Z}U\right)_P^M=0\end{aligned}\tag{67}$$

Să alegem acum matricea integrală $U(\xi,\eta)$ a sistemului adjunct, astfel încât să avem

$$\frac{\partial}{\partial \xi}U(\xi,y)=\widetilde{B}(\xi,y)\,U(\xi,y),\frac{\partial}{\partial \eta}U(x,\eta)=\widetilde{A}(x,\eta)\;U(x,\eta)$$

Deoarece $U(\xi,y)$ şi $U(x,\eta)$ sunt respectiv valorile matricii integrale $U(\xi,\eta)$ pe PM şi PN, dacă presupunem în plus că valoarea lui U în P este egală cu matricea unitate, adică $U(x,y)=1$, atunci urmează că pe dreptele caracteristice menţionate, vom avea

$$U(\xi,y)=\int_x^{\xi}\widetilde{B}(\xi,y)\,d\xi,\;\;U(x,\eta)=\int_y^{\eta}\widetilde{A}(x,\eta)\,d\eta,$$

integralele precedente fiind integrale stângi în sensul lui Volterra.

Determinarea matricii $U(\xi,\eta)$ cere deci rezolvarea unei probleme a lui Darboux-Picard pentru sistemul adjunct, a cărei soluţie am demonstrat că există şi este unică. Vom nota cu $U(x,y;\xi,\eta)$ matricea funcţională astfel determinată, care depinde de două perechi de variabile (x,y), (ξ,η) şi o vom numi prin extensiune *matricea funcţională a lui Riemann* (relativă la sistemul adjunct şi la punctul P).

Odată astfel aleasă matricea U, integralele de-a-lungul lui PM şi NP din formula (67) vor dispare şi vom obţine imediat valoarea lui $\widetilde{Z}$ în punctul $P(x,y)$ sau trecând la transpusa sa, care este matricea iniţială Z, vom putea scrie

$$Z(P)=(\widetilde{U}Z)_M+\int_{MN}\left(\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \eta}-\widetilde{U}A\right)Zd\eta+\widetilde{U}\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}+BZ\right)d\xi+\iint_{PMN}\widetilde{U}\Phi\,d\xi\,d\eta\tag{68}$$

în care nu intervin decât valorile lui Z şi $\frac{\partial Z}{\partial x}$ pe arcul IJ al curbei Γ şi care procură deci soluţia problemei.

Ținând seamă de relația evidentă

$$\int_{NM} \frac{\partial(\widetilde{U}Z)}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial(\widetilde{U}Z)}{\partial\eta} d\eta = (\widetilde{U}Z)_M - (\widetilde{U}Z)_N$$

formula (68) poate fi înlocuită cu formula

$$Z(P) = (\widetilde{U}Z)_N + \int_{NM} \left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\xi} - \widetilde{U}B\right) Z d\xi + \widetilde{U}\left(\frac{\partial Z}{\partial\eta} + AZ\right) d\eta + \iint_{PMN} \widetilde{U}\,\Phi\, d\xi\, d\eta,$$

care depinde de valorile lui Z și $\frac{\partial Z}{\partial\eta}$ pe arcul IJ. Adunând apoi această ultimă formulă cu formula (68), obținem pentru $Z(P)$ o expresie mai simetrică, dar care depinde de valorile lui Z și ale ambelor sale derivate parțiale de-a-lungul lui IJ.

Ar trebui acum să facem așa numita sinteză a soluției obținute, adică să arătăm că matricea $Z(P)$ dată de formula (68) verifică sistemul inițial și condițiile date, însă aceasta nu mai este necesar, deoarece am admis în cazul de față aceleași ipoteze ca și la Nr. 18, când am demonstrat existența și unicitatea soluției.

Ca în toate problemele relative la ecuații hiperbolice normale, se observă pe formula rezolvantă (68) că valoarea matricei integrale Z în punctul P depinde numai de valorile lui Z și $\frac{\partial Z}{\partial\xi}$ pe arcul MN, determinat pe curba Γ de dreptele caracteristice care trec prin P.

De asemenea, este clar că, dacă în relația (65) am fi presupus că U este o matrice cu o coloană, atunci calculele noastre cereau să introducem serii matrizante în loc de integrale în sensul lui Volterra, iar matricea funcțională a lui Riemann $U(x, y; \xi, \eta)$ ar fi fost și ea atunci tot o matrice cu o coloană.

20. Proprietatea de schimb a matricii $(U\,x, y; \xi, \eta)$. Integrările prin părți care am spus că ne conduc imediat la relația fundamentală (65), nu presupun decât că înmulțirea matricilor care figurează în ea este posibilă, astfel că această relație este valabilă și în cazul când Z este o matrice pătrată de ordinul n.

Să alegem, în această relație, pentru U o matrice integrală pătrată a sistemului adjunct $L^*(U) = 0$ și pentru Z o matrice integrală pătrată a sistemului $L(Z) = 0$ și să aplicăm formula lui Green dreptunghiului în care două vârfuri opuse sunt $P(x, y)$ și $P_1(x_1, y_1)$, aceste puncte fiind de exemplu astfel situate, încât să avem $a \leqslant x_1 < x \leqslant b$ și $\alpha \leqslant y_1 < y \leqslant \beta$. Dacă M și N sunt respectiv intersecțiile paralelei din P la Ox cu paralela din P_1 la O_y și a paralelei din P_1 la Ox cu paralela din P la Oy, atunci formula lui Green aplicată dreptunghiului PMP_1N și matricilor U și Z se scrie

$$\int_{NP} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta} - \widetilde{A}U\right) d\eta + \int_{PM} \left(\frac{\partial\widetilde{Z}}{\partial\xi} + \widetilde{Z}\widetilde{B}\right) U d\xi +$$

$$+ \int_{MP_2} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta} - \widetilde{A}U\right) d\eta + \int_{P_1N} \left(\frac{\partial\widetilde{Z}}{\partial\xi} + \widetilde{Z}\widetilde{B}\right) U d\xi = 0$$

Efectuând două integrări prin părţi, această relaţie devine

$$\int_{NP} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - A\,U\right) d\eta + \left(\widetilde{Z}\,U\right)_P^M - \int_{PM} \widetilde{Z}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \widetilde{B}\,U\right) d\xi +$$

$$+ \left(\widetilde{Z}\,U\right)_M^{P_1} - \int_{MP_1}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \eta} + \widetilde{Z}\,\widetilde{A}\right) U d\eta + \int_{P_1N}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial \xi} + \widetilde{Z}\,\widetilde{B}\right) U d\xi = 0\,.$$

Să presupunem acum că U este chiar matricea funcţională a lui Riemann $U(x, y; \xi, \eta)$, relativă la sistemul adjunct $L^*(U) = 0$ şi la punctul P şi că Z este de asemenea matricea funcţională a lui Riemann $Z(x_1, y_1; \xi, \eta)$, relativă la sistemul $L(Z) = 0$ şi la punctul P_1.

Relaţiile care definesc pe $U(x, y; \xi, \eta)$ fac să dispară integralele din formula de mai sus de-a-lungul lui NP şi PM.

Dacă observăm că relaţiile care definesc pe $Z(x_1, y_1; \xi, \eta)$ se deduc din cele relative la $U(x, y; \xi, \eta)$ schimbând punctul P cu P_1 şi pe $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{B}$ respectiv cu $-A$ şi $-B$, deducem că şi integralele de-a-lungul lui MP_1 şi P_1N vor dispare, astfel că la sfârşit obţinem egalitatea remarcabilă

$$\widetilde{Z}(x_1, y_1; x, y) = U(x, y; x_1, y_1)$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$Z(x, y; x_1, y_1) = \widetilde{U}(x_1, y_1; x, y). \tag{69}$$

Putem deci spune că *matricea funcţională a lui Riemann îşi păstrează valoarea, dacă schimbăm cele două puncte de care ea depinde şi sistemul dat cu transpusul sistemului său adjunct.*

Evident că, dacă sistemul $L(Z) = 0$ este cu invarianţi egali şi simetrici (scris sub forma redusă), deci dacă el este autoadjunct, atunci matricea funcţională a lui Riemann îşi va păstra valoarea *când schimbăm cele două puncte de care ea depinde şi pe ea, cu transpusa sa.*

In particular, pentru aceste sisteme, cele două proprietăţi eventuale ale matricii lui Riemann, simetria matricială şi simetria în raport cu cele două puncte, sunt astfel că *una dintre ele atrage pe cealaltă.*

Din relaţia de schimb (69) rezultă că, dacă am determinat matricea funcţională a lui Riemann U, relativă la sistemul adjunct, atunci putem determina imediat şi matricea funcţională a lui Riemann Z, relativă la sistemul iniţial şi deci vom putea rezolva problema lui Cauchy şi pentru sistemul adjunct, utilizând matricea Z.

Prin urmare, *integrarea sistemului iniţial şi integrarea sistemului său adjunct sunt două probleme echivalente*, proprietate complet analoagă cu aceea relativă la o singură ecuaţie.

IV. ŞIRURI LAPLACE TERMINATE (CAZUL ORDINAR)

21. In cele ce urmează, vom studia sistemele (L) al căror şir al lui Laplace $[L]$ este terminat *în cazul ordinar* şi care deci se pot integra prin serii matrizante. Vom arăta de asemenea cum se pot construi unele dintre aceste sisteme, punând astfel în evidenţă o clasă interesantă de sisteme (L).

Vom distinge evident două cazuri: *șiruri* $[L]$ *terminate într'un sens și șiruri* $[L]$ *terminate în ambele sensuri.*

Din examinarea pe care o vom face, va apare clar că orice sistem al șirului $[L]$ se va putea integra prin serii matrizante, dacă în acest șir există cel puțin un sistem care are această proprietate.

22. Șiruri terminate într'un sens. Să presupunem că șirul lui Laplace $[L]$ se termină în cazul ordinar și în sensul variabilei y la sistemul (L_i), obținut prin i transformări Laplace în sensul variabilei respective și că prin urmare avem $H_i = 0$. Am menționat mai înainte că în acest caz sistemul (L_i), deci și sistemul (L), se poate integra prin serii matrizante. Să examinăm mai în de aproape această posibilitate prin calcule efective.

Scriind sistemul (L_i) sub forma echivalentă

$$L_i(Z_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + A_i\right) Z_i - H_i Z_i = 0, \tag{70}$$

în virtutea ipotezei $H_i = 0$, integrarea sa se reduce la integrarea sistemelor de primul ordin

$$\frac{\partial Z_{i+1}}{\partial x} + B_i Z_{i+1} = 0, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial y} + A_i Z_i = Z_{i+1}$$

Procedând absolut analog ca în cazul $H = 0$, adică utilizând serii matrizante, vom obține integrala generală a sistemului sub forma

$$Z_i = M\left(X + \int NY\, dy\right), \tag{71}$$

M și N fiind matrici pătrate nesingulare într'un anumit domeniu D, cu elementele funcții determinate de x și y, iar X și Y fiind matrici arbitrare cu o coloană care depind respectiv numai de x sau numai de y.

Ținând seama de formula (38), care spune că Z este o funcție lineară și omogenă de Z_i și de derivatele sale în raport cu x până la ordinul i, deducem forma integralei generale a sistemului (L), anume

$$\begin{aligned} Z = M_0\left(X + \int NY\, dy\right) + M_1\left(X' + \int \frac{\partial N}{\partial x} Y\, dy\right) + \dots \\ \dots + M_i\left(X^{(i)} + \int \frac{\partial^i N}{\partial x^i} Y\, dy\right) \end{aligned} \tag{72}$$

unde $M_0, M_1, \dots, M_i$ sunt matrici pătrate cu elementele funcții determinate de x și y, dintre care M_i este sigur nesingulară în D, iar N, X, Y sunt matricile din formula (71) și unde am notat cu $X^{(j)}$ derivata ordinară de ordinul j a matricii X.

Se observă că, în formula (72), matricea arbitrară Y figurează de i ori sub semnul integral. Luând matricea Y nulă, vom obține o integrală mai puțin generală, în care figurează numai matricea arbitrară X și în care nu intervine semnul cuadraturii. Această integrală este

$$Z = M_0 X + M_1 X' + \dots + M_i X^{(i)} \tag{73}$$

Să arătăm acum că, *dacă sistemul* (L) *admite o soluție de forma precedentă, în care* X *este o matrice arbitrară cu o coloană, iar* $M_0, M_1, \dots M_i$ *sunt matrici*

pătrate determinate dintre care M_i este nesingulară într'un domeniu D şi dacă niciunul din invarianţii matriciali H, H_1, ..., H_{i-1} nu este singular în D, atunci şirul lui Laplace $[L]$ se termină în cazul ordinar şi în sensul variabilei y, cel mult la sistemul (L_i).

Pentru aceasta, să înlocuim expresia (73) în sistemul $L(Z) = 0$. Vom obţine o relaţie de forma

$$Q_0 X + Q_1 X' + \ldots + Q_{i+1} X^{(i+1)} = 0,$$

în care Q_0, Q_1, ..., Q_{i+1} sunt matrici pătrate bine determinate. Condiţia precedentă fiind verificată, pentru orice matrice X, deducem că vom avea în mod necesar

$$Q_0 = Q_1 = \ldots = Q_{i+1} = 0,$$

deoarece, în caz contrar, dând lui y o anumită valoare particulară care nu anulează toate matricile Qj, elementele matricii X ar verifica un sistem diferenţial linear şi nu ar mai putea fi alese arbitrare.

Calculul coeficienţilor Q_{i+1} şi Q_i este imediat. Vom avea

$$Q_{i+1} = \frac{\partial M_i}{\partial y} + A M_i = 0, \quad Q_i = \frac{\partial M_{i-1}}{\partial y} + A M_{i-1} + L(M_i) = 0.$$

Inlocuind în a doua relaţie precedentă pe $\frac{\partial M_i}{\partial y}$ cu expresia sa dedusă din prima relaţie, urmează că

$$\frac{\partial M_{i-1}}{\partial y} + A M_{i-1} = H M_i.$$

In virtutea relaţiilor de mai sus, verificate de M_i şi M_{i-1}, rezultă că, dacă facem transformarea lui Laplace

$$Z_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} + AZ,$$

soluţia sistemului transformat (L_1) corespunzătoare soluţiei (73) a sistemului (L), nu va conţine decât derivatele matricii arbitrare X până la ordinul $i - 1$ cel mult. Coeficientul lui $X^{(i-1)}$ fiind HM_i şi H şi M_i fiind nesingulare, acest coeficient va fi tot o matrice nesingulară, sau va fi nul numai dacă $H = 0$.

Prin urmare, în virtutea ipotezei det. $H_j \neq 0$ $(j \leqslant i - 1)$, aplicarea repetată a transformării lui Laplace în sensul variabilei y ne va conduce sau la un sistem (L_j), de indice $j < i$ în care invariantul matricial H_j va fi nul, sau vom da peste sistemul (L_i), care va admite o soluţie particulară de forma MX, unde M este o matrice nesingulară. In acest din urmă caz, conform cu o propoziţie anterioară, vom avea însă $H_i = 0$.

Deci, în ambele cazuri posibile, cel mult după i transformări Laplace, vom obţine un sistem care se integrează prin serii matrizante, ceea ce demonstrează propoziţia enunţată. Această propoziţie poate fi completată cu o observare.

Prin extensiune, vom spune după D a r b o u x [2][1]), despre o expresie de forma (73) în care intervin derivatele matricii arbitrare X până la ordinul i

[1]) p. 11

și în care matricea M_i este nesingulară (într'un domeniu D), că *este de rangul* $i+1$ *în raport cu* x, dacă prin introducerea altei matrici arbitrare X_1, funcție de X și de derivatele sale, ea nu se poate pune sub o formă analoagă în care să intervină derivatele lui X_1 până la un ordin mai mic decât i. Cu această definiție, este clar că dacă șirul lui Laplace $[L]$ se termină în cazul ordinar la sistemul (L_i) de indice $i>0$, atunci sistemul (L) admite o soluție particulară de forma (73) și *această soluție este în mod necesar de rang* $i+1$ în *raport cu* x.

In adevăr, dacă soluția (73) ar putea fi adusă la o expresie de aceeași formă, dar de rang $j+1$ $(j<i)$, atunci conform propoziției precedente, șirul $[L]$ s'ar termina în cazul ordinar cel mult la sistemul (L_j), ceea ce este contrar ipotezei.

Rezultă de aici că, dacă șirul $[L]$ se termină în cazul ordinar la sistemul (L_i), atunci sistemul (L_{i-j}) va admite o soluție de rang $j+1$ în raport cu x.

Evident că schimbând rolul variabilelor x și y, vom obține propoziții analoage pentru sistemele (L) al căror șir Laplace asociat este terminat în cazul ordinar și în sensul variabilei x.

De exemplu, dacă șirul lui Laplace $[L]$ este terminat în cazul ordinar la sistemul (L_{-j}), atunci integrala generală a sistemului (L) se va obține prin serii matrizante și în virtutea relației (39) va fi reprezentată printr'o formulă analoagă cu formula (72), în care matricea arbitrară X va figura de j ori sub semnul integral. Sistemul (L) va admite o integrală mai puțin generală de forma

$$Z = N_0 Y + N_1 Y' + \ldots + N_j Y^{(j)} \tag{74}$$

de rang $j+1$ în raport cu y și dacă invarianții matriciali K, $K_{-1}, \ldots, K_{-j+i}$ nu sunt singulari în domeniul D, această proprietate este caracteristică pentru sistemele (L) al căror șir $[L]$ este terminat în cazul ordinar cel mult la sistemul (L_{-j}).

Rezultatele obținute mai sus sunt extensiuni ale unor propoziții analoage relative la o singură ecuație hiperbolică care sunt datorite lui Laplace și Darboux [2][1], [4][2]).

23. Șiruri terminate în ambele sensuri. Să presupunem acum că șirul lui Laplace $[L]$ este terminat în cazul ordinar, în sensul variabilei y la sistemul (L_i) și în sensul variabilei x la sistemul (L_{-j}), unde $i,\ j>0$.

In baza rezultatelor precedente, integrala generală a sistemului (L) va avea forma

$$Z = M_0 X + M_1 X' + \ldots + M_i X^{(i)} + N_0 Y + N_1 Y + \ldots N_j Y^{(j)} \tag{75}$$

unde niciuna dintre matricile arbitrare X, Y nu mai figurează sub semnul integral, iar $M_0, \ldots, M_i$, $N_0, \ldots, N_j$, sunt matrici pătrate bine determinate, dintre care M_i și N_j sunt nesingulare în domeniul D. Această integrală generală, care se obține evident tot cu ajutorul seriilor matrizante, este de rang $i+1$ în raport cu x și de rang $j+1$ în raport cu y și dacă invarianții matriciali H, $H_1, \ldots, H_{i-1}$. K, $K_{-1} \ldots, K_{-j+1}$ nu sunt singulari în D, ea poate să caracterizeze prin forma sa sistemele (L), al căror șir Laplace este terminat în ambele sensuri și în cazul ordinar, cel mult la sistemele (L_i) și (L_{-j}).

[1]) p. 35.
[2]) p. 12.

Este remarcabil faptul că oricare din sistemele şirului lui Laplace

$$(L_{-j}), \ldots, (L_{-1}), \quad (L), (L_1), \ldots, (L_i), \ldots \qquad [L]$$

admite ca integrală generală o expresie de aceeaşi formă, numai că rangurile în raport cu x sau cu y se schimbă. Când trecem dela un sistem (L_k) la sistemul vecin (L_{k+1}), rangul soluţiei (75) în raport cu x se micşorează cu o unitate, iar rangul în raport cu y se măreşte cu o unitate, astfel că, dacă prin această trecere, rangurile se schimbă, totuşi *numărul* $i + j$ *este un invariant* faţă de ambele transformări ale lui Laplace, acest rezultat fiind evident valabil pentru orice sistem al şirului $[L]$.

24. Să mai semnalăm o proprietate a sistemelor (L) al căror şir Laplace este terminat în cazul ordinar. Această proprietate este relativă la problema lui Cauchy.

Dacă reuşim să rezolvăm problema lui Cauchy relativă la unul din sistemele şirului lui Laplace $[L]$, presupus oarecare, atunci putem rezolva aceeaşi problemă pentru orice sistem al şirului $[L]$. Este suficient, evident, să arătăm că această aserţiune este valabilă pentru două sisteme consecutive ale şirului $[L]$, pe care le putem presupune, fără să restrângem generalitatea, că sunt sistemele (L) şi (L_1).

Să considerăm deci problema lui Cauchy, în cazul când este corect pusă, pentru sistemul (L) şi curba Γ, de-a-lungul căreia sunt date valorile lui Z şi $\frac{\partial Z}{\partial x}$. Transformarea lui Laplace în sensul variabilei y

$$Z_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} + AZ,$$

care transformă sistemul (L) în (L_1) ,arată că vom cunoaşte pe Γ valoarea lui Z_1, deoarece expresia lui $\frac{\partial Z}{\partial y}$ poate fi considerată de asemenea cunoscută pe Γ. Insă sistemul (L) se mai poate scrie

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} + BZ_1 = HZ,$$

astfel că vom cunoaşte pe Γ şi pe $\frac{\partial Z_1}{\partial x}$. Suntem deci conduşi la problema lui Cauchy pentru sistemul (L_1) şi aceeaşi curbă Γ. Utilizând transformarea lui Laplace în sensul variabilei x, se poate arăta, invers, că plecând dela problema lui Cauchy pentru sistemul (L_1) dăm peste aceeaşi problemă pentru sistemul (L), relativă la aceeaşi curbă Γ, astfel că problema lui Cauchy se rezolvă în acelaşi timp pentru două sisteme consecutive, deci pentru două sisteme oarecare.

Să presupunem acum că şirul lui Laplace $[L]$ asociat sistemului (L), este terminat în cazul ordinar (într'un sens sau în ambele sensuri) şi pentru a fixa ideile, fie (L_i) sistemul sau unul din sistemele care termină şirul $[L]$, de exemplu la dreapta, indicele i fiind deci pozitiv.

Problema lui Cauchy pentru sistemul (L) şi curba Γ cere evident cunoaşterea pe Γ a lui Z şi $\frac{\partial Z}{\partial x}$. Vom cunoaşte însă atunci pe Γ — după observarea

precedentă — și pe Z_i și $\frac{\partial Z_i}{\partial x}$. Utilizând aceste date, vom putea determina matricile arbitrare X și Y ce figurează în integrala generală (71), obținută din integrala succesivă prin serii matrizante a sistemelor de primul ordin echivalente cu sistemul (70). Odată Z_i determinat, vom obține pe Z cu ajutorul formulei (38), astfel că putem spune că *pentru sistemele* (L) *cu șirul Laplace terminat în cazul ordinar, problema lui Cauchy se rezolvă prin serii matrizante.*

25. O clasă de sisteme cu șiruri terminate. Ne propunem să construim o clasă de sisteme (L) al căror șir Laplace asociat este terminat în cazul ordinar într'un sens sau în ambele sensuri și deci care se integrează prin serii matrizante.

Pentru a obține un șir Laplace terminat într'un sens în cazul ordinar, este evident suficient să alegem un sistem inițial (L) cu un invariant matricial nul și apoi să aplicăm acestui sistem una din transformările lui Laplace. Vom obține astfel un șir în general nelimitat într'un sens.

De exemplu, pentru a avea $H = 0$, va fi suficient să luăm matricele A și B arbitrare, fiindcă relația

$$H = A_x + BA - C = 0$$

ne va determina pe C. Transformarea lui Laplace în sensul variabilei x n va procura apoi un șir în general nelimitat la stânga și terminat la dreapta în cazul ordinar, la sistemul inițial (L).

Este mai interesant de construit sistemele (L) al căror șir asociat $[L]$ se termină în cazul ordinar în ambele sensuri. Să presupunem că șirul lui Laplace (L), corespunzător sistemului (L) pe care vrem să-l construim, se termină în cazul ordinar, în sensul variabilei y la sistemul (L_i) și în sensul variabilei x la sistemul (L_{-j}), care admite deci o soluție de forma (75) de rang $i + 1$ în raport cu x și de rang $j + 1$ în raport cu y.

Inainte de a construi sistemul (L), vom încerca să construim, ca și în cazul precedent, unul din sistemele terminale, de exemplu (L_i). Ținând seamă că numărul $i + j$ este un invariant când trecem dela sistemul (L) la sistemul (L_i) va fi suficient să impunem condiția ca sistemul (L_i), care are invariantul $H_i = 0$, să admită o soluție de rang 1 în raport cu x și de rang $j + 1$ în raport cu y.

Putem impune această condiție după ce am adus sistemul (L_i) la forma sa redusă, obținută după cum s'a arătat mai înainte, făcând o transformare convenabilă asupra matricei Z, transformare care nu schimbă rangul în raport cu x sau y, al soluției noastre. Vom considera deci în toată generalitatea că sistemul (L_i) este de forma

$$L_i(Z_i) = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x \partial y} + B_i \frac{\partial Z_i}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i\right)\frac{\partial Z_i}{\partial y} = 0 \qquad (76)$$

Din sistemul precedent, integrând cu ajutorul seriei matrizante, deducem imediat

$$\frac{\partial Z_i}{\partial y} = A Y_1, \qquad (77)$$

unde Y_1 este o matrice arbitrară cu o coloană cu elementele funcții numai de

y, iar A este o matrice funcţională nesingulară într'un domeniu D, a cărei derivată stângă în sensul lui Volterra este

$$\frac{dA}{dx} = - B_i \tag{78}$$

şi care se poate deci deduce printr'o integrare în sensul lui Volterra.

Notând $i + j = p$, vom impune condiţia ca sistemul (77) să admită o soluţie de forma

$$Z_i = X + N_0 Y + N_1 Y' + \ldots + N_p\, Y^{(p)} \tag{79}$$

$N_0, N_1, \ldots, N_p$, fiind matrici pătrate cu elementele funcţii determinate de x şi y, dintre care N_p este nesingulară în domeniul D, iar X şi Y fiind matrici arbitrare cu o coloană care depind respectiv numai de x sau y.

Inlocuind expresia (79) în sistemul (77), deducem că trebue să avem în mod necesar

$$P_0 Y + P_1 Y' + \ldots + P_{p+1} Y^{(p+1)} = A\, Y_1,$$

matricile pătrate $P_0, \ldots, P_{p+1}$ fiind bine determinate. Dând lui x o valoare numerică oarecare, rezultă că trebue să avem

$$Y_1 = \Lambda_0 Y + \Lambda_1 Y' + \ldots + \Lambda_{p+1}\, Y^{(p+1)} \tag{80}$$

această relaţie fiind valabilă, oricare ar fi matricile arbitrare Y şi Y_1, iar $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+1}$, fiind matrici pătrate bine determinate care depind numai de y.

Ţinând seamă de expresiile lui Z_i şi Y_1, deducem că trebue să existe relaţia

$$\frac{\partial}{\partial y}(N_0 Y + N_1 Y' + \ldots + N_p\, Y^{(p)}) = A\,(\Lambda_0 Y + \Lambda_1 Y' + \ldots + \Lambda_{p+1} Y^{(p+1)})$$

pentru orice matrice Y. Urmează că vom avea, în mod necesar

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_0}{\partial y} = A\Lambda_0 \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} + N_0 = A\Lambda_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial N_p}{\partial y} + N_{p-1} = A\Lambda_p \\ N_p = A\Lambda_{p+1} \end{cases} \tag{81}$$

Eliminând matricile $N_0, N_1, \ldots, N_p$, rezultă că matricea A va verifica relaţia diferenţială

$$A\Lambda_0 - \frac{\partial}{\partial y}(A\Lambda_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(A\Lambda_2) + \ldots + (-1)^{p+1} \frac{\partial^{p+1}}{\partial y^{p+1}}(A\Lambda_{p+1}) = 0 \tag{82}$$

care este lineară, omogenă şi de ordinul $p + 1$ în raport cu A, toţi coeficienţii fiind matrici funcţionale multiplicative la dreapta, care depind numai de y.

Cu aceste condiții necesare impuse, este clar că pentru a obține sistemul (L_i), va trebui să ne dăm mai întâi $p+2$ matrici funcționale arbitrare Λ_0, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+1}$, care depind numai de y și apoi să integrăm ecuația diferențială matriceală (82), care ne va procura pe A iar din relația (78) vom obține pe B_i. Relațiile (81) ne vor determina matricele N_0, N_1, ..., N_p, ale căror expresii odată cunoscute ne vor furniza integrala generală (79) a sistemului (L_i).

Pe urmă, aplicând transformarea lui Laplace în sensul variabilei x, vom obține din sistemul (L_i), sistemul inițial (L) și din expresia (79), integrala generală a sistemului (L).

Pentru a pune în evidență o clasă destul de generală de sisteme (L) care au proprietatea anunțată, să presupunem că am reușit să determinăm $p+1$ soluții particulare Y_1^*, Y_2^*, ..., Y_{p+1}^* ale ecuației matriciale lineare (82), aceste soluții fiind matrici pătrate care depind numai de y, pe care le vom presupune nesingulare într'un domeniu D. Evident că și expresia

$$A = X_1^* Y_1^* + \ldots + X_{p+1}^* Y_{+1}^* \tag{83}$$

unde X_i^* sunt matrici pătrate arbitrare care depind numai de x, va fi o soluție a aceleiași ecuații.

Să arătăm că, dacă A are expresia precedentă, atunci putem scrie integrala generală a sistemului (L_i) fără niciun semn de cuadratură, dacă soluțiile Y_1^* au fost convenabil alese.

In adevăr, din sistemul (77) rezultă că integrala generală a sistemului (76) are forma

$$Z_i = X + \int A Y_1 dy,$$

X fiind o matrice arbitrară cu o coloană care depinde numai de x. Inlocuind pe A cu expresia sa, deducem

$$Z_i = X + X_1^* \int Y_1^* Y_1 dy + X_2^* \int Y_2^* Y_1 dy + \ldots + X_{p+1}^* \int Y_{p+1}^* Y_1 dy \tag{84}$$

Vom demonstra că putem alege matricea arbitrară cu o coloană Y_1 astfel încât integralele precedente să fie exprimate explicit în funcție de o nouă matrice arbitrară Y cu o coloană și de derivatele sale până la ordinul p.

Pentru aceasta, vom înlocui întâi pe Y_1 cu $Y_1^{*-1} Y_2'$, unde Y_2 este o altă matrice arbitrară cu o coloană depinzând numai de y. După această înlocuire, prima cuadratură din expresia lui Z_i va dispare și vor mai rămâne integralele

$$\int Y_2^* Y_1^{*-1} Y_2' dy, \ \ldots, \int Y_{p+1}^* Y_1^{*-1} Y_2' dy. \tag{85}$$

Una oarecare din aceste integrale se mai poate însă scrie

$$\int Y_i^* Y_1^{*-1} Y_2' dy = Y_i^* Y_1^{*-1} Y_2 - \int (Y_i^* Y_1^{*-1})' Y_2 dy$$

Presupunând că am ales soluțiile particulare Y_i^* astfel că niciuna din matricile pătrate care înmulțesc pe Y_2 în integralele precedente nu este sin-

gulară în D, vom putea aplica acelaşi procedeu integralelor (85), în care matricea arbitrară este Y_2. Aplicând de p ori aceeaşi transformare, în ipoteza că soluţiile Y_1^*, Y_2^*, ..., Y_{p+1}^* au fost convenabil alese, integralele din expresia (84) se vor exprima în mod explicit în funcţie de o matrice arbitrară Y cu o coloană şi de derivatele sale până la ordinul p.

Trebue să remarcăm însă că, dacă între matricile arbitrare X_i^* avem o relaţie de forma

$$X_{p+1}^* = C_1 X_1^* + \ldots + C_p X_p^*,$$

unde C_1, C_2, ..., C_p sunt matrici pătrate constante, atunci şirul lui Laplace corespunzător sistemului (L_i) se va termina înainte de p operaţii consecutive, deoarece expresia lui A va avea atunci forma

$$A = X_1^* (Y_1^* + C_1 Y_{p+1}^*) + \ldots + X_p^* (Y_p^* + C_p Y_{p+1}^*)$$

adică o expresie în care intervin p matrici funcţii numai de x şi p matrici funcţii numai de y. O observare analoagă se poate face în legătură cu matricile Y_i^*.

Din examinarea precedentă rezultă că, dacă am ales pentru A o expresie de forma (83), în care soluţiile matriciale particulare Y_i^* şi matricile arbitrare X_i^* au expresii convenabile şi dacă şirul lui Laplace $[L]$ nu este terminat în cazul singular, atunci acest şir se va termina în cazul ordinar, în sensul variabilei y cel mult la sistemul (L_i) şi în sensul variabilei x, cel mult la sistemul (L_{-j}), presupunând că sistemul iniţial este sistemul (L), dedus din (L_i) aşa cum s'a menţionat.

Rezultatul precedent poate căpăta o formă mai precisă în cazuri particulare, de exemplu atunci când unul din sistemele care termină şirul $[L]$ este cu invarianţi matriciali egali sau posedă o altă proprietate remarcabilă.

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТИПА ЛАПЛАСА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изучаются системы линейных уравнений с частными производными вида (1)

$$L^\alpha (z) = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x \partial y} + a_\beta^\alpha \frac{\partial z^\beta}{\partial x} + b_\beta^\alpha \frac{\partial z^\beta}{\partial y} + c_\beta^\alpha z^\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

причем $z^1, \ldots, z^n$ являются неизвестными функциями и коэффициенты a_β^α, b_β^α, c_β^α — непрерывными функциями переменных x и y в области D.

Записав систему в матричной форме вида (2), вводят *относительные матричные инварианты* H и K, аналогичные инвариантам Дарбу для одного уравнения, выражения которых суть (3) и (4). Эти инварианты преобразуются посредством линейного преобразования на z^α согласно формулам (7) и посредством замены переменных x и y — согласно фор-

мулам (10). Теория подобных матриц дает в качестве абсолютных инвариантов фундаментальные инварианты матриц H и K.

Предыдущие замечания использованы для того, чтобы получить *сокращенные формы* системы (1). Можно уничтожить коэффициенты c_{β}^{α}, если известны n частных линейно независимых систем интегралов системы (1). При помощи понятия левой производной и левого интеграла матрицы в смысле Вольтерра можно упразднить коэффициенты a_{β}^{α} или b_{β}^{α}. Можно уничтожить коэффициенты a_{β}^{α}, c_{β}^{α} или b_{β}^{α}, c_{β}^{α} лишь при условии, если $H=0$ соответственно $K=0$. Наконец, если $H=K$, можно получить интегрированием левого полного дифференциала матрицы сокращенную форму, не содержащую первых частных производных z^{α}.

Если $H=0$ или $K=0$, то система (1) эквивалентна системам первого порядка (18) соответственно (20), и интегрирование ее производится посредством метода Пеано-Бакера, использывающего матризантные ряды. Были выведены необходимые и достаточные условия для интегрируемости системы этим методом. В случае $H\neq 0$ или $K\neq 0$, предполагая, что эти матрицы являются несингулярными в D, из системы (1), *преобразованиями Лапласа* (24) или (29), получаются системы (26) и (31), являющиеся преобразованными (1) в смысле переменных y и x. Их инварианты H_1, K_1 и H_{-1}, K_{-1} даны формулами (27) и (32). Если $H_1\neq 0$, $K_{-1}\neq 0$ и если эти матрицы являются несингулярными, то метод можно повторить. Продолжая таким образом получаем из начальной системы (L), линейный ряд $[L]$, вообще бесконечный, который также называем *рядом Лапласа*.

Автор говорит, что этот ряд является *конечным в смысле переменной y и в нормальном случае*, если $H_i=0$, *и в особом случае*, *если* $H_i\neq 0$, но $\det. H_i = 0$. Также этот ряд *конечен в смысле переменной x и в нормальном или в особом случае по тому*, *как* $K_{-1}=0$ или $K_{-1}\neq 0$, а $\det K_{-1}=0$.

Дальше изучаются системы инвариантные относительного одного или двух преобразований Лапласа. Для этих систем имеем $H=K$ и их определение требует интегрирования матричного уравнения (41), интегрируемого также использованием понятия левой производной в смысле Вольтерра. Системы (E) вида (42), где B и B' являются перестановочными постоянными матрицами, и которые автор называет *системами Эйлера-Пуассона*, обладают некоторыми замечательными свойствами, которые выводятся как для одного уравнения, из выражений (43) и (45) инвариантов H, K и H_i, K_{-i}. Это позволяет уточнить условия, при которых соответствующий ряд Лапласа конечный. Доказывается, что *инварианты сопряженной системы* (49) *равны* транспонированным инвариантам *системы* (1), *рассматриваемым в обратном порядке*, и становится очевидным, что системы (L) с равными и симметричными матричными инвариантами являются самосопряженными.

Интегрирование системы (L) с граничными условиями, а именно задача Дарбу-Пикара и проблема Коши, произведена методом последовательных приближений, с использованием понятия абсолютного значения матрицы, принадлежащего Фробениусу. Для задачи Коши расширяется метод Римана построением квадратной функциональной матрицы $U(x, \eta; \xi, \eta)$, решение присоединенной системы, существование и единство которой вытекают из задачи Дарбу-Пикара. Для этого пост-

роения используются опять левые интегралы в смысле Вольтерра. Далее получается формула (68). Становится очевидным *свойство замены* матрицы $U(x, y; \xi, \eta)$: *она сохраняет свое значение, если переставить точки, от которых она зависит, и заменить данную систему транспонированной присоединенной системой.*

В последней части изучаются системы (L), ряд Лапласа которых будет конечным в одном или обоих смыслах, но лишь в нормальном случае. Эти системы интегрируемы матризантными рядами, и соответствующая задача Коши может быть разрешена этим же методом. В заключение вводится довольно общий класс системы (L), ряд Лапласа которого будет конечным в обоих смыслах и в нормальном случае.

RECHERCHES SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE DE LAPLACE

(RÉSUMÉ)

On étudie les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles de la forme (1)

$$L^{\alpha}(z) = \frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x \partial y} + a_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial x} + b_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial y} + c_{\beta}^{\alpha} z^{\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

$z^1, \ldots, z^n$ étant les fonctions inconnues et les coefficients a_{β}^{α}, b_{β}^{α}, c_{β}^{α} des fonctions continues des variables x et y dans un domaine D. Après avoir mis le système sous la forme matricielle (2), on introduit *les invariants matriciels relatifs H et K*, analogues aux invariants de Darboux, pour une seule équation et dont les expressions sont (3) et (4). Ces invariants se transforment par une transformation linéaire sur les z^{α} d'après les formules (7) et par un changement des variables x et y, d'après les formules (10). La théorie des matrices semblables procure immédiatement comme invariants absolus, les invariants fondamentaux des matrices H et K.

Les remarques précédentes sont utilisées pour obtenir des *formes réduites* du système (1). On peut faire disparaître les coefficients c_{β}^{α} si l'on connaît n systèmes particuliers d'intégrales linéairement indépendantes du système (1). À l'aide de la notion de dérivée et d'intégrale gauche d'une matrice au sens de Volterra, on peut faire disparaître les coefficients a_{β}^{α} ou b_{β}^{α}. On ne peut faire disparaître les coefficients a_{β}^{α}, c_{β}^{α} ou b_{β}^{α}, c_{β}^{α} que si $H = 0$, respectivement $K = 0$. Enfin, si $H = K$, on peut obtenir, par l'intégration d'une différentielle totale gauche d'une matrice, une forme réduite qui ne contient pas les dérivées partielles premières des z^{α}.

Si $H = 0$, ou $K = 0$, le système (1) est équivalent aux systèmes du premier ordre (18), respectivement (20), et son intégration est faite par la méthode de Peano-Baker qui utilise les séries matrisantes. On en déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système s'intègre par cette méthode. Dans le cas $H \neq 0$ ou $K \neq 0$, en supposant que ces matrices sont non singulières dans D, on obtient du système (1) *par les transformations de Laplace* (24) ou (29), les systèmes (26) et (31), qui sont les transformés de (1) dans

le sens des variables y et x. Leurs invariants H_1, K_1 et H_{-1}, K_{-1} sont donnés par les formules (27) et (32). Si $H_1 \neq 0$, $K_{-1} \neq 0$ et si ces matrices sont non singulières, on peut répéter le procédé. En continuant ainsi, on obtient du système initial (L), une suite linéaire $[L]$ en général indéfinie, que l'Auteur nomme également *suite de Laplace.*

L'Auteur dit que cette suite *est terminée dans le sens de la variable y* et *dans le cas ordinaire*, si $H_i = 0$, et *dans le cas singulier*, si $H_i \neq 0$, mais det. $H_i = 0$. De même, cette suite *est terminée dans le sens de la variable x* et *dans le cas ordinaire* ou *dans le cas singulier*, selon $K_{-i} = 0$ ou $K_{-i} \neq 0$, mais det. $K_{-i} = 0$.

On étudie ensuite les systèmes invariants par l'une ou par les deux transformations de Laplace. Pour ces systèmes on a $H = K$ et leur détermination exige l'intégration de l'équation matricielle (41) qui s'intègre aussi, en utilisant la notion de dérivée gauche au sens de Volterra. Les systèmes (E) de la forme (42), où B et B' sont deux matrices constantes permutables, et que l'Auteur appelle *systèmes d'Euler-Poisson*, ont certaines propriétés remarquables qui se déduisent, comme pour une seule équation, des expressions (43) et (45) des invariants H, K et H_i, K_{-i}. Cela a permis de préciser les conditions dans lesquelles la suite de Laplace correspondante est terminée. On démontre que *les invariants du syst me adjoint* (49) *sont égaux aux transposés des invariants du système* (1), *considérés dans l'ordre inverse*, ce qui met en évidence que les systèmes (L) à invariants matriciels égaux et symétriques sont *autoadjoints.*

L'intégration du système (L) avec des conditions aux limites, à savoir le problème de Darboux-Picard et le problème de Cauchy, est faite par la méthode des approximations successives, en utilisant la notion de valeur absolue d'une matrice, due à Frobenius. Pour le problème de Cauchy, on étend la méthode de Riemann en construisant d'abord une matrice fonctionnelle carrée $U(x, y; \xi, \eta)$ solution du système adjoint et dont l'existence et l'unicité résultent du problème de Darboux-Picard. Cette construction utilise encore des intégrales gauches au sens de Volterra. On obtient ensuite la formule résultante (68). Puis on met en évidence une *propriété d'échange* de la matrice $U(x, y; \xi, \eta)$: *elle conserve sa valeur si l'on échange les deux points dont elle dépend et le système donné avec le transposé de son système adjoint.*

Dans la dernière partie, on étudie les systèmes (L) dont la suite de Laplace est terminée dans un sens ou dans les deux sens, mais seulement dans le cas ordinaire. Ces systèmes s'intègrent par des séries matrisantes et le problème de Cauchy correspondant peut être résolu par la même méthode. A la fin, on introduit une classe assez générale de systèmes (L), dont la suite de Laplace est terminée dans les deux sens et dans le cas ordinaire.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Ciorănescu, Mathematische Zeitschrift, 1930, v. II, p. 481.
2. G. Darboux, *Théorie des surfaces.* Paris, Gauthier-Villars, 1889, t. II.
3. H. Germay, Mém. Soc. Sci. Liège, 1928, t. IV, seria 2, p. 1.
4. E. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, Hermann, 1921.
5. D. V. Ionescu, Mathematica, 1930, v. III, p. 79.
6. L. Martin, Bull. de l'Ac. de Belgique, 1933, seria 5, v. 22, p. 533.

7. Gr. Moisil, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.* Bucureşti, Göbl fils, 1931.
8. — *Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale.* Ed. Acad. R.P.R., 1950.
9. N. Theodorescо, Annali di Pisa, 1935, seria 2, v. 4, p. 51.
10. A. Tonelli, Memorie della Soc. ital. delle Scienze, 1905, t. XIII, p. 1.
11. G. Ţiţeica, 1. *Géométrie différentielle projective des réseaux.* Cultura Naţională, Bucureşti, 1924.
12. — 2. *Opere*, v. I, *Note şi Memorii.* Imprimeria Naţională, Bucureşti, 1941.
13. Volterra et Hostinsky, *Opérations infinitésimales linéaires.* Paris, Gauthier-Villars, 1938.
14. G. Vrănceanu, Bull. Sci. Acad. Roum., 1941, t. XXXIII, Nr. 10, p. 492.
15. — Bull. Math. Soc. Roum. de Sci., 1944, t. 46, Nr. 1 — 2.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1 — 2, 1953

ASUPRA TEOREMEI LUI HILBERT DIN GEOMETRIA LUI LOBACEVSCHI-BOLYAI

DE

M. ANTONESCU

In această lucrare se consideră o nouă demonstraţie a unei teoreme a lui Hilbert, care are o deosebită importanţă în chestiunile de natură critică ce s'au ridicat după apariţia operelor lui Lobacevschi, Bolyai şi Gauss, ce privesc geometria neeuclidiană.

Lobacevschi construeşte în 1829 o geometrie ce pleacă dela aceleaşi postulate ca şi geometria lui Euclid, cu excepţia postulatului al V-lea, care exprimă condiţia satisfăcută de un punct ca intersecţie a două drepte.

După Lobacevschi, printr'un punct exterior unei drepte trec o infinitate de drepte ce nu o întâlnesc. Aceste drepte se numesc nonsecante. Printre nonsecante se găsesc două drepte care le separă de secante. Aceste drepte sunt numite de Lobacevschi paralele, în timp ce Bolyai (1831) le numeşte asimptote.

Deci, printr'un punct trec două paralele la o dreaptă dată.

Cu această definiţie a paralelelor, Lobacevschi construeşte o teorie geometrică, numită geometria imaginară şi apoi pangeometrie.

Dacă al cincilea postulat al lui Euclid ar fi fost o consecinţă a primelor patru, s'ar fi găsit contradicţii în pangeometrie; lucru ce nu s'a întâmplat.

Din acestea nu rezultă o demonstraţie a celui de al cincilea postulat al lui Euclid, dar nici indemonstrabilitatea lui, pentrucă lanţul deducţiilor unei teorii geometrice este infinit şi nu se poate prevedea pe această cale imposibilitatea de a ajunge la o contradicţie cauzată de principiile admise de pangeometrie.

Problema celui de al cincilea postulat al lui Euclid, prin lucrările marelui geometru rus în primul rând, a trezit un viu interes în lumea oamenilor de ştiinţă.

Tot aceste lucrări au servit ca punct de plecare pentru importante cercetări ale geometriei moderne, dând de asemenea loc şi la interesante studii critico-filosofice asupra fundamentelor geometriei.

In această privinţă, putem cita lucrările lui Federigo Enriques care, în colaborare cu alţi matematicieni, a studiat ideile fundamentale ale geometriei (4).

Pornind dela aceste studii ale matematicienilor italieni şi îndrumat de F. Enriques am ajuns la desvoltarea acestei lucrări încă din 1933.

Geometria lui Euclid este mai apropiată de experienţa noastră decât geometria neeuclidiană, care apare ca o teorie abstractă, departe de realitate. Această situaţie a geometriei neeuclidiene se schimbă prin lucrările geometrilor Beltrami şi Klein. Aceste lucrări arată că teoriile geometriilor neeuclidiene se pot aplica şi unor figuri ale spaţiului euclidian.

Beltrami [1], într'un articol, considerând suprafeţele cu curbură constantă negativă, arată că geometria plană neeuclidiană poate să aibă şi o interpretare în realitate.

In acest articol, Beltrami demonstrează, de fapt, că geometria geodeticelor a unei suprafeţe cu curbură constantă negativă este echivalentă cu aceea a dreptelor planului lui Lobacevschi.

Aceste suprafeţe cu curbură constantă negativă sunt numite de Beltrami, pseudosfere. Pe o pseudosferă, Beltrami ia acele coordonate gaussiene u, v care, ca coordonate cartesiene ortogonale ale planului euclidian, fac ca liniilor geodetice de pe suprafaţă să le corespundă drepte în planul euclidian.

Elementul linear al acestei reprezentări este dat de formula:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\, du^2 + 2\, uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)\, dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

Plecând dela această formulă se poate stabili pe suprafaţă o metrică lineară şi unghiulară. Această metrică dă rezultate reale numai pentru valorile u, v care satisfac relaţia

$$u^2 + v^2 \leqslant a^2$$

Acum să considerăm corespondenţa între suprafaţă şi plan.

Unui punct al suprafeţei îi corespunde un punct în interiorul cercului

$$u^2 + v^2 = a^2$$

şi nu reciproc; fiindcă, după cum vom vedea din cele ce urmează, nu se poate afirma că tuturor punctelor interioare cercului le corespund puncte pe suprafaţă.

Unui punct dela infinit pe suprafaţă, îi corespunde un punct pe cerc.

Unei geodetice îi corespunde o coardă a cercului.

Pentru două geodetice paralele, adică ce se întâlnesc la infinit pe suprafaţă, corespund două corzi ce se întâlnesc pe cerc.

De aici se vede, considerând figura corespunzătoare în plan, că printr'un punct exterior unei geodetice, trec două geodetice paralele cu ea.

Din această corespondenţă, Beltrami deduce unele rezultate relative la metrica unghiulară şi demonstrează identitatea cu acelea găsite în geometria neeuclidiană.

Rezultă deci că geometria plană a lui Lobacevschi are o interpretare în geometria spaţiului euclidian.

Deci, a găsi o contradicţie în pangeometrie ar însemna a găsi o contradicţie în geometria euclidiană a spaţiului. Rezultă de aici imposibilitatea de a demonstra postulatul lui Euclid.

Totuşi chestiunea nu este închisă şi se pot face anumite obiecţiuni.

Suprafeţele pseudosferice de rotaţie studiate de Beltrami şi toate acele cunoscute au linii singulare şi reprezintă porţiuni limitate ale planului

lui Lobacevschi. Nu dau loc, deci, la o interpretare completă a geometriei neeuclidiene.

Hilbert, în cartea sa *Grundlagen der Geometrie*, în care face un studiu critic al axiomelor geometriei, examinează şi aceste obiecţiuni.

Printr'o reducere la absurd, demonstrează că nu există o suprafaţă pseudosferică regulată peste tot.

Presupunând existenţa unei suprafeţe regulate, o raportează pe aceasta liniilor asimptotice ca linii coordonate curbilinii. Apoi, reprezintă această suprafaţă pe plan în aşa fel, ca unui punct de pe suprafaţa de coordonate curbilinii u, v să-i corespundă un punct care să aibă drept coordonate carteziene aceleaşi coordonate u, v.

Plecând dela observaţia că reţeaua liniilor asimptotice este o reţea a lui Cebîşef şi dela unele corolare scoase din acest fapt, demonstrează că această corespondenţă este biunivocă.

Corespondenţa de mai sus îi permite să calculeze aria întregii suprafeţe, pe care o găseşte finită.

Pe de altă parte, considerând cercuri geodetice pe suprafaţă şi ţinând seamă de ipoteza regularităţii, se obţine o valoare infinită pentru această arie.

Deci, existenţa unei suprafeţe pseudosferice regulate peste tot implică o contradicţie.

In demonstraţia dată de Hilbert, precum şi în paginile ce urmează, joacă un rol însemnat reţelele lui Cebîşef.

Lucrările de geometrie ale lui Cebîşef sunt cunoscute sub numele de îmbrăcarea suprafeţelor. Se poate acoperi o suprafaţă cu o reţea de romburi infinitesimale într'o infinitate de moduri.

Dacă se iau liniile care dau reţeaua drept linii coordonate, atunci elementul linear devine

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos \omega \, da \, d\beta + d\beta^2$$

ω fiind o funcţie de α şi β.

Primul care a arătat posibilitatea trecerii dela un sistem de coordonate curbilinii oarecare la o reţea a lui Cebîşef a fost Servant. Servant a arătat că rezolvarea problemei se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de tip hiperbolic.

Interpretat geometric, rezultatul lui Servant se poate enunţa:

Dacă se iau pe o suprafaţă două curbe C, Γ, care se întâlnesc într'un punct O după un unghi diferit de zero, atunci pentru o regiune finită a suprafeţei în jurul punctului O există o singură reţea a lui Cebîşef din care să facă parte cele două curbe date.

In cazul când suprafaţa este raportată la o reţea a lui Cebîşef ca sistem de linii coordonate, atunci curbura suprafeţei este dată de formula

$$K = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} \quad [2] \text{ [1]}$$

rezultat ce ne va servi în desvoltarea acestei lucrări.

In tratatul de geometrie diferenţială al lui Bianchi, se găseşte un studiu amănunţit al reţelelor lui Cebîşef.

La noi, s'a ocupat cu reţelele lui Cebîşef Acad. A. Myller şi şcoala de geometrie dela Iaşi [10].

---

[1] §§ 60, 61, 62.

O demonstraţie mai simplă a teoremei lui Hilbert se datoreşte lui Erik Holmgren [3] [1]).

Holmgren, din existenţa unei suprafeţe regulate peste tot, trage concluzia că, prin orice punct al suprafeţei trec, două linii asimptotice care fac un unghi diferit de 0 sau π. Apoi, servindu-se de proprietatea că reţeaua asimptotelor este o reţea a lui Cebîşef, arată că această ipoteză duce la o contradicţie.

Noi ne propunem să arătăm, pe o cale puţin diferită, că această teoremă a lui Hilbert este o consecinţă a proprietăţilor intrinsece planului lui Lobacevschi, pe care este reprezentată suprafaţa.

Mai precis, plecând dela faptul că liniile asimptotice ale unei astfel de suprafeţe formează o reţea care are o corespondenţă în planul lui Lobacevschi, vom arăta că în construcţia acestei ultime reţele sunt necesare limitări şi singularităţi care duc în consecinţă la singularităţi pe suprafaţa de curbură constantă negativă.

I

Fără a restrânge generalitatea acestei chestiuni, putem considera numai suprafeţe cu curbura constantă negativă $k = -1$.

Suprafeţele cu curbura constantă negativă au proprietatea că reţeaua liniilor asimptotice este o reţea a lui Cebîşef [2] [2]).

Dacă deformăm o astfel de suprafaţă, reţeaua asimptotelor fiind o reţea a lui Cebîşef, se transformă tot într'o reţea a lui Cebîşef, pentrucă ecuaţiile curbelor dintr'o reţea a lui Cebîşef depind numai de prima formă fundamentală

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (1)$$

Suprafeţele noastre sunt aplicabile pe planul lui Lobacevschi de parametru $k = -1$, deci reţeaua asimptotelor pe o astfel de suprafaţă este aplicabilă pe o reţea a lui Cebîşef construită în planul lui Lobacevschi.

Reciproc, unei reţele a lui Cebîşef în planul lui Lobacevschi îi corespunde o reţea de asimptote pe o suprafaţă cu curbură constantă negativă în spaţiul euclidian.

De fapt, la două curbe α, β ale reţelei lui Cebîşef care trec printr'un punct făcând unghiul γ diferit de zero, trebue să le corespundă pe suprafaţă două linii asimptotice A şi B, care să formeze acelaşi unghi γ, având curbura egală curburii geodetice a curbelor α şi β în punctele corespondente şi torsiunea constantă, egală respectiv cu $+1$ şi -1.

Deci, cunoscând curbura şi torsiunea curbelor A şi B (prima depinzând de curbura geodetică a curbelor α şi β, iar a doua de curbura prefixată a suprafeţei), este posibil să construim aceste două curbe, făcându-le să treacă printr'un punct oarecare al spaţiului, în aşa fel încât să aibă în acest punct acelaşi plan osculator şi să formeze unghiul γ [2] [3]).

---

[1]) p. 140.
[2]) § 90.
[3]) § 8.

Prin aceste curbe în acest fel construite, trece o suprafaţă cu curbură constantă negativă şi una singură [2][1]). Pe această suprafaţă, ele determină o reţea a lui Cebîşef, şi una singură, care coincide cu aceea a liniilor asimptotice şi corespunde celei considerate în plan.

II

Această corespondenţă între plan şi suprafaţă duce la rezolvarea problemei:

Există o suprafaţă cu curbură constantă negativă regulată în toate punctele?

O astfel de suprafaţă ar trebui să aibă în fiecare punct două linii asimptotice care să facă între ele un unghi divers de $k\pi$ (k întreg), deci putem substitui problema noastră cu următoarea:

Există în planul lui Lobacevschi o reţea a lui Cebîşef care să aibă toate paralelogramele infinitesimale cu unghiurile diferite de 0 sau $k\pi$

Pentru problema noastră este folositor să facem următoarea observaţie în legătură cu corespondenţa între presupusa suprafaţă şi planul lui Lobacevschi.

Fiind dată regularitatea suprafeţei se poate găsi un număr ρ finit destul de mic, în aşa fel încât să se poată lua două vecinătăţi circulare în două puncte corespondente A şi A' respectiv pe suprafaţă şi pe plan care să se corespundă biunivoc punct cu punct. Putem construi în plan un lanţ de un număr finit de cercuri de rază ρ, în aşa fel, ca fiecare cerc să aibă centrul în cercul precedent şi centrul primului să fie în A' şi al ultimului în B', B' fiind un punct oarecare al reţelei la distanţă finită de A'.

Acest lanţ de cercuri acopere o porţiune R' a reţelei lui Cebîşef din plan. R' se poate aplica pe o porţiune R a suprafeţei, în aşa fel încât firele reţelei lui Cebîşef să se întindă peste acele ale liniilor asimptotice.

Rezultă că oricărui punct al reţelei lui Cebîşef îi corespunde un punct pe suprafaţă.

Fie în planul lui Lobacevschi o reţea oarecare a lui Cebîşef. Dacă această reţea este încă o reţea a liniilor coordonate, unghiul ω pe care îl fac liniile $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \sin \omega \tag{2}$$

şi elementul linear are forma

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2 \tag{3}$$

u şi v fiind arcele liniilor coordonate [2][2]).

Este ştiut că ecuaţia (2) admite o soluţie

$$\omega = \omega(u, v) \quad [2][3])$$

care are următoarele proprietăţi:

A) ω este continuă pentru toate valorile u şi v;

B) Pentru valorile $u = 0$, $v = 0$, funcţia se reduce respectiv la două funcţii arbitrare $\varphi(u)$, $\psi(v)$ continue şi având derivate prime;

---

[1]) § 90.
[2]) § 60.
[3]) §§ 241, 242.

C) Funcţia ω satisface ecuaţia integrală

$$\omega(u, v) = \omega(u, 0) + \omega(0, v) - \omega(0, 0) + \int_0^u \int_0^v \sin \omega(u, v)\, du\, dv \qquad (4)$$

Acum se pot prezenta două cazuri pentru funcţia ω:

I. Funcţia nu rămâne finită când u şi v variază în toate modurile posibile.

In acest caz, funcţia fiind continuă există sigur linii în lungul cărora funcţia ia valoarea $k\pi$; deci, reţeaua corespondentă a lui Cebîşef nu poate să satisfacă condiţia problemei noastre, adică să aibă peste tot un unghi diferit de 0 sau $k\pi$.

II. Funcţia $\omega = \omega(u, v)$ pentru toate valorile u, v rămâne finită.

In acest caz, se vede din ecuaţia (4) că integrala

$$A = \int_0^u \int_0^v \sin \omega(uv)\, du\, dv$$

rămâne finită pentru orice valoare u, v. Acest lucru nu poate avea loc dacă funcţia sin ω nu se anulează cel puţin în lungul unei curbe, care trebue să se găsească la distanţă finită, fiindcă integrala A dă aria porţiunii de plan acoperită de reţeaua lui Cebîşef.

Analiza făcută duce la un răspuns negativ în problema pe care ne-am propus-o. Putem deci enunţa rezultatul:

Orice reţea a lui Cebîşef în planul lui Lobacevschi admite o linie în lungul căreia unghiurile romburilor infinitesimale se anulează sau iau valoarea $k\pi$.

Din aceasta, cum s'a spus mai sus, rezultă teorema lui Hilbert.

Observaţie. In unele cazuri, una din curbele în lungul căreia funcţia ω ia valori 0 sau $k\pi$ se poate reduce la un punct. Dar în acest caz, trebue să se verifice simultan ecuaţiile

$$\frac{\partial \omega(u.v)}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial \omega(u, v)}{\partial v} = 0 \quad \omega(u, v) = k\pi$$

care sunt în general incompatibile.

III

Reţelele lui Cebîşef, considerate în planul lui Lobacevschi, ne-au condus nu numai la demonstrarea teoremei lui Hilbert, dar şi la determinarea singularităţilor unei suprafeţe cu curbură constantă negativă.

Vom arăta că reţeaua construită în plan ne dă elementele necesare pentru a construi curba singulară în spaţiu şi poziţia sa în raport cu suprafaţa.

Să considerăm curba în lungul căreia soluţia $\omega(u, v)$ a ecuaţiei (2) se anulează. Ecuaţia acestei curbe este

$$\omega(u, v) = 0$$

Unghiul pe care îl face curba $\omega = 0$ cu una din curbele $u = \text{const.}$ este dat de formula cunoscută

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}} \frac{dv}{ds}$$

aplicată elementului nostru linear

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2$$

Deci avem

$$\sin \theta = \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 + 2 \cos \omega \frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2}}$$

Pentru $\omega = 0$ rezultă $\theta = k\pi'$.

De aici se vede că linia $\omega = 0$ înfăşură curbele reţelei lui Cebîşef.

Trecând acum la suprafaţă, rezultă:

A) *Cele două sisteme de linii asimptotice ale unei suprafeţe cu curbură constantă negativă sunt înfăşurate de linia singulară a acestei suprafeţe.*

Se mai poate demonstra:

B) *Planul osculator al liniei singulare a unei suprafeţe cu curbură constantă negativă este şi planul tangent al acelei suprafeţe.*

Fie M un punct al suprafeţei infinit vecin curbei singulare Γ. Prin M trec două linii asimptotice, care sunt tangente liniei Γ în punctele infinit vecine $M_1 M_2$.

Planul tangent la suprafaţă în M mai este osculator şi la curbele asimptotice. Acest plan este paralel cu tangentele $M_1 T_1$ şi $M_2 T_2$.

Dacă punctul M tinde către M_1 pe linia asimptotică MM_1, planul tangent în M tinde, rămânând mereu paralel la $M_2 T_2$, către planul tangent în M_1 care rezultă, şi osculator curbei Γ, fiind paralel cu tangenta infinit vecină $M_2 T_2$.

Această teoremă ne permite să calculăm curbura şi torsiunea liniei singulare a suprafeţei.

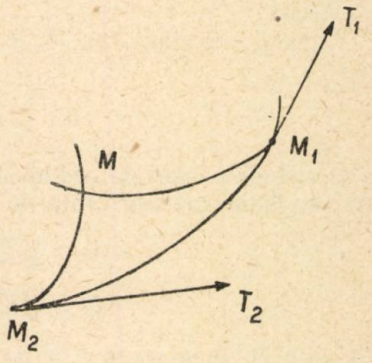


Fig. 1

Curbura lui Γ rezultă egală cu curbura geodetică a suprafeţei.

Pentru a calcula aceasta, să utilizăm formula lui Bonnet:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{F + G\varphi'}{\sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2} \right\}$$

pentru curbele $\omega(u, v) = a$ (const.) făcând apoi $a = 0$

Avem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{du^2}}{\left[1 + 2 \cos \omega \frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial \omega}{\partial u}}{\sqrt{1 + 2 \cos \omega \frac{dv}{du} + \frac{\partial v}{du}}^2}$$

şi fâcând $\omega = 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}{1 + \dfrac{d\varphi}{du}}$$

$\dfrac{d\varphi}{du}$ obţinându-se din relaţia $\omega(u, \varphi) = 0$.

Pentru torsiune, să recurgem la imaginea sferică a reţelei liniilor asimptotice, care este o reţea a lui Cebîşef [2] [1]).

Dacă menţinem aceleaşi coordonate, unghiul ω_1 între liniile $u = \text{const.}$ şi $\varphi = \text{const.}$ pe sferă satisface ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \partial \varphi} + \sin \omega_1 = 0 \tag{5}$$

Unei soluţii ω a ecuaţiei (2) îi corespunde o soluţie $\omega_1 = \pi - \omega$ a ecuaţiei (5), care este aceea a imaginii reţelei liniilor asimptotice.

Atunci linia singulară $\omega = 0$ are corespondentă pe sferă o curbă $\omega_1 = \pi$ care, în baza teoremei B, este indicatoarea sferică a binormalelor curbei singulare.

Având imaginea sferică, torsiunea este dată de

$$\frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{ds}$$

$d\sigma$ fiind elementul de arc al indicatoarei şi ds elementul de arc al curbei Γ. Aceste elemente sunt date de formulele

$$d\sigma = \sqrt{du^2 + 2 \cos \omega_1 \, du \, d\varphi + d\varphi^2}$$

$$ds = \sqrt{du^2 + 2 \cos \omega \, du \, d\varphi + d\varphi^2}$$

în care se face $\omega_1 = \pi$ şi $\omega = 0$.

Deci avem

$$\frac{1}{T} = \frac{1 - \dfrac{d\varphi}{du}}{1 + \dfrac{d\varphi}{du}}$$

După cum am văzut, $\omega(u, \varphi) = 0$ reprezintă ecuaţia liniei singulare raportate la coordonatele curbilinii u, φ.

Acum, utilizând expresia elementului linear raportat la variabilele u, φ găsim că arcul liniei singulare este dat de formula

$$s = u + \varphi$$

Relaţiile

$$s = u + \varphi \qquad \omega(u, \varphi) = 0$$

[1] § 90.

ne dau posibilitatea de a exprima u şi v ca funcţii de arcul s al liniei singulare.

Introducând aceste funcţii în

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}{1 + \dfrac{dv}{du}}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{1 - \dfrac{dv}{du}}{1 + \dfrac{dv}{du}} \tag{6}$$

obţinem efectiv ecuaţiile intrinsece ale liniei singulare.

IV

Acum se poate pune problema inversă:

Să se găsească suprafaţa când este dată linia singulară.

Noi ne limităm la cazul special în care linia singulară este o elice circulară.

In acest caz, ecuaţiile intrinsece ale curbei singulare sunt:

$$\frac{1}{\rho} = a \qquad \frac{1}{T} = b$$

a, b fiind constante.

A doua din ecuaţiile (6) (torsiunea) dă

$$\frac{dv}{du} = m = \text{const.}$$

sau

$$v = mn + c \qquad c = \text{const.}$$

Aceasta este ecuaţia liniei singulare raportate la variabilele curbilinii u, v.

In lungul acestei linii, trebue să avem $\omega(u, v) = 0$ sau, derivând în raport cu u

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} + m \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Această ecuaţie, împreună cu prima din ecuaţiile (6), adică

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}{1 + \dfrac{dv}{du}} = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}{1 + m} = a$$

ne dau derivatele parţiale $\dfrac{\partial \omega}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial v}$ în lungul liniei singulare, care se reduc, în cazul nostru, la două constante.

Calculate aceste elemente, problema găsirii suprafeţei se reduce la o problemă de analiză:

Să se găsească o soluţie $Z = Z(x, y)$ a ecuaţiei fundamentale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z$$

cunoscând în lungul dreptei $y = mx$ valorile $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ şi în punctul iniţial, valoarea z_0 a lui z.

Această problemă este rezolvată în geometria diferenţială a lui B i a n c h i [2] [1]) în cazul special $y = x$, în care se obţine o soluţie unică pentru toate valorile x şi y.

In cazul nostru, problema se rezolvă în mod analog cu excepţia unor mici modificări.

Deci, avem de rezolvat problema:

Să se găsească o soluţie a ecuaţiei fundamentale:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z \tag{1}'$$

cunoscând în lungul dreptei $y = mx$ valorile $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ şi în punctul iniţial (0, 0) valoarea z_0 pentru z.

Fiind $\varphi(x)$, $\psi(y)$ valorile prescrise pentru derivatele lui z în lungul dreptei $y = mx$, se pune:

$$z_1 = \int_0^x \varphi(x)\, dx + \int_0^y \psi(y)\, dy \tag{2}'$$

aşa că z_1 satisface condiţiile iniţiale şi ecuaţia $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = 0$.

Acum, prin punctul (x, y) al câmpului se duc paralele la axe şi se indică cu T triunghiul închis de aceste două paralele la axe şi de dreapta $y = mx$; dar, pentru a fixa ideile, presupunem că rămânem în unghiul cuprins între direcţia pozitivă a axei ox şi dreapta $y = mx$ pentru care presupunem de asemenea $m > 0$. Atunci

$$0 < y < mx$$

Dacă cu $f(\xi, \eta)$ se indică o funcţie oarecare finită şi continuă de ξ, η, atunci integrala dublă

$$u(x, y) = -\iint_T f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\int_{\frac{y}{m}}^{x} d\xi \int_y^{m\xi} f(\xi, \eta)\, d\eta = \int_y^{mx} d\eta \int_{\frac{\eta}{m}}^{x} f(\xi, \eta)\, d\xi \tag{3}'$$

este o funcţie continuă care satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y). \tag{4'}$$

[1]) § 244.

Acestea fiind puse şi plecând dela prima funcţie auxiliară z_1, dată de ecuaţia (2), se construeşte seria infinită

$$z_1 , z_2 , z_3 \ldots z_n \ldots \tag{5'}$$

dată de formulele recurente

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 - \iint_T \sin z_1 \, d\xi \, d\eta \\ z_3 &= z_1 - \iint_T \sin z_2 \, d\xi \, d\eta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= z_1 - \iint_T \sin z_{n-1} \, d\xi \, d\eta . \end{aligned} \tag{6}$$

In general, pentru Z_n $(n > 1)$, avem

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \, \partial y} = \sin z_n \tag{7}$$

şi în lungul dreptei $y = mx$, Z_n satisface aceleaşi condiţii iniţiale ca şi z_1.

Dacă demonstrăm convergenţa seriei

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots \tag{8}$$

funcţia z este soluţia căutată.

Dar avem din prima ecuaţie (6)

$$| z_2 - z_1 | < \iint_T d\xi \, d\eta = \frac{1}{2} (mx - y)^2 \tag{9}$$

apoi

$$\begin{aligned} z_3 - z_2 &= \iint_T (\sin z_1 - \sin z_2) \, d\xi \, d\eta = \\ &= \iint_T 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \, d\xi \, d\eta \end{aligned} \tag{10}$$

Ţinând seamă de limitarea (9), rezultă:

$$z_3 - z_2 < \frac{1}{2m} \int_{\frac{y}{m}}^{x} d\xi \int_{y}^{m\xi} (m\xi - y)^2 \, d\eta =$$

$$\frac{1}{6m} \int_{\frac{y}{m}}^{x} (m\xi - y)^3 \, d\xi = \frac{1}{24 \, m^2} (mx - y)^4$$

adică

$$|z_3 - z_2| < \frac{(mx - y)^4}{4!m^2}$$

In general, avem limitarea

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{(mx - y)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!\, m^{n-1}}$$

care se dovedeşte prin procesul recurent.

Se vede că seria

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \ldots |z_n - z_{n-1}| + \ldots$$

este majorată de seria convergentă

$$\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{\xi^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{\xi^{2u}}{1.2.3\ldots 2u} + \ldots = ch\,\xi - 1$$

unde

$$\xi = \frac{mx - y}{\sqrt{m}}.$$

Pentru a demonstra în fine unicitatea soluţiei, este deajuns să aplicăm procedeul lui Goursat, adică considerând diferenţele $\zeta - z_n$ în care ζ ar fi o altă soluţie şi apoi să demonstrăm că aceste diferenţe tinda zero când n tinde la infinit.

Revenind la problema noastră geometrică, observăm că, dacă transportăm originea coordonatelor x, y într'un punct oarecare al dreptei $y = m\psi$ dând astfel o mişcare de translaţie, nu se schimbă nici ecuaţia fundamentală nici condiţiile iniţiale.

Deci soluţia este egală cu ea însăşi în lungul dreptei.

Trecând la suprafaţa noastră pseudosferică, se vede că aceasta admite lunecări elicoidale în lungul liniei singulare şi atunci putem spune că suprafaţa căutată este o pseudosferă elicoidală.

Când elicea se reduce la un cerc avem cazul unei pseudosfere de rotaţie.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ГИЛЬБЕРТА В НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО-БОЛЬАИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Проблема для нахождения поверхности, на которой действительна неевклидова геометрия, разрешенная впервые Бельтрами, имеет ограничения.

На этой поверхности, называемой Бельтрами псевдосферой, являющейся поверхностью отрицательной постоянной кривизны, нельзя представить полностью плоскость Лобачевского.

Это положение вытекает из теоремы Гильберта, которая показывает, что не существует псевдосферической поверхности регулярной повсюду.

Гильберт в своем доказательстве исходит из свойства, что на поверхности с отрицательной постоянной кривизной сеть асимптотических линий является сетью Чебышева.

Holmgren дает более простое доказательство и использует также сети Чебышева.

В настоящем сообщении изучаются сети Чебышева, которые могут быть построены на плоскости Лобачевского и которые приводят нас к некоторым следствиям для поверхностей отрицательной постоянной кривизны.

Сеть Чебышева имеет линейный элемент

$$ds^2 = d\alpha^2 + \cos\omega\, d\alpha \cdot d\beta + d\beta^2, \tag{1}$$

где $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ — координатные линии плоскости Лобачевского и ω функция α и β, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2\omega}{d\alpha\, d\beta} = \sin\omega. \tag{2}$$

Это уравнение допускает непрерывное решение для всех значений α и β.

Показывается, что эта функция должна принять значения $k\pi$ (k— целое) и что она при $\omega\ (\alpha, \beta) = k\pi$ дает кривую в плоскости Лобачевского, для которой углы сети Чебышева становятся нулевыми.

В то же время эта кривая является огибающей кривых сети Чебышева.

Теперь допустим, что существует в пространстве поверхность, регулярная повсюду, следовательно, имеющая в каждой точке две асимптотические линии, образующие между собой угол, отличный от нуля или от $k\pi$ (k— целое).

Тогда следует, что сеть асимптотических линий, являющаяся еще сетью Чебышева, соответствует сети Чебышева, построенной в плоскости Лобачевского и отображаемой на сети поверхности таким образом, что всякая точка сети плоскости будет находиться на точке поверхности.

В таком случае и асимптотические линии должны иметь огибающую их линию, но этот вывод противоречит гипотезе регулярности заданной поверхности.

В последней части сообщения показано, что, имея решение уравнения с частными производными (2)

$$\omega = \omega\ (\alpha, \beta),$$

можно построить пространство постоянной отрицательной кривизны, имеющей особую линию, внутренние уравнения которой могут быть построены из уравнения $\omega\ (\alpha\ \beta) = 0$.

SUR UN THÉORÈME DE HILBERT DANS LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE DE LOBATCHEWSKI-BOLYAI

(RÉSUMÉ)

Le problème, résolu pour la première fois par Beltrami, qui consiste à trouver une surface pour laquelle la géométrie non euclidienne soit valable, offre des limites.

Sur cette surface, que Beltrami a appelé pseudosphère et qui est une surface de courbure constante négative, il n'est pas possible de représenter complètement le plan de Lobatchewski.

Ce fait ressort du théorème de Hilbert qui exprime qu'il n'existe pas de surface pseudosphérique partout régulière.

Le point de départ de la démonstration de Hilbert est la propriété que, sur une surface à courbure constante négative, le réseau des lignes asymptotiques est un réseau de Tchébychtcheff.

Holmgren donne une démonstration plus simple en se servant, lui aussi, des réseaux de Tchébychtcheff.

Dans cet article, l'Auteur étudie les réseaux de Tchébychtcheff que l'on peut construire sur le plan de Lobatchewski et qui conduisent à certaines conséquences pour les surfaces de courbure constante négative.

Un réseau de Tchébychtcheff possède l'élément linéaire suivant:

$$ds^2 = d\alpha^2 + \cos\omega \, d\alpha \, . \, d\beta + d\beta^2 \tag{1}$$

α = const., β = const., étant les lignes coordonnées du plan de Lobatchéwski et ω, une fonction de α et β satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2\omega}{d\alpha \, d\beta} = \sin\omega \tag{2}$$

Cette équation admet une solution continue pour toutes les valeurs de α et de β.

On démontre que cette fonction doit prendre les valeurs $k\pi$ (k entier) et que, pour $\omega(\alpha, \beta) = k\pi$, elle donne une courbe dans le plan de Lobatchéwski pour laquelle les angles du réseau de Tchébychtcheff deviennent nuls.

En même temps, cette courbe est enveloppante des courbes du réseau de Tchébychtcheff.

Admettons, maintenant, qu'il existe dans l'espace une surface partout régulière, qui a, donc, en tout point deux lignes asymptotiques formant entre elles un angle différent de 0 ou $k\pi$ (k entier).

Il en résulte que, le réseau des lignes asymptotiques étant encore un réseau de Tchébychtcheff, il correspond à un réseau de Tchébychtcheff construit dans le plan de Lobatchéwski et applicable sur celui de la surface de telle sorte que tout point du réseau du plan se superpose à un point de la surface.

Dans ce cas encore, les lignes asymptotiques devront possèder une ligne enveloppante; mais cette conclusion est contradictoire de la supposition de la régularité de notre surface.

Dans la dernière partie de ce travail l'Auteur démontre que, lorsqu'on a une solution de l'équation aux dérivées partielles (2)

$$\omega = \omega(\alpha, \beta)$$

il est possible de construire un espace à courbure constante négative ayant une ligne singulière dont les équations intrinsèques pourront être construites à partir de l'équation $\omega(\alpha, \beta) = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Beltrami Eugenio, Giornale di Matematiche, 1868, v. 6.
2. Bianci Luigi, *Lezioni di geometria differenziale.* Nicola Zanichelli, Bologna 1927, v. I.
3. Blaschke W., *Differentialgeometrie.* I. Springer, Berlin, 1925, v. I.
4. Bolyai J., *Appendix scientiam spatii aboluto vera exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipencem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* Tg. Mureş, 1832.
5. Bonola Roberto, *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Nicola Zanichelli, Bologna, 1925, v. II, art. XI.
6. Enriques Federigo, *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Nicola Zanichelli, Bologna, 1925, art. XII.
7. Euclid, *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.* Editi da F. Enriques. Alberto Scock, Roma, 1925.
8. Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie.* B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1909.
9. Lobacevschi, *Cercetări geometrice cu privire la teoria liniilor paralele.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
10. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 130.
11. Myller A., Annales scient. de l'Univ. de Jassy, 1925 — 1926, t. XIV, p. 8.
12. — Annales scient. de l'Univ. de Jassy, 1925 — 1926, t. XIV, p. 163.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1–2, 1953

DETERMINAREA SPAŢIILOR A_3 CARE ADMIT O ROTAŢIE ÎN FIECARE PUNCT

DE

V. DUMITRAŞ

Se ştie că suprafeţele considerate ca spaţii riemanniene cu două dimensiuni pot fi clasificate după grupul de mişcari ce-l posedă în: suprafeţe cu curbură constantă (în care caz grupul de mişcări are 3 parametri), suprafeţe de rotaţie (cu grup de mişcări cu un parametru) şi suprafeţe care nu posedă mişcări în ele însele.

Pentru spaţiile riemanniene cu trei dimensiuni, o clasificare după grupul de mişcări ce-l posedă a fost dată de B i a n c h i [2]. Pentru spaţiile cu conexiune afină cu două dimensiuni, o clasificare după grupul de mişcări a fost dată de Ş t e f a n P e t r e s c u, care a utilizat unele rezultate date de P r o f. G. V r ă n c e a n u.

Urmând aceeaşi cale, se poate considera problema clasificării spaţiilor cu conexiune afină cu trei dimensiuni A_3. Despre aceste spaţii se ştie că, dacă sunt euclidiene, au un grup de transformări în ele însele cu 12 parametri, numărul de parametri ai grupului afin în spaţiul cu trei dimensiuni. Spaţiile cu conexiune afină, neeuclidiene, au un grup maxim cu cel mult 9 parametri, aşa cum rezultă dintr'o teoremă a lui E g o r o v. Spaţiile având un grup cu 9 parametri, au fost studiate de Prof. G. V r ă n c e a n u şi intră în categoria spaţiilor care admit o formă Pfaff invariantă.

In această lucrare vom considera o clasă particulară de spaţii A_3, şi anume spaţiile A_3 ce admit o rotaţie.

Să considerăm o transformare de congruenţe

$$d\bar{s}^a = c_b^a \, ds^b \tag{1}$$

într'un spaţiu cu conexiune afină cu trei dimensiuni fără torsiune.

Legea de transformare a componentelor conexiunii γ_{bc}^a este:

$$\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} = \bar{\gamma}_{pq}^a \, c_b^p \, c_c^q - \gamma_{bc}^p \, c_p^a \tag{2}$$

Tensorul de curbură γ_{bcd}^a se tranformă după legea:

$$\bar{\gamma}_{rst}^a \, c_b^r \, c_c^s \, c_d^t = \gamma_{bcd}^r \, c_r^a \tag{3}$$

Tensorii de curbură contractați sunt:

$$\gamma^a_{bad} = \gamma_{bd}, \quad \gamma^a_{acd} = r_{cd} \tag{4}$$

între ei existând relațiile

$$\gamma_{bd} - \gamma_{db} = r_{bd}, \quad r_{bd} + r_{db} = 0$$

Putem asocia spațiului considerat o formă bilineară invariantă

$$f = r_{cd}\, ds^c\, \delta s^d \tag{5}$$

și o formă pătratică invariantă

$$\varphi = \gamma_{bd}\, ds^b\, ds^d \tag{5'}$$

Forma f se scrie desvoltat

$$f = r_{12}[ds^1\, ds^2] + r_{23}[ds^2\, ds^3] + r_{31}[ds^3\, ds^1]$$

Această expresie poate fi adusă la o formă canonică dacă facem o transformare astfel încât

$$r_{12} = M, \quad r_{23} = 0, \quad r_{31} = 0$$

atunci

$$f = M[ds^1\, ds^2]$$

Grupul de transformări care păstrează această formă canonică este:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= g\, ds^1 + h\, ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= l\, ds^1 + k\, ds^2 \\ d\bar{s}^3 &= c^3_\alpha\, ds^\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

Forma pătratică φ se scrie

$$\varphi = \gamma_{11}(ds^1)^2 + \gamma_{22}(ds^2)^2 + \gamma_{33}(ds^3)^2 + (\gamma_{12} + \gamma_{21})\, ds^1\, ds^2 + (\gamma_{23} + \gamma_{32})\, ds^2\, ds^3 + (\gamma_{31} + \gamma_{13})\, ds^1\, ds^3$$

Presupunem că φ este de rang 3. Printr'o transformare (6), această formă pătratică se poate reduce la o sumă de 3 pătrate, adică să avem

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1, \quad \gamma_{12} + \gamma_{21} = 0, \quad \gamma_{23} + \gamma_{32} = 0, \quad \gamma_{31} + \gamma_{13} = 0.$$

Grupul de transformări (6), care păstrează această formă canonică, este

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= \cos\theta.\ ds^1 - \sin\theta.\ ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= \sin\theta.\ ds^1 + \cos\theta.\ ds^2 \\ d\bar{s}^3 &= ds^3 \end{aligned} \tag{7}$$

Deci avem:

$$\begin{aligned} c^1_1 &= \cos\theta, & c^1_2 &= -\sin\theta, & c^1_3 &= 0 \\ c^2_1 &= \sin\theta, & c^2_2 &= \cos\theta, & c^2_3 &= 0 \\ c^3_1 &= 0, & c^3_2 &= 0, & c^3_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rezultă deci că un spațiu A_3, cu tensorii de curbură contractați nedegenerați, admite cel mult o rotație în fiecare punct. Dacă relațiile în termeni finiți ale spațiului conțin θ și θ_0 este o soluție a acestor relații, putem presupune $\theta_0 = 0$ și deci putem asocia spațiului 3 forme ds^1, ds^2, ds^3, invariante.

Problema găsirii invarianților spațiului se reduce în acest caz la ceea ce se numește problema specială de echivalență a lui Cartan, deci invarianții sunt coeficienții covarianților bilineari Δs^1, Δs^2, Δs^3 și derivatele lor în raport cu s^i $(i = 1, 2, 3)$ [1] [1]).

Ne punem acum problema inversă, și anume, de a căuta care sunt spațiile A_3 care admit o rotație, deci un grup de transformări de congruență de forma (7).

Dacă în formulele (2) ținem seama de formulele (7), avem pentru $a = 1$, $b = 3$

$$\bar{\gamma}^1_{pq}\, c^p_3\, c^q_c - \gamma^p_{3c}\, c^1_p = 0$$

sau

$$\bar{\gamma}^1_{3q}\, c^q_c = \gamma^p_{3c}\, c^1_p$$

Dacă dăm indicelui c valorile 1, 2, 3, obținem:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^1_{31}\cos\theta + \bar{\gamma}^1_{32}\sin\theta &= \gamma^1_{31}\cos\theta - \gamma^2_{31}\sin\theta \\
-\bar{\gamma}^1_{31}\sin\theta + \bar{\gamma}^1_{32}\cos\theta &= \gamma^1_{32}\cos\theta - \gamma^2_{32}\sin\theta \\
\bar{\gamma}^1_{33} &= \gamma^1_{33}\cos\theta - \gamma^2_{33}\sin\theta
\end{aligned} \tag{8}$$

Căutăm condițiile pentru ca aceste relații să nu depindă de θ. Avem

$$\bar{\gamma}^1_{31} = \gamma^1_{31},\ \bar{\gamma}^1_{32} = -\gamma^2_{31},\ \bar{\gamma}^1_{31} = \gamma^2_{32},\ \bar{\gamma}^1_{32} = \gamma^1_{32} \tag{9}$$

La fel pentru $a = 2$, $b = 3$, avem

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^2_{31}\cos\theta + \bar{\gamma}^2_{32}\sin\theta &= \gamma^1_{31}\sin\theta + \gamma^2_{31}\cos\theta \\
-\bar{\gamma}^2_{31}\sin\theta + \bar{\gamma}^2_{32}\cos\theta &= \gamma^1_{32}\sin\theta + \gamma^2_{32}\cos\theta \\
\bar{\gamma}^2_{33} &= \gamma^1_{33}\sin\theta + \gamma^2_{33}\cos\theta
\end{aligned} \tag{8'}$$

de unde mai rezultă

$$\bar{\gamma}^2_{31} = \gamma^2_{31},\ \gamma^1_{33} = \gamma^2_{33} = 0 \tag{9'}$$

Făcând $a = 3$, $b = 1$ și apoi $a = 3$, $b = 2$, avem

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^3_{11}\cos^2\theta + \bar{\gamma}^3_{22}\sin^2\theta + \bar{\gamma}^3_{12}\sin\theta\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{21}\sin\theta\cos\theta &= \gamma^3_{11} \\
-\bar{\gamma}^3_{11}\sin\theta\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{22}\sin\theta\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{12}\cos^2\theta - \bar{\gamma}^3_{21}\sin^2\theta &= \gamma^3_{12} \\
-\bar{\gamma}^3_{11}\sin\theta\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{22}\sin\theta\cos\theta - \bar{\gamma}^3_{12}\sin^2\theta + \bar{\gamma}^3_{21}\cos^2\theta &= \gamma^3_{21} \\
\bar{\gamma}_{11}\sin^2\theta + \bar{\gamma}^3_{22}\cos^2\theta - \bar{\gamma}^3_{12}\sin\theta\cos\theta - \bar{\gamma}^3_{21}\sin\theta\cos\theta &= \gamma^3_{22} \\
\bar{\gamma}^3_{13}\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{23}\sin\theta &= \gamma^3_{13} \\
-\bar{\gamma}^3_{13}\sin\theta + \bar{\gamma}^3_{23}\cos\theta &= \gamma^3_{23}
\end{aligned} \tag{10}$$

[1]) p. 131.

Rezultă

$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{11},\ \bar{\gamma}^3_{11} = \bar{\gamma}^3_{22},\ \bar{\gamma}^3_{12} + \bar{\gamma}^3_{21} = 0,\ \gamma^3_{12} = \gamma^3_{12},\ \bar{\gamma}^3_{21} = \gamma^3_{21}$$
$$\bar{\gamma}^3_{13} = 0,\ \gamma^3_{23} = 0 \tag{11}$$

Făcând $a = 3$, $b = 3$, avem

$$\begin{cases} \bar{\gamma}^3_{31}\cos\theta + \bar{\gamma}^3_{32}\sin\theta = \gamma^3_{31} \\ -\bar{\gamma}^3_{31}\sin\theta + \bar{\gamma}^3_{32}\cos\theta = \gamma^3_{32} \\ \bar{\gamma}^3_{33} = \gamma^3_{33} \end{cases} \tag{12}$$

rezultă

$$\gamma^3_{31} = \gamma^3_{32} = 0,\ \bar{\gamma}^3_{33} = \gamma^3_{33}\ \text{(Invariant absolut)} \tag{13}$$

Luăm acum pe acei c^a_b care nu depind de θ. Facem mai întâi $c = 1$. Dăm pe rând valorile $a = 1$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 1$; $a = 2$, $b = 2$.

Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= -\left[\bar{\gamma}^1_{11}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \bar{\gamma}^1_{22}\sin\theta + (\bar{\gamma}^1_{12} + \bar{\gamma}^1_{21})\cos\theta - \gamma^1_{11}\operatorname{ctg}\theta + \gamma^2_{11}\right] \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= -\left[-\bar{\gamma}^1_{11}\sin\theta + \bar{\gamma}^1_{22}\sin\theta - \bar{\gamma}^1_{12}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \bar{\gamma}^1_{21}\cos\theta - \gamma^1_{21} + \gamma^2_{21}\operatorname{ctg}\theta\right] \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}^2_{11}\cos\theta + \bar{\gamma}^2_{22}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + (\bar{\gamma}^2_{12} + \bar{\gamma}^2_{21})\sin\theta - \gamma^1_{11}\operatorname{tg}\theta - \gamma^2_{11} \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}^2_{11}\cos\theta - \bar{\gamma}^2_{22}\cos\theta + \bar{\gamma}^2_{12}\sin\theta - \bar{\gamma}^2_{21}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \gamma^1_{21} + \gamma^2_{21}\operatorname{ctg}\theta
\end{aligned} \tag{14}$$

Egalând prima cu a doua și a treia cu a patra, avem

$$\begin{cases} \bar{\gamma}^1_{11}\cos\theta + \bar{\gamma}^1_{12}\sin\theta = \gamma^1_{11}\cos\theta + \gamma^2_{21}\sin^2\theta - (\gamma^2_{11} + \gamma^1_{21})\sin\theta\cos\theta \\ \bar{\gamma}^2_{21}\cos\theta + \bar{\gamma}^2_{22}\sin\theta = \gamma^1_{11}\sin\theta + \gamma^2_{21}\cos^2\theta + (\gamma^2_{11} + \gamma^1_{21})\sin\theta\cos\theta \end{cases} \tag{14'}$$

Dând lui c valoarea 2, avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\left[-\bar{\gamma}^1_{11}\cos\theta + \bar{\gamma}^1_{22}\cos\theta + \bar{\gamma}^1_{12}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \bar{\gamma}^1_{21}\sin\theta - \gamma^1_{12}\operatorname{ctg}\theta + \gamma^2_{12}\right] \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\left[\bar{\gamma}^1_{11}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \bar{\gamma}^1_{22}\cos\theta - \bar{\gamma}^1_{12}\sin\theta - \bar{\gamma}^1_{21}\sin\theta - \gamma^1_{22} + \gamma^2_{11}\operatorname{tg}\theta\right] \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= \left[-\bar{\gamma}^2_{11}\sin\theta + \bar{\gamma}^2_{22}\sin\theta + \bar{\gamma}^2_{12}\cos\theta - \bar{\gamma}^2_{21}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \gamma^1_{12}\operatorname{tg}\theta - \gamma^2_{12}\right] \\
\frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\left[\bar{\gamma}^2_{11}\sin\theta + \bar{\gamma}^2_{22}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \bar{\gamma}^2_{12}\cos\theta - \bar{\gamma}^2_{21}\cos\theta - \gamma^1_{22} - \gamma^2_{22}\operatorname{ctg}\theta\right].
\end{aligned} \tag{15}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} -\bar{\gamma}^1_{11}\sin\theta + \bar{\gamma}^1_{12}\cos\theta &= \gamma^1_{11}\cos^2\theta + \gamma^2_{22}\sin^2\theta - (\gamma^1_{22} + \gamma^2_{12})\sin\theta\cos\theta \\ \bar{\gamma}^2_{22}\cos\theta - \bar{\gamma}^2_{21}\sin\theta &= \gamma^1_{12}\sin^2\theta + \gamma^2_{22}\cos^2\theta + (\gamma^2_{21} + \gamma^1_{22})\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{15'}$$

Din relațiile (14′) și (15′) avem:

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = 0;\ \bar{\gamma}^1_{11} = \bar{\gamma}^1_{12} = \bar{\gamma}^2_{21} = \bar{\gamma}^2_{22} = 0 \\ &\gamma^2_{11} + \gamma^1_{21} = 0 \qquad\qquad ;\ \gamma^2_{12} + \gamma^1_{22} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Făcând $c = 3$, avem relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= -\ \bar{\gamma}^1_{13}\operatorname{ctg}\theta - \bar{\gamma}^1_{23} + \gamma^1_{13}\operatorname{ctg}\theta - \gamma^2_{13} \\ \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= \ \bar{\gamma}^1_{13}\ \operatorname{tg}\theta - \bar{\gamma}^1_{23} + \gamma^1_{23} - \gamma^2_{23}\ \operatorname{tg}\theta \\ \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= \ \bar{\gamma}^2_{13} - \bar{\gamma}^2_{23}\operatorname{ctg}\theta + \gamma^1_{23} + \gamma^2_{23}\operatorname{ctg}\theta \\ \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= \ \bar{\gamma}^2_{13} + \bar{\gamma}^2_{23}\operatorname{tg}\theta - \gamma^1_{13}\operatorname{tg}\theta - \gamma^2_{13} \end{aligned} \tag{17}$$

Egalând prima cu a treia și a doua cu a patra, avem

$$\begin{aligned} &(\bar{\gamma}^1_{13} - \bar{\gamma}^2_{23})\cos\theta + (\bar{\gamma}^2_{13} + \bar{\gamma}^1_{23} + \gamma^2_{13} + \gamma^1_{23})\sin\theta + (\gamma^2_{23} - \gamma^1_{13})\cos\theta = 0 \\ &(\bar{\gamma}^1_{13} - \bar{\gamma}^2_{23})\sin\theta - (\bar{\gamma}^2_{13} + \bar{\gamma}^1_{23})\cos\theta - (\gamma^2_{23} - \gamma^1_{13})\sin\theta + (\gamma^1_{23} + \gamma^2_{13})\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{17'}$$

Rezultă

$$\bar{\gamma}^1_{13} = \bar{\gamma}^2_{23},\ \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23},\ \bar{\gamma}^2_{13} + \bar{\gamma}^1_{23} = 0,\ \gamma^2_{13} + \gamma^1_{23} = 0 \tag{18}$$

Avem deci din formulele (9) și (9′)

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a,\quad \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha \tag{18'}$$

iar din (11)

$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b,\quad \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta \tag{18''}$$

unde a, b, α, β sunt invarianți absoluți, deci avem

$$\bar{a} = a,\quad \bar{b} = b,\quad \bar{\alpha} = \alpha,\quad \bar{\beta} = \beta$$

In formulele (14) și (15), dacă ținem seama de relațiile (16) și (17) și dacă punem

$$\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m,\quad \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n \tag{18'''}$$

avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= \bar{m}\cos\theta + \bar{n}\sin\theta - m\\ \frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\bar{m}\sin\theta + \bar{n}\cos\theta - n\end{aligned} \tag{19}$$

Formulele (18) dau

$$\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p \tag{19'}$$

unde p este un invariant, şi

$$\gamma^1_{23} = -\gamma^2_{13} = q \tag{19''}$$

astfel că formulele (17) se scriu

$$\frac{\partial\theta}{\partial s^3} = q - \bar{q}$$

Putem alege funcţia θ astfel ca să satisfacă ecuaţia

$$\frac{\partial\theta}{\partial s^3} = q \tag{20}$$

pentru a avea $\bar{q} = 0$. Putem deci presupune dela început că $q = \bar{q} = 0$.

Am considerat deci toţi cei 27 de coeficienţi γ^a_{bc} din care sunt nuli 12, şi anume

$$\gamma^1_{33} = \gamma^2_{33} = \gamma^3_{13} = \gamma^3_{23} = \gamma^3_{31} = \gamma^3_{32} = \gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = \gamma^1_{23} = \gamma^2_{13} = 0 \tag{20'}$$

şi avem de asemenea invarianţii absoluţi

$$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ p,\ \gamma^3_{33}$$

Putem deci enunţa următoarea teoremă:

Dacă un spaţiu A_3 admite grupul de transformări (7), *atunci ne putem alege un sistem de congruenţe în aşa fel ca să avem satisfăcute formulele* (20') *şi* (18'''), *precum şi formulele* (18'), (18''), (19') *cu* $a,\ \alpha,\ b,\ \beta, p\ \gamma^3_{33}$ *invarianţi absoluţi.*

In ceea ce priveşte funcţia θ, ea satisface sistemul:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= \bar{m}\cos\theta + \bar{n}\sin\theta - m\\ \frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\bar{m}\sin\theta + \bar{n}\cos\theta - n\\ \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= 0\end{aligned} \tag{I}$$

Să considerăm condițiile de integrabilitate ale acestui sistem. Avem

$$\frac{\partial}{\partial s^1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s^2}\right)-\frac{\partial}{\partial s^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s^1}\right)=\omega_{12}^a\frac{\partial\theta}{\partial s^a}=(\gamma_{12}^1-\gamma_{21}^1)\frac{\partial\theta}{\partial s^1}+(\gamma_{12}^2-\gamma_{21}^2)\frac{\partial\theta}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^1\partial s^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2\partial s^1}=m\frac{\partial\theta}{\partial s^1}+n\frac{\partial\theta}{\partial s^2}$$

ceea ce ne dă

$$\frac{\partial\overline{n}}{\partial\overline{s}^1}-\frac{\partial\overline{m}}{\partial\overline{s}^2}-\overline{m}^2-\overline{n}^2=\frac{\partial n}{\partial s^1}-\frac{\partial m}{\partial s^2}-m^2-n^2$$

deci

$$A=\frac{\partial n}{\partial s^1}-\frac{\partial m}{\partial s^2}-m^2-n^2 \tag{21}$$

este un invariant absolut.

Condiția

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^1\partial s^3}-\frac{\partial^2\theta}{\partial s^3\partial s^1}=\omega_{13}^a\frac{\partial\theta}{\partial s^a}$$

dă

$$\left[\frac{\partial\overline{m}}{\partial\overline{s}^3}-(\overline{p}-\overline{a})\overline{m}+\overline{\alpha}\,\overline{n}\right]\cos\theta+\left[\frac{\partial\overline{n}}{\partial\overline{s}^3}-(\overline{p}-\overline{a})\overline{n}-\overline{\alpha}\,\overline{m}\right]\sin\theta=$$

$$=\frac{\partial m}{\partial s^3}-(p-a)m+\alpha n$$

Avem deci

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial s^3}-(p-a)m+\alpha n&=0\\ \frac{\partial n}{\partial s^3}-(p-a)n-\alpha m&=0\end{aligned}\tag{II}$$

Să calculăm componentele tensorilor de curbură contractați r_{cd} și γ_{bd}. Avem

$$r_{cd}=\frac{\partial\gamma_c}{\partial s}-\frac{\partial\gamma_d}{\partial s}+\gamma_\nu\omega_{cd}^p\qquad(\gamma_c=\gamma_{ac}^a)$$

Obținem

$$\begin{aligned}r_{12}&=2\beta(2p+\gamma_{33}^3)\\ r_{23}&=-2\frac{\partial p}{\partial s^2}-\frac{\partial\gamma_{33}^3}{\partial s^2}\end{aligned}\tag{22}$$

$$r_{31} = 2\frac{\partial p}{\partial s^1} - \frac{\partial \gamma_{33}^3}{\partial s^1}$$

Componentele tensorului γ_{bd} le calculăm după formula

$$\gamma_{bd} = \gamma_{bad}^a = \frac{\partial \gamma_{ba}^a}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma_{bd}^a}{\partial s^a} + \gamma_{pa}^a \gamma_{bd}^p - \gamma_{pd}^a \gamma_{ba}^p + \gamma_{pb}^a \omega_{ad}^p$$

vom găsi:

$$\gamma_{11} = A - \frac{\partial b}{\partial s^3} + 2b(a-p) + b\gamma_{33}^3$$

$$\gamma_{22} = A - \frac{\partial b}{\partial s^3} + 2b(a-p) + b\gamma_{33}^3 \qquad (23)$$

$$\gamma_{33} = 2\left(\frac{\partial a}{\partial s^3} + a\gamma_{33}^3 + \alpha^2 - a^2\right)$$

Apoi

$$\gamma_{12} = -\frac{\partial \beta}{\partial s^3} + 2a\beta + \beta\gamma_{33}^3$$

$$\gamma_{21} = -\frac{\partial \beta}{\partial s^3} + 2a\beta - 4p\beta - \beta\gamma_{33}^3$$

$$\gamma_{23} = -\frac{\partial p}{\partial s^2} - 2m(p-a) + 2n\alpha$$

$$\gamma_{32} = +\frac{\partial p}{\partial s^2} - 2m(p-a) + 2n\alpha + \frac{\partial \gamma_{33}^3}{\partial s^2}$$

$$\gamma_{13} = -\frac{\partial p}{\partial s^1} + 2m\alpha + 2n(p-a)$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial p}{\partial s^1} + 2m\alpha + 2n(p-a) + \frac{\partial \gamma_{33}^3}{\partial s^1}$$

Obţinem prin adunare

$$\gamma_{12} + \gamma_{21} = -2\frac{\partial \beta}{\partial s^3} + 4\beta(a-p)$$

$$\gamma_{23} + \gamma_{32} = 4m(a-p) + 4n\alpha + \frac{\partial \gamma_{33}^3}{\partial s^2} \qquad (24)$$

$$\gamma_{31} + \gamma_{13} = 4m\alpha + 4n(p-a) + \frac{\partial \gamma_{33}^3}{\partial s^1}$$

Acum observăm că pentru un invariant absolut $I = \bar{I}$ avem prin derivare

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial s^1} &= \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^1}\cos\theta + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2}\sin\theta \\
\frac{\partial I}{\partial s^2} &= -\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^1}\sin\theta + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2}\cos\theta \qquad (25) \\
\frac{\partial I}{\partial s^3} &= \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^3}
\end{aligned}$$

Deci trebue să avem

$$\frac{\partial I}{\partial s^1} = \frac{\partial I}{\partial s^2} = 0$$

Condiția de integrabilitate a acestor ecuații

$$\frac{\partial^2 I}{\partial s^1 \partial s^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial s^2 \partial s^1} = \omega_{12}^a \frac{\partial I}{\partial s^a}$$

ne dă

$$\omega_{12}^a \frac{\partial I}{\partial s^3} = 0$$

adică

$$\beta \frac{\partial I}{\partial s^3} = 0$$

Avem două cazuri de considerat, după cum $\beta \neq 0$ sau $\beta = 0$.
In primul caz, avem

$$\frac{\partial I}{\partial s^1} = 0, \frac{\partial I}{\partial s^2} = 0, \frac{\partial I}{\partial s^3} = 0$$

deci toți invarianții absoluți trebue să fie constanți. Adică a, α, b, β, p, γ_{33}^3 și A sunt constante.

Să considerăm covarianții bilineari Δs^a, avem

$$\begin{aligned}
\Delta s^1 &= m\ [ds^1 ds^2] + (p - a)\,[ds^1 ds^3] + \alpha\,[ds^2 ds^3] \\
\Delta s^2 &= n\ [ds^1 ds^2] - \alpha\,[ds^1 ds^3] + (p - a)\,[ds^2 ds^3] \qquad (26) \\
\Delta s^3 &= 2\beta\,[ds^1 ds^2]
\end{aligned}$$

Deci, acești covarianți se exprimă cu ajutorul constantelor p, a, α și β și a expresiilor m și n.

Presupunem mai întâi că invariantul A este nul.
In acest caz, sistemul cu diferențiale totale

$$\frac{\partial \theta}{\partial s^1} = -m, \frac{\partial \theta}{\partial s^2} = -n, \frac{\partial \theta}{\partial s^3} = 0 \qquad (27)$$

care se obţine din sistemul cu diferenţiale (I), punând $\overline{m} = 0$, $\overline{n} = 0$, este complet integrabil în virtutea condiţiilor (II). Rezultă că putem alege pe θ astfel ca $\overline{m}$ şi $\overline{n}$ să fie nuli şi rotaţia este în acest caz θ = constant, deci independentă de punctul considerat, adică de x^1, x^2 şi x^3. Putem enunţa următoarea teoremă:

Spaţiul A_3 ai cărei coeficienţi de conexiune sunt nuli, afară de

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a,\ \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha$$
$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b,\ \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta$$
$$\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p,\ \gamma^3_{33}$$

unde a, α, b, β, p, γ^3_{33} sunt nişte constante, admite rotaţii în fiecare punct.

Pentru determinarea congruenţelor, să observăm că avem în acest caz

$$\begin{aligned} \Delta s^1 &= (p - a)\,[ds^1\, ds^3] + \alpha\,[ds^2\, ds^3] \\ \Delta s^2 &= -\alpha\,[ds^1\, ds^3] + (p - a)\,[ds^2\, ds^3] \\ \Delta s^3 &= 2\beta\,[ds^1\, ds^2] \end{aligned} \tag{28}$$

şi identităţile lui Jacobi (identităţile fundamentale) ne dau

$$\beta\,(p - a) = 0$$

ţinând seama că $\beta \neq 0$, avem

$$p = a$$

şi covarianţii se scriu

$$\begin{cases} \Delta s^1 = \alpha\,[ds^2\, ds^3] \\ \Delta s^2 = -\alpha\,[ds^1\, ds^3] \\ \Delta s^3 = 2\beta\,[ds^1\, ds^2] \end{cases} \tag{28'}$$

Problema revine la a găsi forme ds^1, ds^2, ds^3 care satisfac acestei structuri. Putem lua de exemplu

$$\begin{aligned} ds^1 &= dx^1 - \alpha x^2\, dx^2 \\ ds^2 &= dx^2 + \alpha x^1\, dx^3 \\ ds^3 &= dx^3 + 2\beta x^2\, dx^1 + \alpha x^3 (x^1\, dx^1 + x^2\, dx^2) \end{aligned}$$

Avem deci, pentru momentele congruenţelor, valorile

$$\lambda^1_1 = 1, \qquad \lambda^1_2 = 0, \qquad \lambda^1_3 = -\alpha x^2$$
$$\lambda^2_1 = 0, \qquad \lambda^2_2 = 1, \qquad \lambda^2_3 = \alpha x^1$$
$$\lambda^3_1 = 2\beta x^2 + \alpha x^1 x^3, \qquad \lambda^3_2 = \alpha x^2 x^3, \qquad \lambda^3_3 = 1$$

In acest mod, putem obţine parametrii congruenţelor μ^i_a şi apoi, cu ajutorul formulelor

$$\Gamma^i_{jk} = \left(-\frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^k} + \gamma^a_{bc}\ \lambda^b_j\ \lambda^c_k \right) \mu^i_a \tag{III}$$

vom obține componentele conexiunii în sistemul de coordonate x^1, x^2, x^3.

Cât despre componentele tensorilor de curbură contractați, avem

$$r_{12} = 2\beta(2p + \gamma_{33}^3) = M$$

$$r_{23} = 0$$

$$r_{31} = 0$$

deoarece toți invarianții sunt constanți.

Apoi

$$\gamma_{11} = b\gamma_{33}^3, \quad \gamma_{22} = b\gamma_{33}^3, \quad \gamma_{33} = 2(a\gamma_{33}^3 + \alpha^2 - a^2)$$

și

$$\gamma_{12} + \gamma_{21} = 0, \quad \gamma_{23} + \gamma_{32} = 0, \quad \gamma_{31} + \gamma_{13} = 0$$

Se verifică în acest mod că, pentru aceste spații, tensorii de curbură contractați se reduc la forma canonică cerută.

Să presupunem acum că $A \neq 0$. Folosim relațiile

$$\frac{\partial n}{\partial s^1} - \frac{\partial m}{\partial s^2} - m^2 - n^2 = A \tag{21}$$

$$\frac{\partial m}{\partial s^3} = (p - a)\, m - \alpha n$$

$$\frac{\partial n}{\partial s^3} = (p - a)\, n + \alpha m \tag{II}$$

Din (II), prin derivate, obținem

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s^2 \partial s^3} = (p - a)\frac{\partial m}{\partial s^2} - \alpha \frac{\partial n}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial s^1 \partial s^3} = (p - a)\frac{\partial n}{\partial s^1} + \alpha \frac{\partial m}{\partial s^1} \tag{29}$$

Derivând (21) în raport cu s^3, avem

$$\frac{\partial^2 n}{\partial s^3 \partial s^1} - \frac{\partial^2 m}{\partial s^3 \partial s^2} - 2m\frac{\partial m}{\partial s^3} - 2n\frac{\partial n}{\partial s^3} = 0 \tag{29'}$$

dar

$$\frac{\partial^2 n}{\partial s^3 \partial s^1} = \frac{\partial^2 n}{\partial s^1 \partial s^3} + w_{31}^a \frac{\partial n}{\partial s^a} = \alpha\left(\frac{\partial m}{\partial s^1} + \frac{\partial n}{\partial s^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s^3 \partial s^2} = \frac{\partial^2 m}{\partial s^2 \partial s^3} + w_{32}^a \frac{\partial m}{\partial s^a} = -\alpha\left(\frac{\partial m}{\partial s^1} + \frac{\partial n}{\partial s^2}\right)$$

Înlocuind în (29'), avem

$$\alpha\left(\frac{\partial m}{\partial s^1} + \frac{\partial n}{\partial s^2}\right) = 2(p - a)\,(m^2 + n^2) \tag{30}$$

derivând (30) în raport cu s^3, avem

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 m}{\partial s^3 \partial s^1}+\frac{\partial^2 n}{\partial s^3 \partial s^2}\right)=2(p-a)\left(m\frac{\partial m}{\partial s^3}+n\frac{\partial n}{\partial s^3}\right) \tag{30'}$$

Relaţiile (II), prin derivare, dau

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s^1 \partial s^3}=(p-a)\frac{\partial n}{\partial s^1}-\alpha\frac{\partial n}{\partial s^1}$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial s^2 \partial s^3}=(p-a)\frac{\partial n}{\partial s^2}+\alpha\frac{\partial m}{\partial s^2}$$

însă

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s^3 \partial s^1}=\frac{\partial^2 m}{\partial s^1 \partial s^3}+(a-p)\frac{\partial m}{\partial s^1}+\alpha\frac{\partial n}{\partial s^2}=\alpha\left(\frac{\partial m}{\partial s^2}-\frac{\partial n}{\partial s^1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial s^2 \partial s^2}=\frac{\partial^2 n}{\partial s^2 \partial s^3}-\alpha\frac{\partial n}{\partial s^1}+(a-p)\frac{\partial n}{\partial s^2}=\alpha\left(\frac{\partial m}{\partial s^2}-\frac{\partial n}{\partial s^1}\right)$$

Inlocuind în (30'), avem

$$\alpha^2\left(\frac{\partial n}{\partial s^2}-\frac{\partial n}{\partial s^1}\right)=(p-a^2\,m^2+n^2 \tag{31}$$

Scoţând valoarea expresiei $\frac{\partial m}{\partial s^2}-\frac{\partial n}{\partial s^1}$ din (21) şi înlocuind-o în (31) avem

$$-\alpha^2(A+m^2+n^2)+(p-a)^2\,(m^2+n^2)=0. \tag{31'}$$

Pentru a fi satisfăcută această relaţie, trebue să avem sau

$$\alpha=0,\ p=a$$

sau, în cazul când $\alpha\neq 0$

$$A=-\frac{(m^2+n^2)\,(\alpha^2+(p-a)^2)}{\alpha^2}$$

Presupunem că suntem în al doilea caz. Atunci rezultă că

$$m^2+n^2=k^2 \tag{31''}$$

fiind o constantă oarecare.

Derivând (31'') în raport cu s^3, avem:

$$m\frac{\partial m}{\partial s^3}+n\frac{\partial n}{\partial s^3}=0$$

Inlocuind derivatele parţiale $\frac{\partial m}{\partial s^3}$ şi $\frac{\partial n}{\partial s^3}$ cu valorile lor din (II), căpătăm

$$(m^2+n^2)\,(p-a)=0$$

de unde rezultă

$$p = a$$

și

$$A = -k^2$$

Atunci relațiile (21) și (22) ne dau

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial s^1} - \frac{\partial m}{\partial s^2} &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial s^1} + \frac{\partial n}{\partial s^2} &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Punem

$$m = k \cos \varphi, \qquad n = k \sin \varphi$$

Inlocuind în (II), avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s^3} = \alpha$$

Inlocuind în (32), avem

$$-\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s^1} - \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s^2} = 0$$

$$\cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s^1} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s^2} = 0$$

De unde rezultă sistemul

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s^1} = 0\ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s^2} = 0\ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s^3} = 0 \tag{33}$$

Condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^1 \partial s^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2 \partial s^1} = \omega_{12}^a \frac{\partial \varphi}{\partial s^a}$$

ne dă

$$\omega_{12}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial s^3} = 0$$

sau

$$2\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s^3} = 0$$

Rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s^3} = 0$$

și

$$\alpha = 0$$

Am ajuns la o contradicție, deoarece am presupus $\alpha \neq 0$. Trebue să luăm dela început $\alpha = 0$ și $p = a$, m și n rămânând oarecare. Covarianții bilineari sunt, în acest caz

$$\Delta s^1 = m\,[ds^1\ ds^2]$$
$$\Delta s^2 = n\,[ds^1\ ds^2] \tag{34}$$
$$\Delta s^3 = 2\beta[ds^1\ ds^2]$$

Putem lua

$$ds^1 = \lambda dx^1, \quad ds^2 = \mu dx^2, \quad ds^3 = dx^3 + \rho dx^1 \tag{34'}$$

unde λ, μ și ρ sunt funcții numai de x^1 și x^2.

Inlocuind în (34), avem

$$m = \frac{\lambda_{x^2}}{\lambda\mu}, \quad n = -\frac{\mu_{x^1}}{\lambda\mu}, \quad 2\beta = \frac{1}{\lambda\mu}\frac{\partial\rho}{\partial x^2} \tag{34''}$$

apoi

$$\frac{\partial n}{\partial s^1} = \frac{\partial n}{\partial x^1}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{\mu_{x^1}}{\lambda\mu}\right)\frac{1}{\lambda} = -\frac{\mu_{(x^1)^2}}{\lambda^2\mu} + \frac{\mu_{x^2}}{\lambda}\frac{\lambda_{x^1}\mu + \lambda\mu_{x^1}}{\lambda^2\mu^2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial s^2} = \frac{\partial m}{\partial x^2}\frac{1}{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\lambda_{x^2}}{\lambda\mu}\right)\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda_{(x^2)^2}}{\lambda\mu^2} + \frac{\lambda_{x^2}}{\mu}\frac{\lambda_{x^2}\mu + \lambda\mu_{x^2}}{\lambda^2\mu^2}$$

Inlocuind în (21), avem

$$-\frac{\mu_{(x^1)^2}}{\lambda^2\mu} - \frac{\lambda_{(x^2)^2}}{\lambda\mu^2} + \frac{\mu_{x^1}}{\lambda}\frac{\lambda_{x^1}\mu + \lambda\mu_{x^1}}{\lambda^2\mu^2} + \frac{\lambda_{x^2}}{\mu}\frac{\lambda_{x^2}\mu + \lambda\mu_{x^2}}{\lambda^2\mu^2} - \frac{(\lambda_{x^2})^2}{\lambda^2\mu^2} - \frac{(\mu_{x^1})^2}{\lambda^2\mu^2} = A$$

sau

$$\lambda\mu\,(\mu\mu_{(x^2)^2} + \lambda\lambda_{(x^2)^2}) - \lambda^2\lambda_{x^2}\mu_{x^2} - \mu^2\lambda_{x^1}\mu_{x^1} + A\,\lambda^3\mu^3 = 0 \tag{35}$$

λ și μ satisfac acestei ecuații cu derivate parțiale în timp ce ρ satisface ultimei ecuații (34'').

Dacă μ este o funcție dată, ecuația (35) ne va determina pe λ printr'o ecuație de ordinul al doilea. Putem spune deci că soluția ecuațiilor (35) și ultimei (34'') depinde de o funcție arbitrară de două variabile și de trei funcții arbitrare de câte o variabilă. Avem următoarea teoremă:

Spațiul A_3 având sistemul de congruențe

$$ds^1 = \lambda dx^1,\ ds^2 = \mu dx^2,\ ds^3 = dx^3 + \rho dx^1$$

unde λ, μ și ρ sunt funcții de x^1, x^2 legate de ecuația (35) (*A fiind o constantă) și de ultima ecuație* (34''), *are rotații definite de formulele* (I) *dacă toți coeficienții de conexiune sunt nuli afară de*

$$\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m, \quad \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n$$

unde m și n sunt definiți de primele formule (34'') *și afară de*

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = a, \quad \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta$$
$$\gamma^3_{21} = \gamma^3_{22} = b, \quad \gamma^3_{33}$$

unde a, b, β și γ^3_{33} sunt niște constante.

Pentru componentele tensorului de curbură contractați, vom avea în acest caz

$$r_{12} = 2\beta(2a + \Gamma^3_{33}) \ , \ r_{23} = 0 \ , \ r_{31} = 0$$
$$\Gamma_{11} = A + b\Gamma^3_{33} \ , \ \Gamma_{22} = A + b\Gamma^3_{33} \ , \ \Gamma_{33} = 2a(\Gamma^3_{33} - a)$$
$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = 0 \ , \ \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = 0 \ , \ \Gamma_{31} + \Gamma_{13} = 0$$

In cazul $\beta = 0$, covariantul bilinear Δs^3 este nul, deci forma ds^3 este o diferențială totală exactă.

Putem deci lua $ds^3 = dx^3$ și invarianții α, $p - a$, A, Γ^3_{33} depind numai de x^3. Deoarece pentru $dx^3 = 0$, putem lua $ds^1 = e^{-u}\,dx^1$, $ds^2 = e^{-v}\,dx^2$, rezultă că putem lua în general

$$ds^1 = e^{-u}\,(dx^1 - \beta dx^3)$$
$$ds^2 = e^{-v}\,(dx^2 - \gamma dx^3)$$
$$ds^3 = dx^3$$

Inlocuind în covarianții bilineară (26), se obține

$$n = e^{u+v}\frac{\partial v}{\partial x^1} \ , \ m = -e^{u+v}\frac{\partial u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x^1} = p - a + \beta\frac{\partial u}{\partial x^1} + \gamma\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x^3} \ , \ \frac{\partial \beta}{\partial x^2} = \alpha e^{u-v}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^1} = -\alpha e^{u-v} \ , \ \frac{\partial \gamma}{\partial x^2} = p - a + \beta\frac{\partial v}{\partial x^1} + \gamma\frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x^3}$$

Scriind că derivatele lui β și γ în raport cu x^1, x^2 sunt simetrice, se obțin două ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea în funcțiile u și v având drept coeficienți invarianții α, $p - a$. Inlocuind de asemenea valorile lui n și m în condițiile I, II, obținem alte trei ecuații cu derivate parțiale de al doilea ordin în u, v și problema revine la a vedea dacă aceste cinci ecuații de al doilea ordin în două funcții u și v au soluții.

Să presupunem că suntem în cazul particular în care invarianții α și $p - a$ sunt nuli și m și n independenți de x^3. In acest caz, putem lua $\beta = \gamma = 0$, astfel că u, v sunt funcții de x^1, x^2 și satisfac condiției unice (I), deci avem

$$e^u\frac{\partial}{\partial x^1}\left(e^{u+v}\frac{\partial v}{\partial x^1}\right) + e^v\frac{\partial}{\partial x^2}\left(e^{u+v}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) - e^{2u+2v}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = A \quad (36)$$

și A rezultă că este o constantă.

Putem lua deci una din funcțiile u, v, de exemplu v arbitrară și atunci u depinde încă de 2 funcții arbitrare de o variabilă. Rezultă că soluția problemei de o funcție arbitrară de 2 variabile și de 2 funcții arbitrare de câte o variabilă.

Dacă avem $v = -u$, ecuația (36) se scrie

$$e^u\left(\frac{\partial^2 u}{(\partial x)} - \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2}\right) = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2\right) = A$$

Dacă A este o constantă negativă $-\varkappa^2$, se poate satisface această ecuație, luând

$$u = a_1 x^1 + a_2 x^2 \quad (\varkappa^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2)$$

ceea ce ne dă

$$ds^1 = e^{-a_1 x^1 - a_2 x^2}\,dx^1 \ ; \ ds = e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}\,dx^2 \ ; \ ds^3 = dx^3.$$

О ПРОСТРАНСТВАХ A_3, ДОПУСКАЮЩИХ ВРАЩЕНИЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пусть дано пространство A_3; оно обладает двумя тензорами кривизны:

$$\gamma^{a}_{bud} = \gamma_{bd}, \quad \gamma^{a}_{acd} = r_{cd} \tag{4}$$

В общем случае, когда эти тензоры не являются выродившимися, можно привести эти тензоры к канонической форме

$$r_{12} = M, \; r_{23} = 0, \; r_{31} = 0,$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1, \; \gamma_{12} + \gamma_{21} = 0, \; \gamma_{23} + \gamma_{32} = 0, \; \gamma_{31} + \gamma_{13} = 0,$$

и преобразования конгруентностей, сохраняющих эту каноническую форму, даны формулами:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= \cos\theta \, . \, ds^1 - \sin\theta \, . \, ds^2, \\ d\bar{s}^2 &= \sin\theta \, . \, ds^1 + \cos\theta \, . \, ds^2, \\ d\bar{s}^3 &= ds^3, \end{aligned} \tag{7}$$

следовательно группа допускает вращение в каждой точке.

Если соотношения в конечном виде пространства содержат θ и θ_0 есть решение этих соотношений, то можно, частным вращением, сделать $\theta_0 = 0$, следовательно, можно присоединить с пространством три инвариантных формы ds^1, ds^2, ds^3. В этом случае, вопрос нахождения инвариантов пространства сводится к «Специальной проблеме эквивалентности» Е. Картана, следовательно, инварианты являются коэффициентами W^{a}_{bc} билинейных ковариантов $\triangle s^1$, $\triangle s^2$, $\triangle s^3$, и производные этих коэффициентов относительно s^i $(i=1,2,3)$. Пространство A_3 допускает вращение (7), если все соотношения членов в конечном виде являются идентично нулевыми.

Автор ставит обратно вопрос о нахождении пространств A_3, допускающих вращение, следовательно группу преобразования (7).

Получается, что для этих пространств надо иметь соотношения

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a, \; \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha \tag{18'}$$

$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b, \; \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta \tag{18''}$$

$$\gamma^2_{11} = \gamma^1_{21} = m, \; \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n \tag{18'''}$$

$$\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p \tag{19'}$$

$$\gamma^1_{33} = \gamma^2_{33} = \gamma^3_{13} = \gamma^3_{23} = \gamma^3_{31} = \gamma^3_{32} = \gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = \gamma^1_{23} = \gamma^2_{13} = 0 \tag{20'}$$

и имеем теорему:

Если пространство A_3 допускает группу преобразования конгруенций (7), *то можно выбрать систему конгруентности таким образом, чтобы получить формулы* (18'), (18''), (18'''), (19'), (20'), где a, α, b, β p

и γ_{33}^3 суть абсолютные инварианты и функция θ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{ds^1} &= \overline{m}\cos\theta + \overline{n}\sin\theta - m\\ \frac{\partial\theta}{ds^2} &= -\overline{m}\sin\theta + \overline{n}\cos\theta - n\\ \frac{\partial\theta}{ds^3} &= 0.\end{aligned} \tag{I}$$

Из условий интегрируемости этой системы вытекает, что выражение

$$A = \frac{\partial n}{ds^1} - \frac{\partial m}{ds^2} - m^2 - n^2 \tag{21}$$

есть также абсолютный инвариант, и функции m и n удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{ds^3} &= (p-a)\ m - \alpha n\\ \frac{\partial n}{ds^3} &= (p-a)\ n + \alpha m.\end{aligned} \tag{II}$$

В дальнейшем находим, что если I есть абсолютный инвариант, то имеем

$$\beta\frac{\partial I}{ds^3} = 0.$$

Следовательно можно рассматривать два случая $\beta \neq 0$, $\beta = 0$. В первом случае

$$\frac{\partial I}{\partial s^1} = 0,\quad \frac{\partial I}{\partial s^2} = 0,\quad \frac{\partial I}{\partial s^3} = 0$$

все инварианты суть константы.

В предположении $A = 0$, можно ставить $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равными нулю и вращение будет $\theta = \text{const}$.

Получаем следующую теорему:

Пространство A_3, *коэффициенты связности которого нулевые, исключая* $\gamma_{31}^1 = \gamma_{32}^2 = a$, $\gamma_{31}^2 = -\gamma_{32}^1 = \alpha$, $\gamma_{11}^3 = \gamma_{22}^3 = b$, $\gamma_{12}^3 = -\gamma_{21}^3 = \beta$,

$$\gamma_{13}^1 = \gamma_{23}^2 = p,\ \gamma_{33}^3,$$

где a, α, b, β, p и γ_{33}^3 суть *константы*, *допускает вращения во всех точках*.

В предположении, что $A \neq 0$ приходим к следующей теореме.

Пространство A_3 *с системой конгруенций*

$$ds^1 = \lambda\ dx^1,\ ds^2 = \mu\ dx^2,\ ds^3 = dx^3 + \rho\ dx^1,$$

где λ, μ и ρ *суть функции от* x^1, x^3, *связанные уравнениями*

$$\begin{cases} \lambda\,\mu\,(\mu\,\mu_{(x^1)^2} + \lambda\,\lambda_{(x^2)^2}) - \lambda^2\,\lambda_{x^2}\,\mu_{x^2} - \mu^2\,\lambda_{x^1}\,\mu_{x^2} + A\,\lambda^2\,\mu^3 = 0 \\ \dfrac{\partial\,\rho}{ds^2} = 2\,\beta\,\lambda\,\mu \end{cases}$$

(A = константа), *имеет вращения, определенные* (I), *если все коэффициенты связности нулевые, исключая*

$$\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m,\ \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n,$$

где m *и* n *определены формулами*

$$m = \frac{\lambda_{x^2}}{\lambda\mu},\quad n = -\frac{\mu_{x^1}}{\lambda\,\mu},$$

и исключая

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = a,\ \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta,\ \gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b,\ \gamma^3_{33},$$

где a, β, b *и* γ^3_{32} *суть константы.*

В случае $\beta = 0$ показываем, что имеются пространства A_3, коэффициенты связности которых зависят от произвольных функций.

SUR LES ESPACES A_3 QUI ADMETTENT UNE ROTATION

(RÉSUMÉ)

Étant donné un espace A_3, il possède deux tenseurs de courbure contractés:

$$\gamma^a_{bad} = \gamma_{bd},\quad \gamma^a_{acd} = r_{cd} \tag{4}$$

Dans le cas général où ces tenseurs ne sont pas dégénérés, on peut réduire ces tenseurs à la forme canonique

$$r_{12} = M,\quad r_{23} = 0,\quad r_{31} = 0$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1,\quad \gamma_{12} + \gamma_{21} = 0,\quad \gamma_{23} + \gamma_{32} = 0,\quad \gamma_{31} + \gamma_{13} = 0$$

et les transformations de congruences qui conservent cette forme canonique sont données par les formules:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= \cos\theta \cdot ds^1 - \sin\theta \cdot ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= \sin\theta \cdot ds^1 + \cos\theta \cdot ds^2 \\ d\bar{s}^3 &= ds^3 \end{aligned} \tag{7}$$

donc le groupe admet une rotation dans chaque point.

Si les relations en termes finis de l'espace contiennent θ, et θ_0 est une solution de ces relations, on peut, par une rotation particulière, faire $\theta_0 = 0$, on peut donc associer à l'espace trois formes invariantes ds^1, ds^2, ds^3. Dans ce cas, la question de trouver les invariants de l'espace se réduit au « Problème spécial d'équivalence » de E. Cartan, donc les invariants sont les coefficients w^a_{bc}

des covariants bilinéaires Δs^1, Δs^2, Δs^3 et les dérivées de ces coefficients par rapport aux s^i ($i = 1, 2, 3$). L'espace A_3 admet une rotation (7) si toutes les relations en termes puis sont identiquement nulles.

L'Auteur se pose la question inverse, de trouver les espaces A_3 qui admettent une rotation, donc un groupe de transformation (7).

Il en résulte que, pour ces espaces, on doit avoir les relations

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a, \quad \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha \tag{18'}$$

$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b, \quad \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta \tag{18''}$$

$$\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m, \quad \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n \tag{18'''}$$

$$\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p \tag{19'}$$

$$\gamma^1_{33} = \gamma^2_{33} = \gamma^3_{13} = \gamma^3_{23} = \gamma^3_{31} = \gamma^3_{32} = \gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = \gamma^1_{23} = \gamma^2_{13} = 0 \tag{20'}$$

et nous avons le théorème:

Si un espace A_3 admet le groupe de transformation de congruences (7), *on peut choisir un système de congruences de façon à obtenir les formules* (18'), (18''), (18'''), (19'), (20') *où* a, α, b, β, p *et* γ^3_{33} *sont des invariants absolus et la fonction* θ *satisfait le système*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial s^1} &= \overline{m}\cos\theta + \overline{n}\sin\theta - m \\ \frac{\partial\theta}{\partial s^2} &= -\overline{m}\sin\theta + \overline{n}\cos\theta - n \\ \frac{\partial\theta}{\partial s^3} &= 0 \end{aligned} \tag{I}$$

Des conditions d'intégrabilité de ce système il résulte que l'expression

$$A = \frac{\partial n}{\partial s^1} - \frac{\partial m}{\partial s^2} - m^2 - n^2 \tag{21}$$

est aussi un invariant absolu et les fonctions m et n satisfont les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial s^3} &= (p - a)\, m - \alpha n \\ \frac{\partial n}{\partial s^3} &= (p - a)\, n + \alpha m \end{aligned} \tag{II}$$

Puis on trouve que si I est un invariant absolu, on a

$$\beta\frac{\partial I}{\partial s^3} = 0 \tag{26}$$

On peut donc considérer deux cas $\beta \neq 0$, $\beta = 0$. Dans le premier cas

$$\frac{\partial I}{\partial s^1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial s^3} = 0$$

tous les invariants sont des constantes.

Dans l'hypothèse $A = 0$, on peut annuler $\overline{m}$ et $\overline{n}$ et la rotation devient $\theta = \text{const.}$

Nous avons le théorème suivant:

L'*espace* A_3 *qui a les coefficients de connexion nuls, sauf*

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a, \ \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha, \ \gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b,$$
$$\gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta, \ \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p, \ \gamma^3_{33}$$

où a, α, b, β, p *et* γ^3_{33} *sont des constantes, admet des rotations dans tous les points.*

Dans l'hypothèse $A \neq 0$ on arrive au théorème suivant.

L'espace A_3 *ayant le système de congruences*

$$ds^1 = \lambda dx^1, \quad ds^2 = \mu dx^2, \quad ds^3 = dx^3 + \rho dx^1$$

où λ, μ *et* ρ *sont des fonctions de* x^1, x^2 *liées par les équations*

$$\begin{cases} \lambda\mu\,(\mu\mu_{(x^1)^2} + \lambda\lambda_{(x^2)^2}) - \lambda^2\lambda_{x^2}\,\mu_{x^2} - \mu^2\lambda_{x^1}\,\mu_{x^1} + A\lambda^3\mu^3 = 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial s^2} = 2\beta\lambda\mu \end{cases}$$

(*A* étant une constante), *a des rotations définies par* (I) *si tous les coefficients de connexion sont nuls, sauf*

$$\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m, \ \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n$$

où m *et* n *sont définis par les formules*

$$m = \frac{\lambda_{x^2}}{\lambda\mu}, \quad n = -\frac{\mu_{x^1}}{\lambda\mu}$$

et sauf

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = a, \ \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta, \ \gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b, \ \gamma^3_{33}$$

où a, β, b *et* γ^3_{33} *sont des constantes.*

Dans le cas $\beta = 0$, on montre qu'il y a des espaces A_3 dont les coefficients de connexion dépendent des fonctions arbitraires.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Lecțiuni de Geometrie Diferențială*, v. I.
2. Luigi Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*. Pisa, 1918, p. 538.
3. St. Petrescu, Studii și Cercetări Matematice, 1951, t. II, Nr. 3–4, p. 322.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 1—2, 1953

ASUPRA METODEI ITERAŢIEI, APLICATĂ LA UN SISTEM DE ECUAŢII LINEARE

DE

CONST. C. POPOVICI

In multe probleme de statică, hidraulică, geodezie şi electricitate, rezolvarea sistemelor de ecuaţii lineare constitue cea mai mare dificultate.

Deşi, din punct de vedere teoretic, rezolvarea sistemelor este soluţionată prin metoda determinanţilor, totuşi, în aplicaţiile numerice, această metodă nu poate fi folosită decât pentru sistemele cu puţine necunoscute. In cazul sistemelor cu mai multe necunoscute, metoda determinanţilor nu mai este de aplicat şi trebue să recurgem, fie la metoda eliminării, fie la metoda iteraţiei.

Dintre aceste două metode, cea a iteraţiei (a aproximaţiilor succesive), este cea mai des întrebuinţată, atât din cauza simplităţii sale, cât şi din cauza posibilităţii de verificare şi corectare continuă a calculelor efectuate.

In special iteraţia este folosită în metoda distribuirii momentelor, metodă ce astăzi este utilizată aproape exclusiv în rezolvarea sistemelor elastice.

Insă metoda iteraţiei are şi desavantajul că nu orice sistem poate fi rezolvat prin această metodă, iar unele sisteme se rezolvă greu, fiind necesar să se execute un număr prea mare de aproximaţii succesive, pentru a obţine rezultate satisfăcătoare.

Prima problemă ce se pune deci, în legătură cu metoda iteraţiei, este de a recunoaşte dacă un anumit sistem poate fi rezolvabil prin aproximaţii succesive şi apoi, ce transformări i s'ar putea aduce sistemului pentru a se reduce numărul iteraţiilor necesare, ce număr de iteraţii trebue efectuate pentru a obţine valorile necunoscutelor cu o anumită aproximaţie, etc.

Aceste probleme sunt soluţionate, atât din punct de vedere teoretic, cu ajutorul valorilor proprii ale matricei coeficienţilor, cât şi prin criterii mai simple, care permit o recunoaştere imediată a convergenţei unui sistem.

1. Se ştie [3], [5] că un sistem poate fi rezolvat prin iteraţie simplă, dacă valorile proprii ale matricei sistemului sunt, toate, de modul mai mic decât 1. Această condiţie conduce la alt criteriu de convergenţă al procedeului de iteraţie, dat de M i s s e s, şi anume:

Un sistem este convergent, dacă matricea lui este simetrică şi definită pozitiv. Profesorii sovietici I. M. Rabinovici şi S. A. Bernstein au arătat [7] că sistemele de ecuaţii elastice îndeplinesc întotdeauna această condiţie, încât rezultă că în acest caz nu trebue să ne preocupe convergenţa sistemului. Totuşi, se mai pune problema gradului de convergenţă a unor asemenea sisteme şi în ce mod poate fi mărită această convergenţă. Aceste probleme au fost de asemenea rezolvate cu ajutorul normelor matricelor şi vectorilor [3], iar practic, prin transformări simple [2]; totuşi, pentru calculele numerice, aplicarea procedeelor de iteraţie mai întâmpină unele dificultăţi.

In cele ce urmează, vom stabili pe o cale directă, condiţia de convergenţă a unui sistem de ecuaţii lineare, în procesul de iteraţie simplă, ceea ce ne va conduce la unele expresii algebrice simple ale valorilor iterate şi va permite unele precizări asupra condiţiilor de convergenţă.

2. Să considerăm sistemul de ecuaţii lineare (1) şi să-i aplicăm procedeul iteraţiei simple (G a u s s) *

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i + a_{jo} = 0 \quad ^{**}(j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Dacă $x_i^{(m)}$ şi $x_i^{(m+1)}$ sunt valorile necunoscutei x_i, obţinute după a $m-a$ şi a $(m+1) - a$ iteraţie, vom avea:

$$a_{i1}\, x^{(m)} + a_{i2}\, x_2^{(m)} + \ldots\, a_{ii}\, x_i^{(m+1)} + \ldots\, a_{in}\, x_n^{(m)} + a_{i\,0=0} (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă din aceste egalităţi scădem ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului (1) şi notăm:

$$z_i^{(m)} = x_i^{(m)} - x_i \tag{2}$$

obţinem:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\, z_1^{(m+1)} + a_{12}\, z_2^{(m)} + a_{13}\, z_3^{(m)} + \ldots\, a_{1n}\, z_n^{(m)} &= 0 \\ a_{21}\, z_1^{(m)} + a_{22}\, z_2^{(m+1)} + a_{23}\, z_3^{(m)} + \ldots\, a_{2n}\, z_n^{(m)} &= 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\, z_1^{(m)} + a_{n2}\, z_2^{(m)} + a_{n3}\, z_3^{(m)} + \ldots\, a_{nn}\, z_n^{(m+1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Vom numi valorile $z_i^{(m)}$, abateri iterate de ordinul m ale necunoscutelor x_i.

---

* Pentru detalii în legătură cu acest procedeu, a se vedea [2] şi [6]

** În [3] se tratează cazul mai general al sistemului

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i + a_{jo} \quad (j = 1, 2 \ldots\ldots n)$$

vom studia sistemul sub forma de iteraţie (1) care este cea folosită în practică.

Efectuând încă $n-1$ iteraţii complete, obţinem de asemenea:

$$\begin{aligned}
&a_{11} z_1^{(m+2)} + a_{12} z_2^{(m+1)} + a_{13} z_3^{(m+1} + \ldots a_{1n} z_n^{(m+1)} = 0\\
&a_{21} z_1^{(m+1)} + a_{22} z_2^{(m+2)} + a_{23} z_3^{(m+1)} + \ldots a_{2n} z_n^{(m+1)} = 0\\
&\vdots\\
&a_{n1} z_1^{(m+1)} + a_{n2} z_2^{(m+1)} + a_{n3} z_3^{(m+1)} + \ldots a_{nn} z_n^{(m+2)} = 0\\
&a_{11} z_1^{(m+3)} + a_{12} z_2^{(m+2)} + a_{13} z_3^{(m+3)} + \ldots a_{1n} z_n^{(m+2)} = 0\\
&\vdots\\
&a_{n1} z_1^{(m+2)} + a_{n2} z_2^{(m+2)} + a_{n3} z_3^{(m+2)} + \ldots a_{nn} z_n^{(m+3)} = 0 \qquad (4)\\
&\vdots\\
&a_{11} z_1^{(m+n-1)} + a_{12} z_2^{(m+n-2)} + a_{13} z_3^{(m+n-2)} + \ldots a_{1n} z_n^{(m+n-2)} = 0\\
&\vdots\\
&a_{n1} z_1^{(m+n-2)} + a_{n2} z_2^{(m+n-2)} + a_{n3} z_3^{(m+n-2)} + \ldots a_{nn} z_n^{(m+n-1)} = 0\\
&a_{11} z_1^{(m+n)} + a_{12} z_2^{(m+n-1)} + a_{13} z_3^{(m+n-1)} + \ldots a_{1n} z_n^{(m+n-1)} = 0
\end{aligned}$$

Egalităţile (3) şi (4) formează un sistem de $n(m-1)+1$ ecuaţii din care dacă eliminăm pe $z_2^{(m)}, \ldots, z_2^{(m+n-1)}, z_3^{(m)} \ldots, z_n^{(m)}, z_n^{(m+n-1)}$, vom obţine, între $z_1^{(m)}, z_1^{(m+i)}, z_1^{(m+n)}$, o relaţie lineară omogenă de forma:

$$A_0 z_1^{(m+n)} + A_1 z_1^{(m+n-1)} + A_2 z_1^{(m+n-2)} + A_n z_1^{(m)} = 0$$

adică o relaţie de recurenţă cu coeficienţi constanţi de ordinul n.

Dacă vom schimba ordinea ecuaţiilor şi a necunoscutelor sistemului, vom obţine şi pentru celelalte necunoscute relaţii asemănătoare.

Calculând eliminantul sistemului (3), (4), vom obţine coeficienţii relaţiei (5). Din expresia acestui eliminant, se poate deduce, prin schimbări de linii şi coloane, că el nu depinde de ordinea ecuaţiilor, încât rezultă imediat că relaţia (5) este aceeaşi pentru toate necunoscutele sistemului.

Se ştie însă că expresia generală a unei funcţii recurente z_i ce satisface relaţia (5) este de forma:

$$z_i^{(k)} = c_{i1} \lambda_1^k + c_{i2} \lambda_2^k + c_{i3} \lambda_3^k + \ldots c_{in} \lambda_n^k, \qquad (6)$$

în care $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ sunt rădăcinile presupuse distincte, ale ecuaţiei caracteristice:

$$f(\lambda) = A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} \ldots A_{n-1} \lambda + A_n = 0, \qquad (7)$$

iar C_{i1}, $C_{i2} \ldots C_{in}$, sunt constante arbitrare.

Inlocuind expresiile (6) în sistemul (3) şi ţinând seamă că egalităţile trebue să aibă loc oricare ar fi m, găsim următoarele n sisteme de n ecuaţii, care determină constantele C_{ij}:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}\lambda_i C_{1i} + a_{12} C_{2i} + \ldots a_{1n} C_{ni} = 0\\
&a_{21} C_{1i} + a_{22}\lambda_i C_{2i} + \ldots a_{2n} C_{ni} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\\
&\vdots\\
&a_{n1} C_{1i} + a_{n2} C_{2i} + \ldots a_{nn}\lambda_i C_{ni} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Pentru ca aceste sisteme să admită pentru C_{ij} valori, nu toate nule, trebue ca determinanţii lor principali să fie nuli, adică:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda_i & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda_i \end{vmatrix} = 0 \; (i = 1, 2 \dots n)$$

Ceea ce înseamnă că $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ trebue să fie rădăcinile ecuaţiei

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

care trebue să fie identică cu ecuaţia (7) şi determină deci relaţia de recurenţă a valorilor iterate.

Ţinând seama de expresia (6), observăm că, pentru ca şirul $x_i^{(0)}, x_i^{(1)} \dots x_i^{(n)}$ să tindă către valoarea exactă a necunoscutei x_i, trebue să avem:

$$\operatorname{tim} z_i^{(m)} = 0$$
$$m = \infty$$

Dacă presupunem că niciuna din constantele C_{ij} nu este nulă, condiţia necesară şi suficientă este ca toate rădăcinile ecuaţiei (9) să aibă modulul lor mai mic decât 1 [1].

In acest caz, sistemul (1) va fi convergent, iar convergenţa sa va fi cu atât mai mare, cu cât modulele rădăcinilor ecuaţiei caracteristice vor fi mai mici.

In cazul când cel puţin una din rădăcinile ecuaţiei va avea modulul > 1, valorile iterate ale necunoscutelor vor creşte nemărginit, afară de cazul când constanta C respectivă fiind nulă, termenul $C_{ij}\,\lambda_i^k$ din expresia (6) se anulează.

Forma ecuaţiei (9) fiind asemănătoare ecuaţiei caracteristice a unei matrice, rezultă unele consecinţe interesante:

a) Ecuaţia caracteristică a unui sistem simetric are toate rădăcinile reale.

b) Rădăcina maximă şi minimă a ecuaţiei simetrice (9) se poate obţine prin metoda indicată de Prof. A. F. Smirnov [7].

c) Coeficientul termenului în λ^{n-1} al ecuaţiei (7), fiind întotdeauna nul, rezultă că A_2 este întotdeauna de semn contrar cu A_0. Ecuaţia va avea şi rădăcini pozitive şi negative, iar semnul abaterilor de grad mare va fi semnul celei mai mari rădăcini, în valoare absolută. Din această observaţie se pot deduce diferite sisteme, pentru a reduce numărul de iteraţii necesare pentru obţinerea valorilor exacte.

3. Constantele C_{ij} din relaţia (6) se pot determina în funcţie de primele $n - 1$ abateri.

Dând lui k valorile 0, 1, 2, ..., $n - 1$ obţinem un sistem de n ecuaţii din care deducem valorile acestor constante. Dacă ecuaţia caracteristică nu are rădăcini multiple, vom obţine:

$$C_{ij} = \frac{f_j(z_i)}{f'(\lambda_j)} \qquad (10)$$

în care

$$f_j = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_j} = A_{0j}\lambda^{n-1} + A_{1j}\lambda_{n-2} + \ldots A_{n-1j}$$

$$\text{iar } f_j(z_i) = A_{0j}\, z_i{}^{(n-1)} + A_{1j}\, z_i{}^{(n-2)} + \ldots A_{n-1j}\, x_i{}^{(0)}$$

Dacă în locul abaterilor iterate $z_i{}^{(m)}$, luăm valorile iterate $z_i{}^{(m)}$, atunci avem:

$$x_i{}^{(m)} = x_i + \sum \frac{f_j(z_i)}{f'(\lambda_i)} \lambda_j{}^m.$$

Inlocuind pe $z_i{}^{(k)}$ prin $x_i{}^{(k)} - x_i$ și făcând simplificările posibile, găsim:

$$x_i{}^{(m)} = x_i\, f(1)\,(S_{m-n} + S_{m-n-1}) + \sum_1^n \frac{f_j(x_i)}{f'(\lambda_i)} \lambda_j{}^m \qquad (11)$$

în care Sm este forma omogenă de gradul m cu coeficienți unitari a rădăcinilor ecuației, iar $f_j(x_i)$ are aceeași semnificație ca în relația (10).

O altă expresie a abaterilor sau a valorilor iterate se obține în funcție de abaterile inițiale

$$z_1{}^{(0)},\ z_2{}^{(0)},\ z_3{}^{(0)} \ldots z_n{}^{(0)}$$

Punem:

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

Din sistemul (3), obținem:

$$\begin{aligned} z_1{}^{(m+1)} &= -\alpha_{12} z_2{}^{(m)} - \alpha_{13} z_3{}^{(m)} \ldots - \alpha_{1n} z_n{}^{(m)} \\ z_2{}^{(m+1)} &= -\alpha_{21} z_1{}^{(m)} - \alpha_{23} z_3{}^{(m)} \ldots - \alpha_{2n} z_n{}^{(m)} \\ z_n{}^{(m+1)} &= -\alpha_{n1} z_1{}^{(m)} - \alpha_{n2} z_2{}^{(m)} \ldots - \alpha_{nn-1} z_{n-1}{}^{(m)} \end{aligned} \qquad (12)$$

Dacă privim pe $z_i{}^{(m+1)}$ și $z_i{}^{(m)}$ drept componentele vectorilor $z^{(m+1)}$ și $z^{(m)}$ și notăm cu A matricea:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & 0 & -\alpha_{23} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 0 & \ldots & -\alpha_{3n} \\ \vdots & & & & \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & -\alpha_{n3} & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (13)$$

avem:

$$z^{(m+1)} = A z^{(m)} \qquad (14)$$

din care rezultă imediat:

$$z^{(m)} = A^m\, z^{(0)}$$

apoi

$$x^{(m)} = A^m x^{(0)} + (E - A^m)\, x \tag{15}$$

Dacă notăm:

$$A^m = \left\| \begin{matrix} C_{11}^m & C_{12}^m & \dots & C_{1n}^m \\ C_{21}^m & C_{22}^m & \dots & C_{2n}^m \\ \vdots & \vdots & & \\ C_{n1}^m & C_{n2}^m & \dots & C_{nn}^m \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

Relaţia (14) devine:

$$z_i^{(m)} = C_{i1}^m z_1^{(0)} + C_{i2}^m z_2^{(0)} \dots C_{in}^m z_n^{(0)} \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{17}$$

Scriind relaţia (17) pentru $m = 0, i \dots n$, obţinem sistemul:

$$z_i^{(0)} = z_1^{(0)}$$

$$z_1^{(1)} = C_{11}^1 z_1^{(0)} + C_{12}^1 z_2^{(0)} + \dots C_{1n}^1 z_n^{(0)}$$

$$z_1^{(2)} = C_{11}^2 z_1^{(0)} + C_{12}^2 z_2^{(0)} + \dots C_{1n}^2 z_n^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$z_1^{(n)} = C_{11}^n z_1^{(0)} + C_{12}^n z_2^{(0)} + \dots C_{1n}^n z_n^{(0)}$$

Eliminând pe $z_1^{(0)} \dots z_n^{(0)}$, obţinem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_1^{(1)} & C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ z_1^{(2)} & C_{11}^2 & C_{12}^2 & \dots & C_{1n}^2 \\ \vdots & & & & \\ z_1^{(n)} & C_{11}^n & C_{12}^n & \dots & C_{1n}^n \end{vmatrix} = 0$$

Ţinând seama de expresia (6) a abaterilor, determinantul de mai sus se poate desvolta astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} C_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ \lambda_i^2 & C_{11}^2 & C_{12}^2 & \dots & C_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i^n & C_{11}^n & C_{12}^n & \dots & C_{1n}^n \end{vmatrix} = \sum C_{1i} f(\lambda_i) = 0$$

Această relaţie trebuind să fie satisfăcută pentru orice valori ale lui C_{1i}, rezultă că:

$$f(\lambda_i) = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots n),$$

deci $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ trebue să fie rădăcinile ecuației:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & C_{11}^1 & C_{12}^1 & & C_{1n}^1 \\ \lambda^2 & C_{11}^2 & C_{12}^2 & \ldots & C_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^n & C_{11}^n & C_{12}^n & \ldots & C_{1n}^n \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

care este tocmai transformata Crâlov — Luzin a ecuației (9).

Introducând expresiile (17) în ecuația (5), și ținând seama că această ecuație este satisfăcută, oricare ar fi m și $x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$, rezultă că termenii matricei A^m satisfac relația de recurență (7), încât putem pune:

$$C_{ij}^m = \sum_{k=1}^{n} r_{ijk} \lambda_k^m$$

și avem:

$$C_{ij} = \sum r_{ijk} z_k^{(0)}$$

Ducând aceste expresii în ecuațiile (8) și ținând seama că egalitățile obținute trebue să fie satisfăcute de orice valori ale lui m și $z_1^{(0)} \ldots z_n^{(0)}$, obținem următoarele n^2 sisteme de ecuații pentru r_{ijk}

$$\begin{aligned} &\lambda_i r_{1jk} - \alpha_{12} r_{2jk} + \ldots - \alpha_{1n} r_{njk} = 0 \\ &- \alpha_{21} r_{1jk} + \lambda_i r_{2jk} + \ldots - \alpha_{2n} r_{njk} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ &- \alpha_{n1} r_{1jk} - \alpha_{n2} r_{2jk} + \ldots \lambda_i r_{njk} = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Aceste n^2 sisteme se reduc la n sisteme distincte, încât urmează de aici că r_{ijk} nu depind de indicele j decât printr'un factor de proporționalitate.

Punând:

$$r_{ijk} = \varphi_{ik} \cdot l_j, \qquad (19)$$

obținem expresiile abaterilor iterate sub forma:

$$z_i^{(m)} = \varphi_{i1} l_1 \lambda_1^m + \varphi_{i2} l_2 \lambda_2^m + \ldots \varphi_{in} l_n \lambda_n^m,$$

în care $l_1, l_2 \ldots l_n$ sunt forme lineare omogene de $z_1^{(0)} \ldots z_m^{(0)}$, iar $\varphi_{i1} \ldots \varphi_{in}$ mărimi ce satisfac ecuația:

$$A \cdot \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \qquad (20)$$

adică sunt vectorii proprii ai matricei A [2]

Dacă V este matricea coordonatelor vectorilor φ_i, avem

$$z_i^{(0)} = V l_i$$

sau

$$l_i = V^{-1} z_i^{(0)} \qquad (21)$$

relație ce permite determinarea lui l_i.

Formele lineare l_i permit o analiză mai completă a convergenţei sistemului (1). In adevăr, să considerăm sistemul

$$l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

determinantul său fiind întotdeauna diferit de 0, sistemul nu este satisfăcut decât de valorile:

$$z_1^{(0)} = z_2^{(0)} \ldots z_n^{(0)} = 0,$$

adică de valorile exacte ale sistemului. Dacă însă abaterile iniţiale sunt astfel alese, încât una din ecuaţiile (22) să fie nulă, atunci termenul respectiv din expresia (6) se anulează. Aceasta ne arată, că dacă un sistem de ecuaţii (1) este neconvergent, ecuaţia caracteristică având p rădăcini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_p$ cu modulul mai mare decât 1, sistemul poate fi rezolvat prin iteraţie, dacă alegem abaterile iniţiale, astfel încât ele să satisfacă sistemul:

$$l_1 = l_2 = \ldots l_p = 0 \qquad (p < n)$$

Pentru a defini în mod complet convergenţa unui sistem, putem deci enunţa următoarele:

a) Dacă valorile proprii ale matricei (13) au modulii mai mici decât 1, procedeul de iteraţie este convergent pentru orice valori iniţiale ale necunoscutelor.

b) Dacă p valori proprii ale matricei (13) au modulii mai mari decât 1, procesul de iteraţie este convergent numai pentru valorile iniţiale ce satisfac ecuaţiile $l_1 = l_2 = \ldots l_p = 0$ $(p < n)$.

c) Dacă toate valorile proprii ale matricei au modulii mai mari decât 1, procesul de iteraţie este divergent.

Determinarea valorilor iniţiale $x_i^{(0)}$, date de sistemul $l_1 = \ldots l_p = 0$ se poate face, fie determinând sistemul cu ajutorul relaţiilor (21), fie mai simplu, în modul următor:

Dacă în relaţia: $z^{(0)} = V.\ l$

luăm $l_1 = \ldots l_p = 0$, obţinem următoarele n egalităţi:

$$x_i^{(0)} = \varrho_{ip+1}\, l_{p+1} + \varrho_{ip+2}\, l_{p+2} + \ldots \varrho_{in}\, l_n \qquad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{23}$$

Luând pentru $l_{p+i} \ldots l_n$ valori arbitrare, obţinem valorile iniţiale ale necunoscutelor, $x_i^{(0)}$.

4. Din cele arătate rezultă că, atât convergenţa, cât şi gradul de convergenţă al unui sistem linear, faţă de procesul iterativ, depind atât de valorile proprii, cât şi de valorile iniţiale adoptate. Acest fapt are o mare importanţă practică, deoarece pentru sistemele cu un număr mare de necunoscute, la care numărul iteraţiilor ce se efectuează nu atinge în general numărul necunoscutelor, alegerea judicioasă a valorilor iniţiale are cel puţin aceeaşi importanţă ca şi gradul de convergenţă, determinat de valorile proprii.

Pentru o mai bună lămurire, dăm următorul exemplu:

Sistemul:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20$$

$$77x_1 - 29x_2 + 40x_3 = 139,$$

ale cărei soluții exacte sunt $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; are ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} 5\lambda & 2 & 4 \\ 4 & 5\lambda & 2 \\ 77 & -29 & 40\lambda \end{vmatrix} = 1000\lambda^3 = 1570\lambda - 156 = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -1,2 \quad \lambda_2 = -0,1 \quad \lambda_3 = 1,3$

deci este divergent.

Matricea vectorilor proprii este [7]: $V = \begin{vmatrix} 1 & 24 & -88 \\ 1 & 68 & 12 \\ 1 & -31 & 137 \end{vmatrix}$

Conform celor spuse mai sus, dacă luăm:

$$z_1^{(0)} = x_1^{(0)} - 1 = 24l \qquad x_1^{(0)} = 24l + 1$$
$$z_2^{(0)} = x_2^{(0)} - 2 = 68l \qquad x_2^{(0)} = 68l + 2$$
$$z_4^{(0)} = x_3^{(0)} - 3 = -31l \qquad x_3^{(0)} = -31l + 3$$

vom obține:

$$x_1^{(1)} = 4,2 - 0,8 - 27,2l - 2,4 + 24,8l = 1 - 2,4l$$
$$x_2^{(1)} = 4 - 0,8 - 19,2l - 1,2 + 12,4l = 2 - 6,8l$$
$$x_3^{(1)} = 3,475 - 1,926 - 46,2l + 1,450 + 49,30l = 3 + 3,1l$$

iar mai departe:

$$x_1^{(2)} = 1 + 0,24l$$
$$x_2^{(2)} = 2 + 0,68l$$
$$x_3^{(2)} = 3 - 0,31l$$

și în general

$$x_1^{(k)} = 1 + (-1)^k \cdot 24l \text{ etc.}$$

deci o convergență foarte rapidă.

5. Cea mai mare rădăcină în valoare absolută se poate obține destul de ușor, în cazul sistemelor simetrice, prin metoda Prof. A. F. Smirnov [7].

Cunoscând în mod aproximativ valoarea rădăcinii maxime a ecuației caracteristice, putem aprecia numărul de iterații necesare pentru obținerea abaterilor iterate cu o aproximație dată.

Fie $|\lambda_j|$ modulul cel mai mare al rădăcinilor ecuației caracteristice; avem:

$$|z_i^{(m)}| < |\lambda_j^m| \cdot |C_{i_1} + C_{i_2} + C_{i_3} + \ldots C_{in}| \text{ sau}$$
$$|z_i^{(m)}| < |\lambda_j^m| \cdot |z_i^{(0)}|$$

Dacă se cere ca soluțiile sistemului să fie obținute cu o eroare mai mică decât $\varepsilon \cdot x_i$, adică:

$$|z_i^m| \leqslant |\varepsilon\, x_i|,$$

rezultă:

$$\left|\lambda_j^{(m)}\right| \cdot \left|z_i^{(0)}\right| < \left|\varepsilon\, x_i\right| \quad \text{sau} \quad \left|\lambda_j^{(m)}\right| < \left|\frac{\varepsilon\, x_i}{z_i^{(0)}}\right|$$

In cazul obişnuit, când se începe iteraţia cu valorile $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots x_n^{(0)} = 0$, avem:

$$z_i^{(0)} = -\, x_i$$

deci:

$$\left|\lambda_j^m\right| < \varepsilon$$

sau

$$m < \frac{\ln \varepsilon}{\ln |\lambda_j|} \tag{24}$$

6. Să considerăm sistemul (1), pe care îl putem scrie în modul următor [4]

$$(E - A)\, x = -\, \alpha_0, \tag{25}$$

în care E este matricea unitate, A este matricea (13), x este vectorul de componente $x_1, x_2 \ldots x_n$, iar α_0 vectorul de componente $\alpha_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}}$, $\alpha_{20} = \frac{a_{20}}{a_{22}} \ldots$ $\alpha_{no} = \frac{a_{no}}{a_{nn}}$.

Din ecuaţia (25) rezultă [4]:

$$x = -\,(E - A)^{-1} \alpha_0 = -\,(E + A + A^2 + \ldots)\, \alpha_0.$$

Ţinând seama de relaţiile precedente, avem:

$$x^{(m)} - x = A^m z^{(0)} = A^m (x^{(0)} - x),$$

deci:

$$\begin{aligned} x^{(m)} &= Ex + A^m (x^{(0)} - x) = \\ &= -\,(E - A^m)\, x + A^m x^{(0)} = -\,(E - A^m)\,(E + A + \\ &\qquad + A^2 \ldots)\, \alpha_0 + A^m x^{(0)} = \\ &= -\,(E + A + A^2 + \ldots A^{m-i})\, \alpha_0 + A^m x^{(0)} \end{aligned} \tag{26}$$

Dacă luăm $x^{(0)} = -\,\alpha_0$, aşa cum se procedează de obicei, vom obţine:

$$x^{(m)} = -\,(E + A + A^2 + \ldots A^m)\, \alpha_0, \tag{27}$$

ceea ce ne arată că, prin metoda iteraţiei a lui Gauss, se obţin după m iteraţii, aceleaşi valori ca şi atunci când rezolvăm sistemul prin metoda profesorului G. Em. Filipescu.

Prin rezolvarea pe această cale, obţinem însă în primă aproximaţie chiar valoarea $x^{(m)}$, iar repetarea calculelor ne dă valoarea $x^{(2m)}$ $x^{(3m)}, \ldots$ etc.

Se pune deci problema dacă, cu ajutorul metodei Gauss, nu s'ar putea obţine acelaşi lucru.

Să considerăm din nou ecuația (25) și să-i înmulțim ambii membri cu matricea

$$(E + A + A^2 + \ldots A^{m-i})$$

vom obține:

$$(E - A^m)\, x = -(E + A + A^2 \ldots A^{m-1})\, \alpha_0 \tag{28}$$

Sistemul de ecuații (28) este echivalent cu sistemul (1), însă ecuația sa caracteristică este:

$$(E\lambda - A^m) = 0 \tag{29}$$

care se știe [3], [5], [7] că are rădăcinile $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$.

Deoarece rădăcinile ecuației (9) sunt toate de modul mai mic decât 1, rezultă că rădăcinile ecuației caracteristice (29) vor fi mai mici decât ale ecuației (9), deci noul sistem (28) va fi mai convergent.

Scriind desvoltat sistemul (29), avem:

$$\begin{aligned} &(1 - C_{11}^m)\, x_1 - C_{12}^m\, x_2 + \ldots + C_{1n}^m\, x_n + A_{10} = 0 \\ &\qquad\vdots \\ &-C_{n1}^m\, x_1 + C_{n2}^m\, x_2 - \ldots - C_{nn}^m\, x_n - A_{n0} = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Dacă îi vom aplica metoda iterației, însă punându-l sub forma:

$$x_i = A_{i_0} + \sum_{j=1}^{n} C_{ij}^m\, x_j \tag{31}$$

vom obține după prima iterație valorile $x_i^{(m)}$ iar după k iterații, valorile $x_i^{(km)}$ adică abaterile $z_i^{(km)} = x_i^{(km)} - x_i$, deci vom obține aceleași valori ca și la rezolvarea prin aproximații succesive, după metoda Filipescu [4].

Sistemul (30) mai poate fi rezolvat și prin iterația obișnuită, adică păstrând în membrul I necunoscuta cu coeficientul întreg și trecând în membrul II termenul liber și celelalte necunoscute. Din prima ecuație vom deduce, de exemplu:

$$x_i = \frac{A_{10}}{1 - C_{11}^m} + \frac{1}{C_{11}^m} \sum_{i=2}^{n} C_{1i}\, x_i$$

Se pare că, pentru aceleași valori inițiale ale necunoscutelor, sistemul este mai convergent dacă este rezolvat în modul acesta, decât în primul caz, de unde s'ar deduce că cea mai mare rădăcină a ecuației caracteristice:

$$\left((1 - C_{ii}^m)\lambda - (A^m - C_{ii}^m)\right) = 0 \tag{32}$$

este mai mică decât a ecuației (29).

7. O altă variantă a metodei iterației, folosită în problemele de statică și aplicată curent la calculul scheletelor elastice prin metoda distribuirii momentelor, este aceea a desvoltării în serie a lui Crivoșein.

In această variantă, necunoscutele se obțin sub forma unei desvoltări în serie, iar valoarea necunoscutei este dată de suma acestei serii

$$x_i^{(m)} = y_i^{(0)} + y_i^{(1)} + \ldots y_i^{(m)}.$$

Se vede imediat că termenii seriei vor fi:

$$y_i^{(0)} = x_i^{(0)} = \alpha_0,\ y^{(0)} = -A\alpha_0 \ldots y_{(m)} = -A^m \alpha_0.$$

Criteriul de convergenţă pentru metoda Crivoşein, va fi acelaşi ca şi pentru metoda Gauss, iar toate celelalte concluzii vor fi identice.

8. O altă variantă, des folosită, este metoda lui Seidel şi H. Yu*.

In această metodă, la fiecare iteraţie se ţine seama de ultimele valori obţinute. Astfel, valoarea necunoscutei $x_i^{(m)}$ va fi

$$x_i^{(m)} = -\frac{a_{io}}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i=1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m-1)}$$

Prin acest procedeu se obţine o iteraţie mai rapidă.

Urmând acelaşi procedeu ca în cazul metodei Gauss, găsim că, pentru ca sistemul (1) să fie convergent, trebue ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \ldots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

să aibă modulul mai mic decât 1.

Abaterile iterate Z_i^m satisfac o relaţie de recurenţă cu coeficienţi constanţi însă de gradul $n-i$, deoarece ecuaţia caracteristică (33) are o rădăcină nulă.

In general, dacă se întervertește ordinea ecuaţiilor, se obţin alte ecuaţii caracteristice ceea ce înseamnă că unui sistem de ecuaţii îi poate fi aplicată metoda Seidel—Yu în mai multe moduri diferite. Ar fi interesant de studiat, în ce ordine trebue aşezate ecuaţiile unui sistem, pentru a obţine convergenţa cea mai mare.

Ecuaţia (33), în cazul unei matrice simetrice, nu mai are în general toate rădăcinile reale.

Dacă punem [7]:

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ 0 & 0 & -\alpha_{23} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \text{ şi } C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & 1, \end{Vmatrix}$$

ecuaţia caracteristică devine [7].

$$(B - \lambda C) = 0 \text{ sau } (C^{-1}B - \lambda E) = 0 \qquad (34)$$

Elementele primei coloane ale matricei $E^{-1}\ B$ sunt nule, încât şi această ecuaţie va avea o rădăcină nulă.

Pentru găsirea rădăcinilor reale maxime şi minime, vom proceda ca în cazul ecuaţiei caracteristice (9).

De asemenea, vom obţine ca şi în cazul metodei Gauss, expresiile abaterilor în funcţie de rădăcinile ecuaţiei caracteristice sau de abaterile şi valorile iniţiale ale necunoscutelor.

---

* Un studiu amănunţit al acestei metode, atât pentru forma particulară (33) cât şi pentru forma cea mai generală este dat în [3].

ОБ ИТЕРАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор ищет элементарным способом условия сходимости итерационного процесса линейных систем и вновь находит хорошо известные условия относительно собственных значений матрицы коэффициентов системы.

Устанавливается, что разности итерированных значений удовлетворяют рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами, причем шкала рекуррентности составлена характеристическим уравнением системы.

Этот факт позволяет определение алгебраической формы итерированных значений в функции от n первых значений $z_i^{(0)} \ldots z_i^{(n-i)}$.

$$z_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z_i)}{f'(\lambda_j)}, \quad \text{где} \quad f_i(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_j};$$

$f_j(z_i)$ получается подстановкой значений $z_i^{(0)} \ldots z_i^{(n-i)}$ на место показателей степеней λ.

Другим выражением итерированных разностей является

$$z_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} \; l_j \; \lambda_j^{m},$$

где V_{ij} суть составляющие собственных векторов матрицы и l_j суть линейные формы от n первоначальных значений $z_i^{(0)}$, которые можно определить соотношением (21)

$$l = V^{-1} \; z^{(0)},$$

где V есть матрица собственных векторов.

Вышеизложенные результаты дают новое уточнение условий сходимости итерационных процессов. Сходимость зависит также от принятых начальных значений. Система может быть сходящейся, даже когда p собственных значений $(p < n)$ имеют модули > 1, если подобрать подходящие величины, решения системы $l_1 = l_2 = \ldots \; l_p = 0$.

Новым путем получают преобразованную Крылова-Лузина характеристического уравнения.

Вычисляя собственные значения максимального модуля, можно определить число итераций, необходимых для получения решения системы с данным приближением посредством формулы

$$m < \frac{\ln \varepsilon}{\ln |\lambda|}$$

Применяя формулы Гелфанда и Фадеева, автор доказывает, что методом Филипеску получаются те же результаты, как простой итерацией

и указывает общий метод для увеличения усиления сходимости итерационного процесса.

Методы Кривошеина и Зейделя-Ю приводят к однородным результатам, приведенным в конце статьи.

SUR L'ITÉRATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur cherche, par une méthode élémentaire, les conditions de convergence du procès itératif des systèmes linéaires et retrouve les conditions bien connues, concernant les valeurs propres de la matrice des coefficients du système.

Il établit que les différences des valeurs itérées satisfont à une relation de récurrence à coefficients constants, l'échelle de récurrence étant constituée par l'équation caractéristique du système.

Cette constatation lui permet de déterminer la forme algébrique des valeurs itérées, en fonction des n premières valeurs $z_i^{(0)} \ldots z_i^{(n-i)}$

$$z_i^{(m)} \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z_i)}{f'(\lambda_j)}, \text{ où } f_j(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda}$$

$f_j(z_i)$ s'obtient par la substitution des valeurs $z_i^{(0)} \ldots z_i^{(n-i)}$ à la place des puissances de λ.

Une autre expression des différences itérées est

$$z_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} l_j \lambda_j^m$$

où V_{ij} sont les composantes des vecteurs propres de la matrice, et l_j sont des formes linéaires des n valeurs initiales $z_i^{(0)}$, qu'on peut déterminer par la relation (21)

$$l = V^{-1} z^{(0)}$$

V étant la matrice des vecteurs propres.

Les résultats ci-dessus donnent une nouvelle précision des conditions de convergence du procès itératif: la convergence dépend aussi des valeurs initiales adoptées. Un système peut être convergent, même si p valeurs propres ($p < n$) ont des modules > 1, si l'on choisit des valeurs convenables, solutions du système $l_1 = l_2 = \ldots l_p = 0$.

Par une voie nouvelle, on obtient la transformée Krylov-Luzin de l'équation caractéristique.

En calculant la valeur propre de module maximum, on peut déterminer le nombre des itérations nécessaires pour obtenir les solutions du système à une approximation donnée, par la formule

$$m < \frac{\ln \varepsilon}{\ln |\lambda|}$$

En utilisant les formules de Guelfand et Fadéeva, l'Auteur démontre que par la méthode de Filipescu on obtient les mêmes résultats que par l'itération simple et indique une méthode générale pour augmenter la convergence du procès itératif.

Les méthodes de Krivochéïne et Seidel-Yu conduisent à des résultats similaires, mentionnés à la fin de l'article.

BIBLIOGRAFIE

1. Angelescu A., Gazeta Matematică, 1925, Nr. 5.
2. Bezencovici Ia. S., *Calcule aproximative*. Ed. tehnică, București, 1952.
3. Fadeev V. N., *Vicislitelniie metodi lineinoi alghebri*. Gosudarstv. izd. tehn.-teor. literat., 1950.
4. Filipescu Gh. Em., Bul. Soc. Polit., 1937, Nr. 1.
5. Ghelfand I. M., *Lecții po lineinoi alghebre*. Gosdeteniezdat, M.— L., 1951.
6. Procofiev I. P., *Statica construcțiilor*. *OPED — C.F.R.*, 1951.
7. Smirnov A. F., *Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor*. Ed. tehn. a transporturilor, București, 1951.

ERRATA

La pag.	Rândul	In loc de	Se va citi	Greşeala provine din vina
8	3	Quasi-centul	Quasi-centrul	Tipografiei
35	27	$\frac{C \cup (D \cap A)}{C \cup (D \cap B)} = \mathfrak{M}$	$\frac{C \cup (D \cap A)}{C \cup (D \cap B)} = \mathfrak{M}$ (3)	Editurei
36	7	$\frac{M \cap N}{M \cap n} = \mathfrak{M}$	$\frac{M \cap N}{M \cap n} = \mathfrak{M}$ (4)	»
38	30	teoremei 5°	teoremei dela 5°	»
50	3	Conform lemmei III, lanţul $G_x \cap (H_y)$	Conform lemmei III din 16°, lanţul $G_x \cap (H_y)$	»
50	14	Aplicând 2 câturilor	Aplicând axioma 2 câturilor	»
53	35	$\overline{x\infty}$	$x\infty$	»
79	31	1. Fie $\Omega \geqq x \geqq y$	1) Fie $\Omega \geqq x \geqq y$	»
79	34	2. Fie $\Omega \geqq a' \geqq a$	2) Fie $\Omega \geqq a' \geqq a$	»
91	13	3. Normalitatea $\mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$	§ 3. Normalitatea $\mathfrak{V}^{\circ}_{\beta}$	»
94	2	$\beta \vee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \wedge b$	$\beta \bigvee b/\beta \rightleftarrows b/\beta \bigwedge b)$	»
99	16	vom spune că a este	vom spune că a este	»
101	3	*Despre implicaţia logică* $\Re + \mathfrak{N} + 1^* + 2^* \Re + \mathfrak{V} + + 1 + 2$	*Despre implicaţie logică* $\Re + \mathfrak{N} + 1 + 2^* [\Re + + \mathfrak{V} + 1 + 2$	»
110	20	– normal	= normal	»
140	15	In adevăr, dacă putem	In adevăr, dacă punem	»
142	15	$[(A_1A_3)\ X^2] = -(k^2+1)(A_1A_3) + 2k(A_2A_4)$.	$[(A_1A_3)\ X^2] = -(k^2+1)(A_1A_3) + 2k(A_2A_4)$. (40′)	»
172	19	pentru $E(B,+1,B')=0$	pentru $E(B+1,B')=0$	»
223	17	prin derivate	prin derivare	»
227	30	Rezultă că soluţia problemei de o funcţie	Rezultă că soluţia problemei depinde de o funcţie	»
234	25	$a_{11}z_1^{(m+1)} + a_{12}x_2^{(m)} + + a_{13}z_3^{(m)} + \ldots a_{1n}z_n^{(m)} = 0$	$a_{11}z_1^{(m+1)} + a_{12}z_2^{(m)} + + a_{13}z_3^{(m)} + \ldots a_{1n}z_n^{(m)} = 0$	»

F 762

OMK

KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CBEPE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ÉCHANGE

3-4

ANUL IV

IULIE—DECEMBRIE 1953

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3-4

ANUL IV

IULIE—DECEMBRIE 1953

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician D. POMPEIU – Redactor responsabil;
A. HALANAY; GH. MIHOC; N. TEODORESCU;
G. VRĂNCEANU

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul IV, Nr, 3–4 Iulie–Decembrie 1953

SUMAR

	Pag.
D. BARBILIAN, Aritmetici necomutative cu teorie exhaustivă a idealelor	257
A. HALANAY, Soluţii aproape-periodice ale ecuaţiei Riccati	345
G. MARINESCU, Asupra unor aspecte ale teoriei ecuaţiilor cu diferenţe finite	355
SERGIU VASILACHE, Asupra unei noi ecuaţii a telegrafiştilor	373
ANDREI DOBRESCU, Clasificarea grupurilor lui Lie reale cu patru parametri	395
F. MARCUS, Asupra unor suprafeţe R_0	437
ŞT. PETRESCU, Clasificarea spaţiilor P_2	453
C. TELEMAN, Grupurile de mişcare transitive ale spaţiilor riemanniene V_5	503

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome IV, N°s 3—4 Juillet—Décembre 1953

SOMMAIRE

	Page
D. BARBILIAN, Les arithmétiques non commutatives à théorie exhaustive des idéaux	257
A. HALANAY, Solutions presque-périodiques de l'équation de Riccati	345
G. MARINESCU, Certains aspects de la théorie des équations à différences finies	355
SERGIU VASILACHE, Sur une nouvelle équation des télégraphistes	373
ANDREI DOBRESCU, La classification des groupes de Lie réeles à quatre paramètres	395
F. MARCUS, Sur certaines surface R_0	437
ŞT. PETRESCU, Classification des espaces P_2	453
C. TELEMAN, Les groupes transitifs de mouvement des espaces de Riemann V_3	503

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том IV, № 3—4 Июль — декабрь 1953

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Д. БАРБИЛЬЯН, Некоммутативные арифметики с исчерпывающей теорией идеалов	257
А. ХАЛАНАЙ, Почти-периодические решения уравнения Риккати	345
Г. МАРИНЕСКУ, О некоторых новых чертах теории конечноразностных уравнений	355
С. ВАСИЛАКЕ, Новое уравнение телеграфиста	373
А. ДОБРЕСКУ, Классификация действительных групп Ли с четырьмя параметрами	395
Ф. МАРКУС, О некоторых поверхностях R_0	437
Ш. ПЕТРЕСКУ, Классификация пространств P_2	453
К. ТЕЛЕМАН, Транзитивные группы движения римановых пространств V_5	503

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

LA ÎMPLINIREA A 80 DE ANI A ACADEMICIANULUI DIMITRIE POMPEIU

La 4 Octombrie 1953, Academicianul Dimitrie Pompeiu a împlinit vârsta de optzeci de ani. Academia Republicii Populare Române, al cărui membru titular el este dela înfiinţarea ei, a sărbătorit această aniversare într'o şedinţă solemnă, ţinută în ziua de Vineri 2 Octombrie 1953. Cu acest prilej, numeroşi elevi, admiratori şi prieteni ai eminentului savant i-au adus omagiul lor de recunoştinţă şi de afecţiune.

Institutul de Matematică al Academiei Republicii Populare Române, al cărui director este Acad. D. Pompeiu, a organizat un număr de cinci şedinţe publice, în care s'au făcut expuneri asupra operei matematice a lui Dimitrie Pompeiu, arătându-se influenţa exercitată de această operă asupra cercetării matematice din ţară şi din străinătate.

In desvoltarea ştiinţelor matematice din patria noastră, rolul pe care l-a avut matematicianul şi profesorul Pompeiu a fost adesea hotărîtor. Influenţa sa adâncă s'a făcut simţită nu numai prin lucrările şi prin prelegerile sale, dar şi — într'o foarte largă măsură — prin contactul direct şi personal pe care profesorul Pompeiu nu a încetat să-l întreţină cu matematicienii noştri de toate vârstele, prin radierea spiritului său subtil şi nuanţat, cât şi a personalităţii sale generoase şi comunicative. Se poate spune, fără îndoială, că o mare parte din producţia contemporană a şcolii matematice române poartă pecetea maestrului Dimitrie Pompeiu.

Revista *Studii şi Cercetări Matematice*, organ al Institutului de Matematică al Academiei R.P.R., va dedica cel de al V-lea tom al său, Academicianului Dimitrie Pompeiu.

In numele tuturor matematicienilor noştri care au folosit învăţătura sa luminoasă şi i-au cules roadele binefăcătoare şi fecunde, *Studii şi Cercetări Matematice* exprimă Academicianului D. Pompeiu urările cele mai călduroase, pornite din adâncul inimilor, urări de sănătate şi de viaţă cât mai lungă, pentru ştiinţa şi cultura patriei noastre.

Comitetul de Redacţie.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

ARITMETICI NECOMUTATIVE CU TEORIE EXHAUSTIVĂ A IDEALELOR

DE

D. BARBILIAN

INTRODUCERE

Iniţiată de A. Hurwitz [1], continuată de H. Brandt [2] şi A. Speiser [3], aritmetica numerelor hipercomplexe a fost defintiv constituită de E. Artin [4] şi H. Hasse [5], ca o prelungire a aritmeticei corpurilor de numere algebrice, datorată lui R. Dedekind [6].

Lipsea însă acestei aritmetici o teorie abstractă, exhaustivă, comparabilă aceleia elaborată de E. Noether [7] pentru aritmetica lui Dedekind şi cunoscută astăzi sub numele de *teoria clasică a idealelor*.

Se poate vorbi totuşi de o axiomatizare a aritmeticii lui Artin care este însă departe de a fi exhaustivă. Ea este datorită lui Cl. Chevalley şi se găseşte schiţată în mod sumar în introducerea monografiei sale [8], sub numele de *aritmetică regulată*.

Cercetarea lui Cl. Chevalley este orientată către problema particulară a aritmeticilor inelelor complete de matrice şi determinarea « numărului claselor ». Fundarea unei teorii necomutative exhaustive a idealelor în felul aceleia a lui E. Noether, deci *producerea* teoremei fundamentale de descompunere în produs unic de ideale prime şi *inversarea* acestei teoreme în vederea completei caracterizări a cadrului axiomatic prin chiar teorema fundamentală, nu intră în preocupările acestui autor.

De aceea nu trebue să ne mire că sistemul de axiome I + II + III + IV al aritmeticilor regulate se dovedeşte pletoric pentru construirea unei teorii clasice a idealelor în necomutativ.

Dar schiţa aritmeticilor regulate propusă de Cl. Chevalley este atât de concisă încât este de-a-dreptul nesatisfăcătoare. Demonstraţiile lipsesc şi sunt înlocuite cu trimiteri la E. Artin. Textul lui E. Artin nu poate fi însă de niciun ajutor pentru stabilirea teoremei fundamentale în cadrul aritmeticilor lui Chevalley. E. Artin dispune *a priori* de finitudinea mulţimii divizorilor unui ideal dat iar demonstraţiile sale, foarte simple, folosesc hotărît această împrejurare. In aritmeticile regulate este dată *a priori* numai limitarea lanţurilor de divizori, astfel încât, demonstraţia nu poate fi preluată nici dela E. Artin (aritmetica sistemelor de numere hipercomplexe) nici dela E. Noether (în a cărei redactare a teoriei clasice a idealelor se postulează existenţa şirurilor de compoziţie de extremităţi $O > A \neq (0)$), ci dela Van

der Waerden [9], care pare a reproduce o demonstrație anterioară a lui W. Krull.

Se întâmplă însă că demonstrația dată de Van der Waerden se întemeiază pe o inducție defectuos definită, cum vom arăta în cursul acestei lucrări *). Este necesară astfel o nouă demonstrație.

Apoi, noțiunea de « ideal », cu care lucrează Cl. Chevalley, se dovedește prea tare pentru nevoile unei teorii necomutative, exhaustive, a idealelor. Noi am relativizat încă mai mult această noțiune, astfel:

Dacă $H \supset O$ este o înfășurare inelară iar E un semigrup de unități al lui H cuprinse în O, numim *ideal* al lui O un ideal bilateral (în sensul obișnuit al cuvântului) care conține cel puțin o unitate.

La Cl. Chevalley E este identificat cu totalitatea unităților lui H cuprinse în O, mulțime declarată identică cu totalitatea nondivizorilor lui zero din O (împrejurare proprie algebrelor).

Lucrarea noastră are de scop punerea la punct a teoriei aritmeticilor regulate (mărginite la nevoile teoremei fundamentale) într'o anume abstragere a lor pe care am numit-o *aritmetică primitivă*.

Din aritmeticile primitive izolăm două subspecii construite cu câte trei cereri, analoage acelora din teoria clasică a idealelor și denumite respectiv *aritmetici închise* și *aritmetici complete*. Aritmeticile închise sunt construite cu închiderea aritmetică; aritmeticile complete, cu maximalitatea ordinului. *A posteriori* închiderea aritmetică, din primele, implică maximalitatea ordinului, când introducem și axioma II a lui Chevalley (arătată prin axioma prealabilă I în § 5). Demonstrăm că amândouă aceste aritmetici sunt exhaustive (este cu totul remarcabil că, în necomutativ, teorema fundamentală poate fi obținută cu închiderea aritmetică).

Pe lângă acest rezultat central, cercetarea noastră dă răspunsul câtorva probleme pendinte în teoria numerelor: *construirea exhaustivă a aritmeticilor inelelor comutative generale* (cu divizori ai lui zero); *extinderea la necomutativ a teoremei de transferare a lui H. Grell* [10], *privitoare la teoria idealelor în corpurile algebrice finite, neseparabile*; *generalizarea la necomutativ și inversarea teoremei lui E. Noether asupra aritmeticii extinderilor separabile finite.*

Analiza de mai jos a paragrafelor dă o idee despre conținutul lor și arată natura problemelor tratate.

★

In § 1, considerăm această abstragere a aritmeticilor regulate ale lui Chevalley, numite de noi *aritmetici primitive*, obținute prin lăsarea la o parte a axiomelor II, IV și prin slăbirea axiomelor I, III ale aritmeticilor regulate. Demonstrăm, că ele admit teoremă fundamentală.

Aritmeticile primitive sunt caracterizate de tabloul de axiome

0) *Element-unitate pentru înfășurarea inelară* $H \supset O$. *Semigrupul caracteristic, un semigrup arbitrar* E *de unități ale lui* H *aflate în* O.

1) *Limitare maximală pentru idealele drepte conținătoare de unități caracteristice* $\varepsilon \to E$.

2) *Modulul invers pentru idealele nedivizibile.*

3) *Maximalitatea intrinsecă a ordinului* O.

*) Rezultatul este exact, fiind preluat din teoria generală a idealelor (descompunerea unui ideal în produs de componente primare uniforme — *einartig* — maximele) de unde derivă, prin specializare.

Axioma 0) este oarecum aceeaşi pentru amândouă sistemele. Cl. Chevalley pune direct pentru H şi indirect pentru O, prin mijlocirea definiţiei idealului întreg, existenţa elementului-unitate. Semigrupul E este particularizat până la semigrupul tuturor nondivizorilor lui zero din O, postulaţi unităţi în H.

Axioma 1) este cuprinsă în axioma III, care afirmă finitudinea bazei pentru toate idealele drepte (numite acolo stângi), inclusiv cele fracţionare, conţinătoare de $\varepsilon \to E$.

Axioma 2) apare în axioma I într'o formulare mult mai tare: modulul invers este cerut pentru toate idealele.

Axioma 3) este, la Cl. Chevalley, o consecinţă a axiomelor I şi III.

Este deci clar, că aritmeticile primitive conţin aritmeticile regulate ca un caz special.

Stabilirea teoremei fundamentale o facem amânând până la urmă introducerea axiomei 3) a maximalităţii ordinului. Folosim în acest scop următoarea modificare a aritmeticilor primitive, care apare *a posteriori* ca o generalizare a acestora:

0) *Aceeaşi formulare.*
1') *Limitarea maximală pentru ideale.*
2') *Modulul invers pentru idealele prime.*
3') *Implicaţia « prim → nedivizibil ».*

Ultima axiomă este luată chiar sub forma foarte slabă:

3'') *Divizibilitatea multiplicativă a idealelor prime.*

Aceasta înseamnă că dacă două ideale prime se divid aditiv: $P' \supset P''$, ele se divid şi multiplicativ $P'' = P' P_1$, $P'' = P_2 P'$, cu P_1, P_2 ideale veritabile sau idealul zero.

In cadrul 0) + 1') + 2') + 3''), demonstrăm existenţa descompunerii oricărui ideal $A < O$ în produs comutativ de ideale *nedivizibile* unic determinat până la ordinea factorilor.

Aceste aritmetici foarte generale le-am numit *anterioare*. Trecerea la aritmeticile primitive o facem arătând, cu axioma 3), că acestea satisfac axioma 3') a implicaţiei « prim → nedivizibil » şi deci sunt cazuri speciale de aritmetici anterioare.

Să dăm aici o lămurire, pe care o vom reproduce şi în cursul lucrării, despre noţiunea de *maximalitate intrinsecă* (numele este propus de noi dar noţiunea apare la Cl. Chevalley). Un subinel O al lui H este ordin *maximal intrinsec* când oricare alt subinel $O' \supset O$ al lui H, în acelaşi timp O — modul finit drept, coincide cu O. Un subinel $O \supset \mathcal{C}$ al înfăşurării inelare $H \supset \mathcal{C}$ este ordin *maximal extrinsec* când este $\mathcal{C}$-modul drept finit şi când orice alt subinel $O' \supset O$ al lui H, cu aceeaşi proprietate, coincide cu O. Această noţiune (mai puţin numele) apare la toţi autorii afară de Cl. Chevalley. Este clar că ordinele maximale extrinsece intră printre cele intrinsece, deci ultimele sunt mai generale.

In § 2, introducem cea dintâi categorie de aritmetici necomutative exhaustive. Contrar aritmeticilor complete din § 3, construite cu maximalitatea ordinului, *aritmeticile închise*, de care este vorba în § 2, sunt construite cu o închidere aritmetică destul de particulară. Teoria aritmeticilor închise pune în evidenţă mai bine decât teoria aritmeticilor complete, trăsăturile ce garantează, în comutativ şi pentru domeniile de integritate, inversarea teoremei fundamentale.

Cadrul îl formează înfăşurările inelare $H \supset O$ unde H are element-unitate şi unde O admite un semigrup central de nondivizori ai lui zero satisfăcând cererea prealabilă (privitoare la numere cardinale)

α_0. Ord. $O >$ Ord. $(O - E)$.

Inelul H poate fi presupus redus la inelul câturilor*) lui O mod E. Cererea prealabilă α_0 poate fi slăbită până la

α_0'. Inelul O admite un «algoritm al lui Euclid» mod E. Adică pentru $a \in O$, $\varepsilon \in E$ există un $b \to O$, $\eta \to E$ cu $a = b\,\varepsilon + \eta$.

Cererea α_0 am numit-o *cererea de subintegritate* pentrucă domeniile de integritate (nenule) $\mathcal{C}\,\sigma$ satisfac banal, pentru $E = (\mathcal{C} - 0)$. Sub această formă apare la E. N o e t h e r.

In acest cadru spunem că O are (în inelul H al câturilor mod E) o *aritmetică închisă*, când următoarele axiome sunt satisfăcute

α_1. *Închiderea aritmetică mod E.*

Aceasta înseamnă că orice element η al grupului multiplicativ (E) generat în H de unităţile E, ale cărui toate puteri pozitive rămân în O-modulul finit $O\,\varepsilon^{-1}$, aparţine lui O, adică dacă

$$\eta^i \to O\,\varepsilon^{-1}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

unde $\eta \to (E)$, $\varepsilon \to E$, atunci

$$\therefore \quad \eta \to O.$$

α_2. *Limitarea maximală pentru ideale.*

α_3. *Implicaţia «prim → nedivizibil».*

Demonstrăm că aritmeticile $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ în cadrul α_0, respectiv α_0', au teoremă fundamentală.

Inlocuind pe α_1 cu închiderea aritmetică, mai tare, dată de axioma $\bar{\alpha}_1$ (*închidere aritmetică mod Z unde Z înseamnă centrul lui H*),

$$\zeta^i \to O\,\varepsilon^{-1}\,, \quad (i = 1, 2, 3\ldots), \quad \zeta \to Z, \quad \varepsilon \to E,$$

$$\therefore \quad \zeta \to O,$$

recunoaştem că aritmeticile $\bar{\alpha}_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ au teoremă fundamentală, independent de orice cadru.

Zicem că descompuneri, în general necomutative, în produse de ideale prime sunt *necomutativ-unice* când au aceeaşi dimensiune şi aceiaşi factori, abstracţie făcând de repetiţie şi de locul pe care îl ocupă în produs.

Zicem că descompuneri, în general necomutative, în produse de ideale prime sunt de *tip Noether*, când pentru $B \subset A < O$ există un ideal $C < O$, astfel încât descompunerile lui A, B, C să verifice relaţia

$$A = CB.$$

Cu aceste noţiuni putem enunţa rezultatul capital:

T e o r e m a e x h a u s t i v ă. *In cadrul α_0, respectiv α_0', şi pentru semigrupuri E cu $E = (E) \cap O$, aritmeticile închise $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ şi aritmeticile care admit teoremă fundamentală de tip Noether cu unicitate necomutativă, coincid.*

*) Se poate arăta (printr'o demonstraţie analoagă aceleia relativă la corpul câturilor domeniilor de integritate) că fiind dat un inel O cu un semigrup central E de nondivizori ai lui zero, vectorii (a, ε) cu $a \in O$, $\varepsilon \in E$ admit împărţirea în clase $a_1\,\varepsilon_2 = a_2\,\varepsilon_1$. Aceste clase numite *câturi mod E*, se lasă organizate într'un inel $\mathfrak{K}$ care admite un izomorf $H \supset O$. Acest inel H, unic determinat până la izomorfisme, este ceea ce numim *inel al câturilor lui O mod E.*

A posteriori, unicitatea se dovedeşte comutativă (descompuneri comutative unic-determinate până la ordinea factorilor).

Avem în teorema de mai sus analogul perfect al teoremei lui Noether: pentru O domeniu de integritate şi $E = (O - 0)$, rezultă.

Pentru O comutativ (dar cu divizori ai lui zero) existenţa teoremei fundamentale în cadrul $\overline{\alpha}_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ se găseşte enunţată fără demonstraţie în V a n d e r W a e r d e n [9] *).

Aşa dar, cercetarea noastră are, în comutativ, această însemnătate: dă cadrul (α_0 *sau* α'_0) *în care teoria idealelor în inelele comutative generale devine exhaustivă.* Ea arată, că axioma $\overline{\alpha}_1$ poate fi slăbită până la α_1.

Demonstraţiile din acest paragraf au ca idee centrală identificarea aritmeticilor închise ca artimetici anterioare 1*) + 2*) + 3*) şi preluarea teoremei fundamentale dela acestea din urmă.

In § 3 introducem *aritmeticile complete.*

Cl. C h e v a l l e y defineşte aritmeticile sale regulate postulând existenţa modulului invers**) (axioma I). Pentru o reconstrucţie rapidă a teoremei fundamentale procedeul poate fi apărat. R. D e d e k i n d însuşi, în redactarea celebrului supliment 11 la *Lecţiile lui Dirichlet*, ediţia a 4-a, aşează proprietatea modulului invers în fruntea cercetării, după ce însă a avut grija, în vreo 60 de pagini, s'o construiască***). Intr'un manuscris postum, o redactare a aceluiaşi supliment pentru o viitoare ediţie a 5-a a *Lecţiilor lui Dirichlet*, demonstraţia teoremei fundamentale este menţinută în aceleaşi linii.

Exemplul lui R. D e d e k i n d face autoritate. Cererea modulului invers trebue raportată la cereri mai semnificative, altfel creem o oarecare tautologie cu teorema fundamentală.

Acesta este unul din motivele pentru care introducem aritmeticile complete unde un atare formalism al aritmeticilor primitive este evitat. Există şi un al doilea motiv, mai puternic: aritmeticile complete sunt exhaustive (într'un anume cadru), în vreme ce aritmeticile primitive nu se lasă inversate. Trebue spus însă că, ceea ce le separă este natura semigrupului caracteristic. Cu acelaşi semigrup caracteristic E, global subpermutabil $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ cu O, aritmeticile primitive şi aritmeticile complete sunt a *posteriori* identice.

Proprietatea exhaustivă a aritmeticilor complete este probată în § 5. Aici este probată calitatea lor de aritmetici primitive.

Zicem că înfăşurarea inelară cu element-unitate $H \supset O$, unde *semigrupul caracteristic E este format din unităţi ale lui H luate din O şi global subpermutabile* $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ *cu* O, este cu aritmetică completă când avem:

1. *Limitare maximală pentru idealele drepte conţinătoare de unităţi* $\varepsilon \to E$.
2. *Implicaţia « prim → nedivizibil ».*
3. *Maximalitatea intrinsecă a ordinului O în H.*

Demonstraţia în liniile ei mari urcă la E. A r t i n [4]. Schimbând însă tehnica demonstraţiei, am putut arăta că teorema fundamentală aparţine şi

*) ed. I-a, p. 100.

**) Aritmeticile noastre primitive, generalizări ale aritmeticilor regulate, moştenesc dela acestea aceeaşi particularitate.

***) Există redactări mai simple ale teoriei clasice a idealelor: aceea a lui A. H u r v i t z sau aceea a aritmeticianului rus Z o l o t a r e f f. Ele sunt însă tăiate pe măsura cazului comutativ (O = domeniu de integritate). Existenţa modulului invers nu ocupă în aceste teorii un loc central. Abia aritmeticile sistemelor de numere hipercomplexe au arătat însemnătatea acestei proprietăţi. Teorema fundamentală se stabileşte aici cu ideile lui R. D e d e k i n d.

aritmeticilor derivate din aritmeticile complete prin inlocuirea axiomei 1 cu axioma 1 *) a limitării maximale pentru ideale iar axioma 3 a maximalităţii ordinului cu *cererea* (mai tare decât α_1 şi $\bar{\alpha}_1$) *de închidere aritmetică*

α. *Orice număr* $\chi \to H$ *ale cărui toate puteri pozitive* χ^i *rămân cuprinse în acelaşi modul finit* O ε^{-1}, $\varepsilon \to E$ *aparţine lui* O.

Aritmeticile complete astfel amendate nu sunt însă inversabile.

§4 aduce construcţii ale ipotezelor 1 şi 2 din definiţia aritmeticilor complete. Numai axioma 3 a maximalităţii ordinului rămâne postulată, ceea ce de altfel este în natura acestor cercetări, maximalitatea luând aici locul închiderii aritmetice din comutativ.

In cadrul algebrelor H (nu numai decât semisimple) cu element-unitate, peste corpul k al câturilor unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$, dăm această construcţie a ipotezei 1, generalizând o teoremă ascunsă, a lui H. Grell:

Dacă în $\mathcal{C}$ *există o teorie clasică a idealelor, atunci orice inel* O *din* H *cu* $k \cap O = \mathcal{C}$ *are limitare maximală pentru idealele sale drepte nenule.*

In cazul când H este o algebră divizoare comutativă (adică o extindere finită eventual inseparabilă a lui k) regăsim rezultatul lui Grell, esenţial: limitarea maximală pentru idealele nenule ale ordinului principal **).

Pentru ipoteza 2 dăm mai multe construcţii.

Prima construcţie este foarte generală.

Fie O un inel în care idealele sunt definite modulo un semigrup E arbitrar de elemente (înfăşurătorul H nu intervine aici). In acest caz:

Dacă fiecare din idealele prime din O *are limitare minimală pentru divizorii săi drepţi, atunci implicaţia «prim* $\to$ *nedivizibil» este realizată.*

Demonstraţia se face cu ajutorul teoremei lui Brauer şi Hopkins asupra nilpotenţii radicalului în inelele cu limitare minimală pentru idealele drepte şi cu teorema lui Wedderburn a structurii.

In celelalte două construcţii cadrul apare simţitor limitat.

Considerăm o înfăşurare inelară $H \supset O$ care satisface cererile prealabile

1. O este $\mathcal{C}$-*modul finit drept.*

2. *Semigrupul caracteristic* E *al idealelor din* O *este conţinut în* $(\mathcal{C} - 0)$.

3. *Elementele din* $\mathcal{C}$ *sunt global sub permutabile* $cO \subset Oc$ *cu* $\grave{O}$ $(c \in \mathcal{C})$.

In aceste condiţii, demonstrăm că dacă una sau alta din următoarele două cereri

A. Inelul $\mathcal{C}$ satisface implicaţia «prim $\to$ nedivizibil» pentru toate idealele prime obişnuite, conţinătoare de elemente $\varepsilon - E$;

B. In inelul $\mathcal{C}$ subcomutativ $c\mathcal{C} \subset \mathcal{C}c$ avem limitare minimală pentru idealele drepte ce divid câte un ideal (este deajuns câte un ideal prim);

este satisfăcută, atunci în O avem implicaţie «prim $\to$ nedivizibil».

Luând împreună construcţia ipotezei 1 şi construcţia A a ipotezei 2 ajungem la această caracterizare importantă a unei largi categorii de aritmetici complete:

---

*) p. 261–272.

**) Profităm de ocazie pentru a nota aici, o observaţie pe care Grell n'o face. In virtutea teoremei noastre, axioma 1 este împlinită de orice subinel $O \supset \mathcal{C}$ din H, cu $k \cap O = \mathcal{C}$. Pe de altă parte dacă idealele nenule din $\mathcal{C}$ satisfac axioma 2, atunci idealele nenule din O satisfac de asemenea.

Conchidem, că în orice inel $O \supset \mathcal{C}$ cu $k \cap O = \mathcal{C}$ al unei extinderi finite H peste corpul k al câturilor unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu teoria clasică a idealelor, avem o teoremă de descompunere, cu unicitate, în produs de ideale uniforme maxime.

O algebră H cu element-unitate peste corpul câturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu teorie clasică a idealelor, induce în fiecare ordin maximal intrinsec O cu $k \cap O = \mathcal{C}$ din H şi limitare minimală pentru divizorii drepţi ai idealelor prime, o aritmetică completă, faţă de orice semigrup caracteristic $E \subset (\mathcal{C} - 0)$.

Teorema lui Grell asupra teorii clasice a idealelor în ordinul principal Ω al unei extinderi finite, eventual neseparabilă, *intră aici*, pentru H algebră divizoare comutativă peste k. Facem observaţia, că O nu rezultă deloc, în teorema de mai sus, $\mathcal{C}$-modul finit.

Cu teorema finitudinii bazei şi cu a doua construcţie B a ipotezei 2 obţinem caracterizarea unei alte categorii de aritmetici complete:

O înfăşurare inelară cu element-unitate $H \supset \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C}$ este un inel cu limitare maximală şi limitare minimală de margine inferioară nenulă, pentru idealele drepte, induce în orice ordin maximal extrinsec $O \supset \mathcal{C}$ global sub-permutabil $cO \subset Oc$ — de semigrup caracteristic $E \subset \mathcal{C}$ format din unităţi ale lui H global permutabile $\varepsilon O = O\varepsilon$ — o aritmetică completă.

In § 5 se trece la inversarea teoremei fundamentale în următorul cadru.

Fie $H \supset O$ o înfăşurare inelară cu element-unitate, de semigrup caracteristic E format din unităţi ale lui H situate în O permutabile global $\varepsilon O = \varepsilon O$ cu O. Presupunem că $H \supset O$ satisface cererea prealabilă:

I. *O-modulele finite drepte $M \supset O$ din H, în acelaşi timp inele, coincid cu amplificări la stânga ale idealelor întregi A prin câte o unitate stângă η din H, adică*

$$M = \eta A, \quad \eta' \eta = 1$$

Avem următoarea inversare a teoremei fundamentale:

Teoremă. *Dacă idealele $A < O$ au teoremă fundamentală cu unicitate necomutativă de tip Noether, atunci înfăşurarea inelară $H \supset O$ satisface axiomele*

1′. *Limitarea maximală pentru ideale.*

2. *Implicaţia « prim → nedivizibil ».*

3. *Maximalitatea intrinsecă a lui O.*

Deci, inversarea conduce nu chiar la aritmeticile complete, ci la altele, mai generale. Intr'adevăr, axioma 1′) este o slăbire a lui 1.

Să introducem noua cerere prealabilă

II. *Dacă $A \supset B$ este o înfăşurare de ideale drepte conţinătoare de unităţi $\varepsilon \to E$, atunci $AO = BO$ implică $A = B$.*

In cadrul fix I+II este valabil atunci acest criteriu necesar şi suficient de cunoaştere a aritmeticilor complete:

Teoremă de echivalare. *Aritmeticile complete şi aritmeticile în care orice ideal admite descompuneri necomutativ unice, de tip Noether, se acoperă.*

A posteriori unicitatea necomutativă este recunoscută ca o unicitate comutativă: produsele sunt comutative şi identice mai puţin ordinea factorilor.

Cu privire la cererile prealabile I şi II, trebue menţionate următoarele reducţiuni:

Dacă E este un semigrup central de non-divizori ai lui zero din O iar H inelul câturilor lui O mod E, permutabilitatea globală a elementelor ε din

E este dela sine satisfăcută. Demonstrăm de asemenea că cererea prealabilă I este construită.

Dacă, în plus, O este $\mathcal{C}$-modul finit, cererea prealabilă II cade, deoarece O admite dela sine limitare maximală pentru ideale drepte.

Ca aplicaţie a acestei reduceri şi a construcţiilor din § 4, ajungem la următoarele teoreme de echivalare, mai particulare dar mai semnificative:

A d o u a t e o r e m ă d e e c h i v a l a r e. *In interiorul algebrelor* $H \supset k$ *peste corpul* k *al câturilor unui domeniu de integritate* $\mathcal{C}$ *cu teorie clasică a idealelor, inelele* O, *cu* $k \cap O = \mathcal{C}$, *în care inelul respectiv* $\mathfrak{K}$ *al câturilor mod* $E = (\mathcal{C} - 0)$, *induce o aritmetică completă şi inelele* O *cu* $k \cap O = \mathcal{C}$ *şi teoremă fundamentală de tip Noether cu unicitate necomutativă, se acoperă.*

Aci idealele sunt definite faţă de semi-grupul $E = (\mathcal{C} - 0)$ iar descompunerile rezultă *a posteriori* comutative şi deci unice până la ordinea factorilor.

T e o r e m ă d e t r a n s f e r a r e. *Dacă* $H \supset k$ *este o algebră cu element-unitate peste corpul câturilor unui domeniu de integritate* $\mathcal{C}$ (de asemenea cu element-unitate), *ordinele ei maximale extrinseci* O, *cu bază minimală, au atunci şi numai atunci o aritmetică completă* (cu H inel al câturilor mod $(\mathcal{C} - 0)$) *când în* $\mathcal{C}$ *există o teorie clasică a idealelor.*

Folosind a doua teoremă de echivalare obţinem pentru teorema de transferare acest enunţ isbitor:

In algebrele $H \supset k$ *peste corpul câturilor* k *al unui domeniu de integritate* $\mathcal{C}$, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca într'un ordin maximal extrinsec cu bază minimală să avem teoremă fundamentală* (de tip Noether şi unicitate necomutativă) *este ca în* $\mathcal{C}$ *să stăpânească o teorie clasică a idealelor.*

De aici, obţinem *inversarea unei teoreme* binecunoscute *a lui Noether*:

Condiţia necesară *pentru ca într'o extindere finită a corpului* k *al câturilor unui domeniu de integritate* $\mathcal{C}$, — *extindere de ordin principal cu bază minimală — să admită teorie clasică a idealelor este ca mai întâi* $\mathcal{C}$ *să admită o astfel de teorie.*

Menţionăm că în cadrul unei axiome care se acoperă cu axioma II a lui Chevalley privitoare la aritmeticile regulate şi pentru un inel $\mathcal{C}$ care admite unele trăsături ale inelului cu ideal principal (o slăbire a criteriului Hasse-Dedekind), maximalitatea bazei în ordinele din propoziţiile de mai sus este asigurată şi ca atare poate fi omisă din enunţuri.

Această lucrare serveşte de introducere unei alteia asupra *aritmeticilor conexiunilor galoisiene* unde teoria idealelor quasi-egale a lui E. Artin şi Van der Waerden este reluată în necomutativ şi integrată în acel capitol de analiză generală creat de G. B i r k h o f f şi O. O r e: teoria conexiunilor galoisiene.

§ 1. Aritmeticile primitive

1°. *Definirea noţiunilor.*

Infăşurarea inelară $H \supset O$ se numeşte *cu element-unitate* când H are element-unitate conţinut în O.

Noţiunea de ideal o relativizăm cu ajutorul unui semigrup de elemente din O, numit *semigrupul caracteristic* E.

Prin *ideal* (fără menţiune specială) înţelegem, în acest articol, un ideal bilateral al inelului O conţinător a cel puţin un element caracteristic $\varepsilon \to E$. Este clar că idealele astfel definite *formează semigrup multiplicativ.*

Ideal nedivizibil este un ideal $N < O$ pentru care înfășurările

$$O \supset M \supset N$$

cu M ideal, implică fie $O = M$, fie $M = N$.

Ideal prim se numește un ideal $P < O$ care odată cu un produs AB de *ideale* divide cel puțin unul din factori; așa dar, un ideal $P < O$ pentru care

$$P \supset AB$$

implică fie $P \supset A$, fie $P \supset B$.

Ideal prim-tare este un ideal $P < O$ care odată cu un produs de *ideale bilaterale* divide cel puțin unul din factori.

Numim *imagine dreaptă* $\overline{A}$, respectiv *stângă* $\widetilde{A}$, a unui ideal A totalitatea elementelor a din H cu

$$a\,A \subset O, \quad \text{respectiv } A\,a \subset O \qquad (a \to H).$$

In întreaga lucrare, în afară de cazul când se face mențiune specială, *semigrupul caracteristic E este presupus format din unități ale inelului H* (conținute în O).

Spunem că *idealul $A < O$ are modul invers* când avem

$$A\,\widetilde{A} = \widetilde{A}\,A = O.$$

Inelul O se numește *ordin maximal intrinsec* când coincide cu orice suprainel $O' \supset O$ din H, în același timp O-modul finit drept peste O.

Inelul O se numește *ordin maximal extrinsec* $O \supset \mathcal{C}$ când este $\mathcal{C}$-modul finit drept peste $\mathcal{C}$ și coincide cu orice suprainel $O' \supset O$ cu aceeași proprietate.

2°. *Proprietățile imaginilor și modulului invers*

Teoremă. *Imagina, de exemplu stângă, $\widetilde{A}$ a unui ideal bilateral A este un O-modul bilateral care înfășură pe O,*

$$\widetilde{A} \supset O.$$

Demonstrație. Cum $O^2 \subset O$, este clar că

$$\widetilde{A} \supset O.$$

Să arătăm că $\widetilde{A}$ este modul. Fie

$$a_1\,a_2 \in \widetilde{A} \qquad (a_0 \in A).$$

Conform definiției imaginii stângi, urmează că

$$\left.\begin{aligned} a_0\,a_i &\to O && (i = 1,\ 2),\\ \therefore\ a_0\,(a_1 - a_2) &\to O && (a_0 \in A),\\ \therefore\ (a_1 - a_2) &\to \widetilde{A} && (a_i \in \widetilde{A}). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Deci $\widetilde{A}$ este un submodul al lui H.

Fie

$$a \in \widetilde{A}.$$

Avem, pe rând,

$$A\,a \subset O,$$

$$\therefore \quad A\,aO \subset O^2 \subset O,$$

$$\therefore \quad aO \subset \widetilde{A} \qquad (a \in \widetilde{A}). \qquad (2)$$

Pe de altă parte, idealul A este bilateral. Ca atare

$$A\,O\,a \subset A\,a \subset O,$$

$$\therefore \quad O\,a \subset \widetilde{A} \qquad (a \in \widetilde{A}). \qquad (3)$$

Deci (2) şi (3) arată că modulul $\widetilde{A}$ este O-modul bilateral.

Dual, conchidem, că imaginea dreaptă $\overline{A}$ este un O-modul bilateral care înfăşură pe O.

Teoremă. *Intr'un inel O cu element-unitate, modulul invers al unui ideal bilateral este o noţiune auto-dual㠹 adică*

$$\overline{A} = \widetilde{A} = A^{-1}.$$

Demonstraţie. Din

$$\overline{A}\,A \subset O$$

urmează că

$$\overline{A}\,A\,\widetilde{A} \subset O\,\widetilde{A}. \qquad (4)$$

Dar potrivit definiţiei modulului invers, avem $A\,\widetilde{A} = O$. Incluziunea (4) devine

$$\overline{A}O \subset O\widetilde{A}. \qquad (5)$$

In virtutea teoremei precedente, $\overline{A}$ şi $\widetilde{A}$ sunt O-module bilaterale. Cum O are element-unitate, rezultă *)

$$\overline{A}O = \overline{A}, \quad O\widetilde{A} = \widetilde{A}.$$

Deci (5) se scrie

$$\overline{A} \subset \widetilde{A}. \qquad (6)$$

Pe de altă parte, din $\widetilde{A}\,A = O$ avem încă

$$\overline{A} \supset \widetilde{A}. \qquad (6')$$

Luând (6) şi (6') împreună, obţinem

$$\overline{A} = \widetilde{A} = A^{-1}.$$

Observaţie. Teoremele din acest aliniat, stabilite pentru idealele bilaterale, sunt *a fortiori* valabile pentru o submulţime a acestora: pentru ideale.

3°. *Definiţia aritmeticilor primitive. Teorema produsului de divizori veritabili divizat. Implicaţia « nedivizibil → prim ».*

Fie $H \supset O$ o înfăşurare inelară cu element-unitate.

*) Din înfăşurările contrarii $\overline{A}O \subset \overline{A}$, $\overline{A}O \supset \overline{A}$, respective $O\widetilde{A} \subset \widetilde{A}$, $O\widetilde{A} \supset \widetilde{A}$.

Spunem că H induce în O o aritmetică primitivă, când următoarele axiome sunt verificate (E, un semigrup de unităţi ale lui H conţinute în O):

1) *Limitarea maximală pentru idealele drepte conţinătoare de unităţi caracteristice* $\varepsilon \to E$.

2) *Modulul invers pentru idealele nedivizibile.*

3) *Maximalitatea intrinsecă a ordinului O.*

Forma de mai sus a axiomelor este cerută de preocuparea noastră de a prinde în aritmeticile primitive, aritmeticile regulate ale lui Chevalley. Astfel 1) derivă din axioma III a lui Chevalley; 2) este exprimată în axioma I, iar 3) este demonstrată de Cl. Chevalley prin axiomele I şi III.

In definitiv, cum vom arăta în aliniatul 9°, axioma 3) are aici rolul de a construi implicaţia « prim → nedivizibil ». Formularea axiomei 1) pentru idealele drepte şi nu pentru ideale, se explică tot prin necesitatea acelei construcţii.

Importă deci să stabilim teorema fundamentală în cadrul mai larg următor:

1′) *Limitarea maximală pentru ideale.*

2′) *Modulul invers pentru idealele prime.*

3′) *Implicaţia « prim → nedivizibil ».*

In locul lui 3′) introducem o afirmaţie mai slabă în aparenţă:

3″) *Divizibilitatea multiplicativă a idealelor prime.*

Aceasta înseamnă că două ideale prime P' şi P'', care se divid aditiv $P' \supset P''$, se divid şi multiplicativ (la stânga) $P'' = P' P_1$, cu P_1 eventual idealul O.

Aritmeticile 1′) + 2′) + 3″) le numim *aritmetici anterioare.*

Este clar că axioma 3″) se verifică banal cu 3′) luând $P_1 = O$.

In acest aliniat ipotezele de mai sus nu intervin. Chiar E este presupus un oarecare semigrup multiplicativ de elemente din O. Teoremele sunt deci cu totul generale.

Teorema produsului de divizori divizat.

Orice ideal neprim $A < O$ *divide produsul a doi divizori veritabili* *) *ai săi, dacă O are element-unitate.*

Demonstraţie. Linia generală a demonstraţiei este aceea din teoria clasică a idealelor unde teorema are un rol hotărîtor — ca şi aici de altfel.

In virtutea ipotezei, idealul A este neprim. Aşa dar, există două ideale $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nedivizate de A, dar de produs divizat

$$A \supset \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{B} \not\subset A, \quad \mathfrak{C} \not\subset A. \tag{2}$$

Introducem reuniunile

$$B = A \cup \mathfrak{B}, \qquad C = A \cup \mathfrak{C}. \tag{3}$$

Ele reprezintă ideale bilaterale, deoarece idealele bilaterale formează structură. Ceva mai mult, sunt chiar ideale, deoarece $\varepsilon \to A \subset B$, $\varepsilon \to A \subset C$, unde ε este un element caracteristic al lui A.

Din (3) rezultă

$$B \supset A, \qquad C \supset A.$$

*) Precizarea $B < O$, $C < O$, care se dovedeşte esenţială, nu figurează în redactarea lui E. Artin. [4], p. 270–271.

Nu putem avea $B = A$, respectiv $C = A$, întrucât din (3) ar urma că $\mathfrak{B} \subset A$, respectiv $\mathcal{C} \subset A$, împotriva lui (2). Rămâne

$$B > A, \qquad C > A. \tag{4}$$

Pe de altă parte, cum A este ideal bilateral, din (1) şi (3) urmează

$$BC = (A \cup \mathfrak{B})(A \cup \mathcal{C}) = A^2 \cup \mathfrak{B}A \cup A\mathcal{C} \cup \mathfrak{B}\mathcal{C} \subset A \cup A \cup A \cup A.$$

In definitiv

$$BC \subset A. \tag{4'}$$

Fără ipoteza elementului-unitate, putem trage din (4') un rezultat de asemenea important şi anume:

Idealele neprime A care nu divid pe O^2 sunt divizibile.

Intr'adevăr, nu amândoi B şi C din (4') pot fi egali cu O, altfel ar urma $O \subset A$, contrar presupunerii făcute. Aşa dar, pentru B de exemplu, avem din (4') incluziunile $O > B > A$. Ca atare B rezultă divizibil.

Cu ipoteza elementului-unitate putem arăta că

Idealele neprime $A < O$ au doi divizori veritabili diferiţi de O.

Intr'adevăr, în caz contrar am avea în (4) fie $B = O$, fie $C = O$. Introducând în (4') am obţine fie $C \subset A$, fie $B \subset A$, contrar lui (4).

Este deci probat că (4') se completează până la

$$O > B > A, \qquad O > C > A. \tag{4''}$$

Deci (4') şi (4'') demonstrează teorema.

Teorema implicaţiei «nedivizibil → prim».

Intr'un inel O, idealele nedivizibile care nu divid pe O^2 sunt prime. Dacă O are element-unitate, idealele nedivizibile sunt prime.

Demonstraţie. Presupunem, dimpotrivă, că idealul nedivizibil A ar fi neprim. Conform primei observaţii subliniate în cursul demonstraţiei precedente, ar rezulta (fără ipoteza elementului-unitate resp. cu ipoteza elementului-unitate) divizibil, deci ne-am contrazice.

Alte demonstraţii ale acestei propoziţii, pentru cazuri mai particulare, se găsesc la E. Artin [4]*) şi Cl. Chevalley [8]**).

Observaţie. Este important de menţionat că prima teoremă, cât şi cea de a doua (consecinţă directă a primei), subsistă pentru idealele prime-tari (aliniatul 1°).

Intr'adevăr, fie $A < O$ şi neprim-tare. Există atunci două ideale *bilaterale* $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$ pentru care avem încă (1) şi (2). Idealele B şi C din (3) sunt bilaterale şi conţinătoare a elementului caracteristic $\varepsilon \to E$ al lui A. Deci sunt ideale. De aici demonstraţia continuă cuvânt cu cuvânt, deoarece nu foloseşte decât bilateralitatea lui $\mathfrak{B}$ şi $\mathcal{C}$.

A doua teoremă rezultă prin reducere la absurd din prima, cu inlocuirea cuvântului *prim* cu *prim-tare*.

4°. *Teorema produsului de divizori primi divizat*

Incepând din acest alineat vom indica într'un dreptunghi, alăturat titlului teoremei, cadrul axiomatic.

---

*) p. 269.
**) p. 7.

Teoremă 1'). *Intr'un inel O cu element-unitate orice ideal $A<O$ divide un produs de divizori primi ai săi.*

Demonstrație. Demonstrația constă în adaptarea la cazul general de față a demonstrației analoage din teoria clasică a idealelor sau din aritmetica numerelor hipercomplexe, a lui Artin *).

Pentru A egal cu un ideal prim P, teorema este verificată, în baza relației banale

$$P \supset A \supset P.$$

Putem presupune deci $A < O$ diferit de un ideal prim.

In virtutea primei teoreme din aliniatul 3°, idealul A divide produsul a doi divizori veritabili ai săi. Avem

$$A \supset A_1 A_1', \tag{1}$$

$$O > A_1 > A \quad , \quad O > A_1' > A. \tag{2}$$

Admitem că A se sustrage cererii din enunț.

Nu amândouă idealele A_1 și A_1' pot satisface cererea din enunț. Așa dar nu putem avea în același timp

$$A_1 \supset P_1 P_2 \dots P_i \quad , \quad A_1' \supset P_1' P_2' \dots P_j',$$

$$P_h \supset A_1, \quad , \quad P_k' \supset A_1', \tag{3}$$

$$(h = 1, 2, \dots i) \ , \quad (k = 1, 2, \dots j).$$

Altfel, introducând (3) în (1), obținem, având în vedere (2),

$$A \supset P_1 P_2 \dots P_i \cdot P_1' P_2' \dots P_j',$$

$$P_k > A, \quad , \quad P_k' > A,$$

$$(h = 1, 2, \dots i), \quad , \quad (k = 1, 2, \dots j),$$

contrar ipotezei raționamentului prin absurd.

Deci, cel puțin unul din idealele A_1, A_1', să zicem A_1, se sustrage proprietății din enunț.

Avem

$$A_1 > A.$$

Dar $A_1 < O$, conform lui (2). Ceva mai mult, A_1 este neprim, altfel ar verifica proprietatea din enunț.

Deci putem acorda lui A_1 rolul lui A. Iterând, obținem o nouă incluziune tare $A_2 > A_1$, de ideale, adică lanțul

$$A_2 > A_1 > A,$$

unde $A_2 < O$ este neprim, deoarece nu verifică proprietatea din enunț.

*) Pentru construirea prin iterare a lanțului ascendent de ideale, de mai jos, E. Artin are nevoie să presupună că A_1 și A_1' din relațiile (2) sunt ideale veritabile. Acest punct nu-l demonstrează însă, încât redactarea noastră aduce aici o precizare.

Iterând încă, ia naştere lanţul veritabil ascendent, indefinit, de ideale

$$\ldots > A_i \ldots > A_2 > A_1 > A,$$

împotriva axiomei 1').

Este dovedit astfel, indirect, că orice ideal $A < O$ verifică proprietatea din enunţ.

Observaţie. Teorema de mai sus pe lângă existenţa elementului-unitate şi axioma 1'), mai foloseşte prima teoremă din aliniatul 3°. Am observat acolo că această teoremă este valabilă şi pentru idealele prime-tari, iar semigrupul caracteristic E poate fi luat arbitrar.

Teorema din aliniatul 4° este valabilă, în aceleaşi condiţii, şi pentru produsele de divizori primi-tari.

5°. *Teorema lui Artin, a comutativităţii.*

Teorema generală de permutabilitate.

Intr'o înfăşurare inelară O cu element-unitate şi semigrup caracteristic E arbitrar, orice ideal Q, cu modul invers, este permutabil cu orice ideal prim P care nu-l divide.

Demonstraţie. Punem

$$Q^{-1} PQ = A, \tag{1}$$

$$Q P Q^{-1} = A'. \tag{1'}$$

Conform teoremei din aliniatul 2°, avem în Q^{-1} un O-modul bilateral. Deci A şi A' sunt O-module bilaterale. Pe de altă parte, din

$$P \subset O$$

rezultă

$$Q^{-1} PQ \subset Q^{-1} OQ \subset Q^{-1} Q = O, \quad QPQ^{-1} \subset QOQ^{-1} \subset QQ^{-1} = O,$$

aşa dar

$$A \subset O, \qquad A' \subset O;$$

deci A şi A' sunt ideale bilaterale.

Fie $\varepsilon \to P$, $\eta \to Q$ elemente caracteristice din P şi Q. Cum $Q^{-1} \supset O$ conţine elementul-unitate, din (1) respectiv (1'), urmează

$$\begin{aligned} \varepsilon\eta &\to A, & \eta\varepsilon &\to A', \\ \varepsilon\eta &\to E, & \eta\varepsilon &\to E. \end{aligned} \qquad (\varepsilon, \eta \to E)$$

Prin urmare A şi A' sunt ideale.

Din (1) respectiv (1'), deducem

$$PQ = QA, \qquad QP = A'Q,$$

$$\therefore \quad P \supset QA, \qquad \therefore \quad P \supset A'Q.$$

Insă P este prim iar, prin ipoteză, $P \not\supset Q$. Conchidem că

$$P \supset A, \qquad P \supset A',$$

adică

$$P \supset Q^{-1} PQ, \qquad P \supset QPQ^{-1},$$

$$\therefore \quad QP \supset PQ, \qquad \therefore \quad PQ \supset QP,$$

$$\therefore \quad QP = PQ.$$

Teorema este deci demonstrată.

Teorema lui Artin [2′)]. *Un ideal nedivizibil este permutabil cu orice ideal prim, în ipoteza existenței elementului-unitate din O.*

Demonstrație. Luăm semigrupul E arbitrar.

Conform implicației « nedivizibil → prim », demonstrată în aliniatul 3°, idealul nedivizibil Q, din enunț, este prim. In virtutea lui 2′) are modul invers [1]). Fie P idealul prim din enunț.

Dacă $P = Q$, teorema este banal verificată.

Dacă $P \neq Q$, idealul prim P nu divide pe Q, deoarece Q este nedivizibil. Toate ipotezele teoremei de permutabilitate sunt împlinite.

Conchidem că P este permutabil cu Q.

6°. *Existența descompunerilor în ideale nedivizibile pentru idealele prime.*

Teoremă [1′) + 2′) + 3″)]. *In aritmeticile anterioare orice ideal prim este produs de ideale nedivizibile.*

Demonstrație. Dacă idealul prim P este nedivizibil, proprietatea din enunț este banal verificată.

Presupunem deci P ideal prim dar divizibil,

$$P < A < O. \tag{1}$$

In virtutea teoremei din aliniatul 4°, idealul A are cel puțin un divizor prim P'. Din (1) urmează că

$$P < A \subset P', \tag{2}$$

așa dar $P < P'$. Aplicând axioma 3″), găsim

$$P = P'P^*, \tag{3}$$

cu $P^* = O$ sau P^* ideal prim. Prima eventualitate cade, deoarece din (3) ar rezulta $P = P'O$ și deci $P = P'$ (inelul O are element-unitate), împotriva lui (2). Rămâne deci P^* ideal prim.

Presupunem, prin absurd, că P nu verifică proprietatea din enunț.

Atunci cel puțin unul din factorii P' și P^* se sustrage proprietății din enunț. Altfel, descompunerile lor în produse de ideale nedivizibile, introduse în (3), ar da pentru P un produs de ideale nedivizibile, împotriva ipotezei raționamentului prin absurd.

Fie P_1 acela din factorii P' și P^* care se sustrage proprietății din enunț. Este clar că P_1 este ideal prim. Citim pe (3) că $P_1 \supset P$. Dacă $P_1 = P'$, din (2) rezultă $P_1 > P$. Dacă $P_1 = P^*$, nu putem avea $P_1 = P$ deoarece (3) s'ar scrie

$$P = P'P. \tag{4}$$

Insă, conform lui 2′), idealul prim P are un invers P^{-1}. Inmulțind în (4) la stânga cu P^{-1}, am găsi (O, cu element-unitate !)

$$O = P'O = P',$$

ceea ce este exclus. Este dovedit deci că în toate cazurile avem

$$P_1 > P.$$

---

[1]) Observăm că teorema face să intervină în realitate axioma mai slabă 2).

P_1 poate lua locul lui P, deoarece este prim, nu satisface proprietatea din enunţ şi, ca atare, este divizibil. Iterând, găsim o a doua înfăşurare tare $P_2 > P_1$ de ideale prime. Iterând încă, ia naştere lanţul veritabil ascendent, indefinit de ideale (prime)

$$\ldots > P_i \ldots > P_2 > P_1 > P,$$

împotriva axiomei 1').

Este deci indirect probat că P satisface proprietatea din enunţ.

In definitiv, teorema este demonstrată pentru orice ideal prim P.

7°. *Teorema de existenţă pentru aritmeticile anterioare*

Teoremă $\boxed{1') + 2') + 3'')}$. *Orice ideal* $A < O$ *se descompune în produs de ideale nedivizibile.*

Există descompuneri de dimensiune egală cu minimul dimensiunii produselor de ideale nedivizibile, divizate de A.

Demonstraţie. Conform teoremei din aliniatul 4°, există produse de divizori primi ai lui A divizate de A.

Aplicând fiecăruia din aceşti divizori teorema din aliniatul 6°, obţinem această precizare: există pentru A produse de ideale nedivizibile (divizori ai lui A) divizate de A.

Lăsăm la o parte împrejurarea că aceste ideale nedivizibile sunt divizori ai lui A şi reţinem numai faptul că există produse de ideale nedivizibile divizate de A.

Fie r minimul dimensiunii acestor produse. Executăm inducţie *) relativ la r.

Presupunem întâi $r = 1$. Avem deci

$$A \supset N,$$

unde N este ideal nedivizibil. Urmează

$$A = N.$$

Teorema se verifică deci (în amândouă afirmaţiile ei) pentru $r = 1$.

Fie acum $r > 1$. Admitem teorema adevărată pentru toate dimensiunile minime $r' < r$ şi ne propunem s'o stabilim pentru r.

Considerăm produsul de ideale nedivizibile divizat de A şi de dimensiune minimă r

$$A \supset N_1 N_2 \ldots N_r. \tag{1}$$

Conform axiomei 1'), idealul A admite un divizor nedivizibil N. Avem

$$N \supset A \supset N_1 N_2 \ldots N_r. \tag{2}$$

Dar N este ideal prim (aliniatul 3°). Ca atare, pentru un anume indice i, avem

$$N \supset N_i$$

*) In Van der Waerden, [9], p. 100, demonstraţia este insuficientă sau numai obscură. S'ar părea că inducţia se execută după minimul dimensiunii produselor de ideale nedivizibile *divizori ai lui A*, divizate de A, ceea ce este o eroare. In orice caz, produsul (1) de la care se porneşte este un produs de divizori ai lui A. Când se trece dela (1) la (5) nu se explică pentru ce factorii din (5) conţin mai departe un divizor al lui AN_r^{-1}.

iar în virtutea nedivizibilității lui N_i, chiar

$$N = N_i. \tag{3}$$

Potrivit teoremei lui Artin a comutativității, din aliniatul 5°, idealul nedivizibil N_i este permutabil cu toți factorii (primi) N_j, $j \neq i$ din (2).

Ca atare putem presupune

$$N_i = N_r. \tag{3'}$$

Incât, prin mijlocirea lui (3) și (3'), (2) se scrie

$$N_r \supset A \supset N_1 N_2 \dots N_r. \tag{4}$$

Pe de altă parte [axioma (2')], idealul nedivizibil N_r admite modul invers, deoarece este prim. Deci din (4), înmulțind spre stânga cu N_r^{-1}, obținem

$$O \supset A N_r^{-1} \supset N_1 N_2 \dots N_{r-1}. \tag{5}$$

Nu putem avea $AN_r^{-1} = O$, adică $A = N_r$, deoarece $r > 1$. Pe de altă parte, produsul de O-module bilaterale AN_r^{-1} apare, din (5), ca ideal bilateral. Așadar avem în AN_r^{-1} un ideal $AN_r^{-1} < O$, deoarece $N_r^{-1} \supset O$ conține elementul-unitate și deci AN_r^{-1} conține elementul caracteristic al lui A.

Fie r' dimensiunea minimă asociată lui AN_r^{-1}. Avem

$$AN_r^{-1} \supset N_1' N_2' \dots N_r'. \tag{5'}$$

Comparând (5) și (5'), obținem

$$r' \leqslant r - 1. \tag{6}$$

Dar din (5') obținem

$$A \supset N_1' N_2' \dots N_r', N_r. \tag{1'}$$

Comparând cu (1) conchidem

$$r' \geqslant r - 1. \tag{7}$$

Relațiile (6) și (7) luate împreună dau

$$r' = r - 1.$$

Deci lui AN_r^{-1} i se aplică ipoteza inductivă, și anume pentru o dimensiune minimă egală cu $r - 1$. Urmează

$$AN_r^{-1} = N_1^* N_2^* \dots N_{r-1}^*$$

$$\therefore \quad A = N_1^* N_2^* \dots N_{r-1}^* N_r^*,$$

unde N_i^* ($i = 1, 2, \dots r - 1$) sunt ideale nedivizibile și unde am pus pentru uniformitate $N_r^* = N_r$.

In definitiv, teorema, cu amândouă afirmațiile ei, presupusă adevărată pentru $r-1$, este adevărată pentru r. In particular, pentru $r = 1$ am verificat-o direct.

Teorema este deci demonstrată prin inducție.

8°. *Teorema fundamentală pentru aritmeticile anterioare.*

Teoremă $\boxed{1') + 2') + 3'')}$. *Orice ideal* $A < O$ *se descompune în produs comutativ de ideale nedivizibile, unic determinat până la ordinea factorilor.*

Demonstrație. Fie

$$A = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots \mathfrak{N}_s \tag{1}$$

o descompunere a lui A în produs de ideale nedivizibile, dar altfel arbitrară.

In virtutea teoremei de existență din aliniatul 7°, idealul A admite și o descompunere într'un produs de ideale nedivizibile de dimensiune egală cu minimul r de care este vorba în enunțul din 7°.

Este clar că avem

$$A = N_1 N_2 \dots N_r, \tag{2}$$

$$s \geqslant r.$$

Să arătăm că teorema se verifică pentru $r = 1$.

Din (1) și (2) obținem

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots \mathfrak{N}_s = N, \tag{3}$$

unde am pus $N = N_1$. Dar N este ideal prim. Așa dar, pentru un anume indice i avem $N \supset \mathfrak{N}_i$. Cum $\mathfrak{N}_i$ este nedivizibil, conchidem că $N = \mathfrak{N}_i$.

In virtutea teoremei lui Artin a permutabilității (aliniatul 5°), produsele (1) și (2) sunt permutabile. Deci această afirmație a enunțului este dintr'odată demonstrată.

Așa fiind, putem presupune în (3) idealul $\mathfrak{N}_i$ adus în locul lui $\mathfrak{N}_s$, și deci

$$\mathfrak{N}_s = N.$$

In virtutea axiomei 2'), idealul (prim) N are modul invers. Așa dar, înmulțind în (3) spre stânga cu N^{-1}, obținem sau identitatea $O = O$, dacă $s = 1$, sau

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots \mathfrak{N}_{s-1} = O, \tag{4}$$

dacă $s > 1$. In acest caz, din (4) rezultă

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots \mathfrak{N}_{s-1} \subset \mathfrak{N}_1 < O \tag{4'}$$

iar (4) și (4') dau o contrazicere. Prin urmare, în (3) trebue luat $s = 1$.

Teorema se verifică deci pentru $r = 1$.

O presupunem acum adevărată pentru toți $r' < r$, $r > 1$ și ne propunem să arătăm că ea este adevărată și pentru r.

Din (1) și (2) rezultă

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots \mathfrak{N}_s = N_1 N_2 \dots N_{r-1} N_r. \tag{5}$$

Cum N_r este prim, urmează *) că $N_r \supset \mathfrak{N}_i$ pentru un anume i. Deci $N_r = \mathfrak{N}_i$, deoarece $\mathfrak{N}_i$ este nedivizibil. Din cauza comutativităţii produselor putem lua chiar $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_s$, adică

$$\mathfrak{N}_s = N_r . \tag{6}$$

Inmulţind în (5) spre stânga cu N_r^{-1}, rămâne (O, cu element-unitate !):

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \ldots \mathfrak{N}_{s-1} = N_1 N_2 \ldots N_{r-1} .$$

Aplicând ipoteza inductivă, conchidem că $s - 1 = r - 1$, adică

$$s = r, \tag{7}$$

iar apoi (dispunând de ordinea factorilor)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{s-1} &= N_{r-1} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{N}_i &= N_i , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{N}_1 &= N_1 . \end{aligned} \tag{6'}$$

Teorema este demonstrată prin inducţie, în virtutea lui (7), (6), (6') şi a faptului, că (1) a fost presupusă o descompunere arbitrară în produs de ideale nedivizibile.

Observaţie importantă. Teorema fundamentală a aritmeticilor anterioare este valabilă pentru orice semigrup caracteristic E. Intr'adevăr, materialul folosit la demonstrarea teoremelor din aliniatele 6°, 7° şi 8° este stabilit în această ipoteză generală. Pe de altă parte, în cursul acestor demonstraţii nu s'a folosit faptul că E ar fi semigrup de unităţi. De asemenea, teorema este valabilă şi în cazul când idealele prime sunt definite tare, deoarece, după cum văzut, propoziţia din aliniatul 4° rămâne valabilă şi atunci.

9°. *Teorema fundamentală în aritmeticile primitive.*

In acest aliniat semigrupul caracteristic E este presupus format din unităţi ale lui H situate în O. Conţinutul axiomelor 1), 2) şi 3) este acela formulat în aliniatul 3°.

Teorema implicaţiei «prim → nedivizibil» $\boxed{1)+2)+3)}$.
Orice ideal prim din O este nedivizibil.

Demonstraţie. In virtutea axiomei 1), sau mai bine zis a formei sale slabe 1'), există cel puţin un divizor nedivizibil N al idealului prim, arbitrar dat, P. Avem

$$N \supset P. \tag{1}$$

Conform axiomei 2), idealul nedivizibil N are un modul invers N^{-1}. Din (1), înmulţind spre dreapta cu N^{-1}, urmează că

$$O \supset N^{-1} P = A. \tag{2}$$

*) Se recunoaşte imediat că N_r, care divide multiplicativ membrul al doilea din (5) îl divide şi aditiv.

Avem în A un produs de O-module bilaterale (aliniatul 2°), deci un O-modul bilateral. Ceva mai mult: chiar un ideal bilateral după cum se citeşte pe (2). Dar $N^{-1} \supset O$ conţine elementul-unitate, aşa dar $\varepsilon \to P \subset N^{-1} P$, unde ε este un element caracteristic al lui P.

In definitiv A este ideal. Din (2) rezultă

$$P = NA. \tag{3}$$

Presupunem

$$P \supset N. \tag{4}$$

Cum P este prim, urmează, din (3) şi (4),

$$P \supset A.$$

Pe de altă parte, din (3) avem

$$P \subset A.$$

Ultimele două relaţii dau

$$P = A,$$

adică

$$P = N^{-1} P.$$

De aici rezultă, pentru toţi exponenţii întregi şi pozitivi h,

$$P = (N^{-1})^h P.$$

Conchidem

$$(N^{-1})^h \subset \bar{P},$$

încât, pentru o unitate caracteristică ε a lui P, urmează

$$(N^{-1})^h \varepsilon \subset \bar{P}P \subset O. \tag{5}$$

Dar N^{-1} este, prin definiţie (aliniatele 1° şi 2°), O-modul bilateral. Puterea sa $(N^{-1})^h$ rezultă O-modul bilateral. Citim atunci pe (5) că avem în $(N^{-1})^h \varepsilon$ un ideal drept şi anume un ideal drept conţinător al elementului caracteristic ε, deoarece $N^{-1} \supset O$ conţine pe 1.

Fiindcă $1 \to N^{-1}$, urmează existenţa lanţului ascendent de O-module bilaterale

$$(N^{-1}) \subset (N^{-1})^2 \subset \ldots (N^{-1})^h \subset \ldots .$$

Deducem lanţul

$$(N^{-1}) \varepsilon \subset (N^{-1})^2 \varepsilon \subset \ldots (N^{-1})^h \varepsilon \subset \ldots \tag{6}$$

constituit, potrivit rezultatului de mai sus, din ideale drepte conţinătoare de ε.

In virtutea axiomei 1), există un întreg natural h astfel încât să avem, pentru orice alt întreg natural h',

$$(N^{-1})^{h+h'} \varepsilon = (N^{-1})^h \varepsilon,$$

deoarece lanţul (6) se rupe în finit. Insă ε este o unitate. Rămâne

$$(N^{-1})^{h+h'} = (N^{-1})^h.$$

Să facem aici $h' = h$. Obţinem

$$(N^{-1})^{2h} = (N^{-1})^h, \tag{7}$$

relaţie care arată că $(N^{-1})^h$ este inel din H înfăşurător al lui O,

$$(N^{-1})^h \supset O. \tag{7'}$$

Am văzut însă că $(N^{-1})^h$ este ideal drept al lui H, conţinător al lui ε.

Cu axioma 1) se poate arăta, întocmai ca în cazul clasic *), că orice ideal drept I, conţinător al unei unităţi $\varepsilon \to E$, este modul finit drept peste O. Putem deci scrie

$$\begin{aligned} &(N^{-1})^h \varepsilon = o_1 \eta_1 + o_2 \eta_2 + \dots o_m \eta_m \qquad (o_i \in O, \eta_i \to O), \\ &\therefore (N^{-1})^h = o_1 \eta_1 \varepsilon^{-1} + o_2 \eta_2 \varepsilon^{-1} + \dots o_m \eta_m \varepsilon^{-1} \qquad (o_i \in O, \eta_i \varepsilon^{-1} \to H). \end{aligned} \tag{7''}$$

Citim pe (7″) că $(N^{-1})^h$ este O-modul drept finit. Potrivit lui (7) este în acelaşi timp inel. In deifnitiv $(N^{-1})^h$ este un ordin relativ la O. Datorită lui (7′) şi axiomei 3) a maximalităţii intrinsece a ordinului O, conchidem că

$$(N^{-1})^h = O.$$

Insă

$$(N^{-1})^h \supset N^{-1} \supset O.$$

Deci

$$N^{-1} = O, \quad \therefore N^{-1} N = ON, \quad \therefore O = N,$$

eventualitate exclusă.

Ipoteza (4) este deci imposibilă. Rezultă indirect $P \supset N$, adică (N ideal nedivizibil)

$$P = N.$$

Cu aceasta totul este demonstrat.

Teoremă fundamentală $\boxed{1) + 2) + 3)}$. *In aritmeticile primitive orice ideal $A < O$ se descompune într'un produs comutativ de ideale prime, unic determinat până la ordinea factorilor.*

Demonstraţie. Să ne întoarcem la aritmeticile anterioare 1′) + 2′) + 3″). Să introducem axioma 3′) a implicaţiei « prim → nedivizibil » (orice ideal prim este nedivizibil). Am recunoscut în aliniatul 3° că axioma 3″) se verifică banal în virtutea lui 3′) luând $P_1 = O$. Cadrul devine 1′) + 2′) + 3′), conţinut în precedentul.

---

*) Intr'adevăr, pornind dela ε, construim un lanţ veritabil ascendent de ideale drepte de bază finită, conţinătoare ale lui ε,

$$(\varepsilon) < (\varepsilon, a_1) < (\varepsilon, a_1, a_2) < \dots (\varepsilon, a_1, a_2 \dots a_n) \subset \dots I, \text{ cu } a_h \to I.$$

Atâta vreme cât $(\varepsilon, a_1, a_2, \dots a_n) < I$, lanţul continuă indefinit, împotriva axiomei 1). Deci, obligatoriu $(\varepsilon, a_1, a_2, \dots a_n) = I$, pentru un anume indice n.

Axioma 1) a aritmeticilor primitive implică evident axioma mai slabă 1'). Axioma 3'), am demonstrat mai sus, este o teoremă a cadrului 1) + 2) + 3). Pe de altă parte, teorema din aliniatul 3° a implicației « nedivizibil — prim » împreună cu teorema de mai sus a implicației inverse arată că în cadrul 1) + 2) + 3) avem echivalență între «nedivizibil» și « prim ». Ca atare, propoziția 2') este verificată în acest cadru, deoarece coincide cu 2). In definitiv, cadrul 1) + 2) + 3) este conținut în 1') + 2') + 3') și, prin intermediul acestuia, în cadrul 1') + 2') + 3"):

Aritmeticile primitive intră așa dar printre aritmeticile anterioare.

Prin urmare, putem transfera asupra lor teorema fundamentală a acestora din urmă, ținând seama de echivalența, în cadrul 1) + 2) + 3), a noțiunilor « prim » și « nedivizibil » și modificând corespunzător limbajul. Obținem enunțul de mai sus.

Observație. Am arătat în Introducere că aritmeticile noastre primitive *(a fortiori* aritmeticile anterioare) conțin aritmeticile regulate ale lui Chevalley ca un caz special. Demonstrația teoremei fundamentale de mai sus este deci valabilă și pentru aritmeticile regulate.

Referințele lui Cl. Chevalley sunt foarte obscure. Pentru demonstrație el trimite la E. Artin al cărui text nu poate fi de niciun folos în conducerea demonstrației teoremei de existență (pe care E. Artin o întemeiază pe numărul finit al divizorilor) și nici în stabilirea implicației « prim → nedivizibil » sau, mai slab, a descompunerii unui ideal prim în produs de ideale nedivizibile (aliniatul 6°), fără de care nu vedem cum teorema de existență poate fi dedusă din teorema produsului de divizori primi, divizat.

Conciziunea lui Cl. Chevalley în acea schiță a aritmeticilor regulate merge foarte departe. Astfel, el definește idealul prim cu proprietatea caracteristică idealului nedivizibil. Nu pregetă să stabilească implicația «nedivizibil → prim », în definitiv la îndemână. In schimb nu aminteşte nimic de implicația « prim → nedivizibil » a cărei demonstrație, am văzut în acest aliniat, nu este de loc la îndemână. Ne întrebăm dacă nu cumva înțelege s'o postuleze tacit. Demonstrația noastră arată că nu este nevoie, că implicația « prim → nedivizibil » este o consecință a axiomelor.

§ 2. Aritmeticile închise

10°. *Definiția aritmeticilor închise. Cererea primordială.*

Originalitatea aritmeticilor necomutative stă în rolul pe care maximalitatea ordinului îl joacă aici. Ipoteza închiderii aritmetice este înlăturată, ca neadecuată.

Există totuși o zonă intermediară: aceea a înfășurărilor inelare ale unui inel O (nu numaidecât comutativ) în inelul său al căturilor față de un semigrup de nondivizori ai lui zero E, așezat în centrul lui O, unde putem construi un analogon necomutativ, foarte apropiat, al teoriei clasice a idealelor: cu închiderea aritmetică, în locul maximalității și cu inversarea teoremei fundamentale.

Cadrul teoriei lui E. Noether nu este acela al inelelor comutative oarecare, ci al domeniilor de integritate. Este natural ca teoria noastră să se desfășoare și ea sub protecția unei anumite cereri care să reglementeze distribuția divizorilor lui zero. O vom numi:

Cererea prealabilă, a semiintegrităţii α_0. *Dacă E este semigrupul caracteristic de nondivizori ai lui zero centrali, între ordinele (eventual transfinite) ale inelului O şi ale complementului topologic $(O - E)$, trebue să avem*

$$\text{Ord. } O > \text{Ord. } (O - E). \tag{1}$$

In cazul domeniilor de integritate cererea este satisfăcută dacă, aşa cum se şi întâmplă în teoria clasică a idealelor, luăm $E = (O - 0)$. Atunci $(O - E) = 0$ şi (1) este banal satisfăcută.

In cazul unui inel finit O cu element-unitate, cererea α_0 este de asemenea banal satisfăcută.

α_0 este o cerere destul de tare; ne putem incredinţa că inelele nenumărabile, de puterea continuului, care satisfac cererea α_0, sunt fără divizori ai lui zero.

Pentru aceea să demonstrăm următoarea

Teoremă. *Dacă λ este ordinul mulţimii divizorilor lui zero al unui inel O şi ω ordinul inelului, avem atunci*

$$\omega \leqslant \lambda^2.$$

Este vorba bineînţeles de inele în care mulţimea divizorilor lui zero nu este deşartă.

Demonstraţia este imediată. Fie $\mathfrak{d}$ mulţimea tuturor divizorilor lui zero şi $\theta \in \mathfrak{d}$. Transformarea $y = \theta x$ aplică pe O pe o parte $\mathfrak{d}'$ a lui $\mathfrak{d}$. Orice reprezentare (univocă) a lui O îl descompune în clase disjuncte, constituite din elementele care au aceeaşi imagine. In cazul de faţă, clasele au toate acelaşi ordin, acela al mulţimii T' a divizorilor lui zero (θ') asociaţi la dreapta lui θ,

$$\theta\,\theta' = 0.$$

Avem deci

$$\omega = \text{ord. } \mathfrak{d}' \times \text{ord. } T' \leqslant \lambda^2.$$

De aici următoarea

Consecinţă. *Intr'un inel nenumărabil mulţimea divizorilor lui zero este sau nenumărabilă sau vidă.*

Intr'adevăr, pătratul unui cardinal finit sau al lui alef-zero este tot finit sau egal cu alef-zero. Aşa dar, nu putem avea $\omega \leqslant \lambda^2$ pentru ω nenumărabil şi λ numărabil.

Să revenim acum la cererea α_0. Este clar că ordinul complementului $O - E$ este minim când semigrupul de nondivizori ai lui zero E (căruia îi lăsăm libertatea să fie necomutativ) coincide cu semigrupul total al nondivizorilor lui zero. In acest caz $(O - E)$ coincide cu mulţimea divizorilor lui zero din O, inclusiv zero.

Deci, dacă avem (1), avem *a fortiori*

$$\text{Ord. } O > 1 + \text{Ord. } \mathfrak{d} \geqslant \text{Ord. } \mathfrak{d}. \tag{2}$$

Am văzut însă mai sus că dacă O este nenumărabil iar $\mathfrak{d}$ nevidă, mulţimea $\mathfrak{d}$ rezultă nenumărabilă. Deci, dacă presupunem pe O de puterea continuului şi *admitem ipoteza lui Cantor*, atunci (2) este imposibilă. Prin urmare, mulţimea $\mathfrak{d}$ este vidă.

Această discuţie ne arată interesul pe care îl avem de a înlocui cererea prealabilă α_0 prin alta mai slabă, deşi mai puţin semnificativă: printr'una din consecinţele ei.

Consecinţa α'_0 (a lui α_0). *Inelul O admite un algoritm al lui Euclid mod E.*

Aceasta înseamnă că pentru $a \in O$, $\varepsilon \in E$, există un $b \to O$ şi un $\eta \to E$, astfel încât

$$a = b\varepsilon + \eta.$$

Demonstraţie. Cum ε este un nondivizor al lui zero, transformarea $y = x\varepsilon$ este biunivocă pe O. Deci $O\varepsilon$ are aceeaşi putere ca şi O. Pentru a fix dar altfel arbitrar, este clar că $a - O\varepsilon$ are aceeaşi putere ca $O\varepsilon$ şi deci ca O. Deci, în virtutea lui α_0, nu putem avea $a - O\varepsilon \subset (O - E)$. Există aşa dar un $b \to E$ astfel încât

$$a - b\varepsilon = \eta \qquad (\eta \to E).$$

Consecinţa α''_0 (a lui α'_0). *Dacă H este inelul câturilor lui O mod E, există atunci în grupul (E), generat în H de unităţile E, un sistem complet de reprezentanţi pentru modulul rezidual H/O.*

Demonstraţie. Fie $\frac{a}{\varepsilon} \in H$. Conform lui α'_0 avem $a = b\varepsilon + \eta$ $(\eta \to E)$. Deci

$\frac{a}{\varepsilon} = b + \frac{\eta}{\varepsilon}$, adică $\frac{a}{\varepsilon} \equiv \frac{\eta}{\varepsilon} \bmod O$.

In cele ce urmează *vom folosi cererea* prealabilă α_0 a *semiintegrităţii numai sub forma slabă* α''_0, deşi vom continua s'o arătăm prin α_0.

Să trecem acum la definiţia aritmeticilor închise.

Fie O un inel care admite un semigrup central E de nondivizori ai lui zero şi H inelul câturilor lui O mod E.

Spunem că avem în O o *aritmetică închisă* atunci când cererea prealabilă α_0 a semiintegrităţii este satisfăcută şi când următoarele trei axiome se verifică:

α_1. *Inchiderea aritmetică mod E.*

Aceasta înseamnă că orice element η al grupului (E) generat de E în H, ale cărui toate puteri pozitive rămân cuprinse în acelaşi modul finit de felul $O\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \to E$, aparţine lui O, adică dacă

$$\eta^i \to O\varepsilon^{-1}, \text{ unde } \eta \to (E),\ \varepsilon \to E. \qquad (i = 1, 2, \ldots),\quad \eta \to O.$$

α_2. *Limitarea maximală pentru ideale.*

α_3. *Implicaţia « prim → nedivizibil ».*

Notăm o primă

Consecinţă. *Infăşurarea $H \supset O$ este cu element-unitate.*

Intr'adevăr, inelul câturilor H admite elementul-unitate $1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$. Este clar că $1 \to (E)$. Pe de altă parte, avem $1^i = 1 = \varepsilon \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \to O\varepsilon^{-1}$. Deci, în virtutea lui α_1, urmează $1 \to O$.

Aici este locul să introducem o întărire a definiţiei semigrupului caracteristic E, care nu va interveni decât pentru obţinerea inversării teoremei fundamentale.

Semigrupul caracteristic E se numeşte complet *când oricare două elemente $\varepsilon', \varepsilon'' \to E$ ce se divid în O, se divid în E. adică*

$$\varepsilon' = \varepsilon'' \omega,\ \omega \to O,$$

$$\therefore \omega \to E.$$

Sau, ceea ce este tot una, semigrupul E se numeşte complet când $E = O \cap (E)$.

Există cel puţin un semigrup caracteristic complet: *este semigrupul format de* totalitatea *nondivizorilor centrali ai lui zero, din O.*

Demonstraţie. Fie ε', ε'' doi nondivizori centrali ai lui zero. Mulţimea lor E formează evident un semigrup, deoarece $\varepsilon'\varepsilon''o = \varepsilon' o\varepsilon'' = o\varepsilon'\varepsilon''$ pentru $o \in O$.

Semigrupul este complet. Într'adevăr, dacă $\varepsilon' = \varepsilon''\omega$ cu $\omega \to O$, avem în ω un nondivizor al lui zero, altfel ε' însuşi ar rezulta divizor al lui zero. Mai mult, ω este central, deoarece din $o\varepsilon' = \varepsilon' o$ rezultă pe rând, pentru $o \in O$

$$o\varepsilon''\omega = \varepsilon''\omega o,$$

$$\therefore \varepsilon''o\omega = \varepsilon''\omega o,$$

$$\therefore \quad o\omega = \omega o. \qquad (o \in O).$$

Deci nondivizorul lui zero central ω aparţine lui E,

$$\omega \to E.$$

Să notăm în treacăt că, pentru un semigrup complet E, cererea α_0'' este echivalentă cu α_0' (nu însă numaidecât cu α_0). Într'adevăr, trebue să arătăm, că α_0'' implică α_0'. In virtutea lui α_0', avem $\frac{a}{\varepsilon} = b + \frac{\eta'}{\varepsilon'}$ cu $a \in O$. Deci, $\frac{\eta'\varepsilon}{\varepsilon'} \to O$.

In virtutea completitudinii lui E, putem scrie $\frac{\eta'\varepsilon}{\varepsilon'} = \eta$, încât $\frac{a}{\varepsilon} = b + \frac{\eta}{\varepsilon}$,

$\therefore a = b\varepsilon + \eta$, unde $\eta \to E$.

Cererea prealabilă α_0 poate fi slăbită considerabil dacă întărim corespunzător axioma α_1 a închiderii aritmetice, teorema fundamentală continuând să rămână valabilă. Ea încetează însă de a mai fi inversabilă.

Notăm aici care sunt acele modificări.

Insemnăm cu Z centrul lui O.

Cererea prealabilă $\bar{\alpha}_0$

$$\text{Ord. } O > \text{Ord. } (O - Z) \qquad (3)$$

Se demonstrează că $\bar{\alpha}_0$ admite

Consecinţa $\bar{\alpha}'_0$. *Fiecare* $a \in O$ *pentru* $\varepsilon \in E$ *admite reprezentarea* $a = b\varepsilon + c$ *cu* $b \to O$, $c \to Z$.

Demonstraţia este aceeaşi ca pentru α_0'.

La rândul ei $\bar{\alpha}_0'$ duce la

Consecinţa $\bar{\alpha}_0''$. Modulul rezidual H/O admite un sistem complet de reprezentanţi centrali. Demonstraţia este analoagă cu cea a lui α_0''.

In cele ce urmează vom arăta prin $\bar{\alpha}_0$ chiar această formă slăbită $\bar{\alpha}_0'$ a ei.

Este important să observăm că *inelele comutative satisfac dela sine cererea prealabilă* $\bar{\alpha}_0$; într'adevăr $O - Z$ este mulţumea vidă şi deci (2) este banal satisfăcut.

Cu această cerere prealabilă $\bar{\alpha}_0$, axioma închiderii aritmetice trebue modificată corespunzător (axiomele α_2 şi α_3 rămân neatinse) $\bar{\alpha}_1$. *Inelul O este aritmetic închis mod Z în inelul H al câturilor faţă de E.* Aceasta înseamnă că orice

element x din centrul $\zeta(H)$ al lui H, ale cărui puteri pozitive x^i rămân toate într'un O-modul finit de forma $O\varepsilon^{-1}$ aparţine lui O adică

$$x^i \to O\varepsilon^{-1} \text{ unde } x \to \zeta(H),\ \varepsilon \to E,$$

$$(i = 1, 2, \ldots.),$$

$$\therefore\ x \to 0.$$

11°. *Regularitatea idealelor prime*

Spunem împreună cu E. Artin, că un *ideal* prim P este *regulat* când imagina sa dreaptă, respectiv stângă, înfăşură veritabil inelul O, aşa dar când $\overline{P} > O$, respectiv $\widetilde{P} > O$.

Teoremă $\boxed{\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Orice ideal prim P este regulat.*

Ceva mai mult, imaginea $\overline{P}$, respectiv $\widetilde{P}$, conţine cel puţin un element, nesituat în O, din grupul (E) generat de E în H,

$$\overline{P} > O,\quad (\overline{P} - O) \cap (E) = \text{nevidă},\quad \widetilde{P} > O,\quad (\widetilde{P} - 0) \cap (E) = \text{nevidă}.$$

Demonstraţie. Ideea fundamentală a demonstraţiei este împrumutată teoriei clasice a idealelor. Necomutativitatea şi partea doua a enunţului introduc însă schimbări importante.

Fie ε un element caracteristic conţinut în P. Avem în $O\varepsilon = (\varepsilon)$ un ideal bilateral, conţinător al unui $\varepsilon \to E$, aşa dar un ideal. Deoarece

$$(\varepsilon) \subset P < O,$$

putem aplica aici teorema din aliniatul 4 a produsului de divizori primi, divizat. Obţinem

$$P \supset (\varepsilon) \supset P_1 P_2 \ldots P_r, \tag{1}$$

unde ultimul membru este un produs de divizori primi ai lui (ε) divizat de (ε).

Putem întotdeauna presupune produsul $P_1 P_2 \ldots P_r$ de dimensiune r minimă printre produsele la fel definite.

Cum P este prim, din (1), pentru un anume indice h, urmează

$$P \supset P_h.$$

Dar, conform axiomei α_3, idealul P_h este nedivizibil, încât

$$P = P_h.$$

Să punem în evidenţă prezenţa lui P printre factorii din (1), adică

$$P \supset (\varepsilon) \supset P_1 \ldots P_{h-1} P\, P_{h+1} \ldots . P_r. \tag{2}$$

Cazul I: $r = 1$. Infăşurările (2) devin

$$P \supset (\varepsilon) \supset P,$$

$$\therefore\quad P = (\varepsilon),$$

$$\therefore\quad \varepsilon^{-1} P = O,$$

$$\therefore\quad \varepsilon^{-1} \to \overline{P}. \tag{3}$$

Insă ε^{-1} nu aparţine lui O, altfel am avea

$$1 = \varepsilon^{-1}\varepsilon \to P,$$

$$\therefore \quad P = O,$$

ceea ce este exclus. Dar $\overline{P} \supset O$. Rezultă

$$\varepsilon^{-1} \to (\overline{P} - O), \qquad (\varepsilon^{-1} \to (E)).$$

In definitiv este probat, că

$$\overline{P} > O, \qquad (\overline{P} - O) \cap (E) = \text{nevidă}.$$

Cazul II: $n > 1$. Facem convenţia, ca produsele parţiale din (2)

$$P_1 \ldots P_{h-1}, \quad \text{respectiv } P_{h+1} \ldots P_r,$$

să fie luate egale cu O pentru $h = 1$, respectiv $h = r$. Cum O are element-unitate iar idealele sunt ideale bilaterale, este clar că (2) se menţine cu această convenţie.

Dimensiunea r fiind minimă, urmează că

$$(\varepsilon) \not\supset P_1 \ldots P_{h-1} P_h \ldots P_r.$$

Există aşa dar cel puţin două elemente p', p'' cu

$$p' \to P_1 \ldots P_{h-1}, \; p'' \to P_{h+1} \ldots P_r, \tag{4}$$

$$p'\,p'' \not\to (\varepsilon). \tag{5}$$

Din (5) obţinem

$$p' \frac{p''}{\varepsilon} \not\to O \tag{6}$$

iar din (2) şi (4)

$$p' P p'' \subset (\varepsilon),$$

$$\therefore p' P \frac{p''}{\varepsilon} \subset O. \tag{7}$$

In virtutea cererii prealabile α_0, există în (E) un element, η'' astfel încât

$$\frac{p''}{\varepsilon} \equiv \eta'' \bmod O, \qquad (\eta'' \to (E)). \tag{8}$$

Din (6), (8) de o parte şi din (7), (8) de alta, conchidem că

$$p'\,\eta'' \not\to O, \qquad p' P \eta'' \subset O.$$

Dar elementele din E, deci din (E), sunt permutabile cu orice element din O. Ca atare, ultimele relaţii se scriu

$$p'\,\eta'' \not\to O, \qquad p'\eta'' P \subset O.$$

Aceasta înseamnă că

$$p'\eta'' \not\to O, \qquad p'\eta'' \to \overline{P}. \tag{9}$$

Dar $\overline{P} \supset O$. Aplicând încă odată în (9) axioma prealabilă, conchidem la existenţa în (E) a unui element

$$\eta \equiv p' \eta'' \bmod O, \qquad (\eta \to (E))$$

cu

$$\eta \to O, \qquad \eta \to \overline{P}.$$

Urmează

$$\overline{P} > 0, \qquad (\overline{P} - O) \cap (E) = \text{nevidă}$$

Teorema este demonstrată pentru imagina dreaptă.

Cum E este format din elemente centrale, raţionamentele de mai sus sunt valabile şi dual, pentru permutarea înmulţirilor stângi cu înmulţirile drepte.

Avem deci încă

$$\widetilde{P} > O, \qquad (\widetilde{P} - O) \cap (E) = \text{nevidă}.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Teoremă. $\boxed{\bar{\alpha}_0 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Orice ideal prim P este regulat, adică*

$$\overline{P} > O, \qquad \widetilde{P} > O.$$

Mai mult chiar avem

$$(\overline{P} - O) \cap \zeta(H) = \text{nevidă}, \qquad (\widetilde{P} - O) \cap \zeta(H) = \text{nevidă},$$

unde $\zeta(H)$ este centrul lui H.

Demonstraţie. Raţionamentul constă din preluarea cuvânt cu cuvânt a demonstraţiei precedente, înlocuind însă pe α_0 prin $\bar{\alpha}_0$ şi pe (E) prin $\zeta(H)$

12°. *Teorema modulului invers pentru idealele prime.*

Teoremă. $\boxed{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Orice ideal prim P admite un modul invers*

$$P^{-1} P = P P^{-1} = O, \qquad (\overline{P} = \widetilde{P} = P^{-1}).$$

Demonstraţie. Din $\overline{P} \supset O$, ţinând seama că O are element-unitate şi deci $OP = P$, obţinem

$$\overline{P}\, P \supset P. \tag{1}$$

Dar produsul de O-modulele bilaterale $\overline{P}\, P$ este chiar ideal bilateral deoarece, prin definiţie, $\overline{P}P \subset O$. Pe de altă parte, $\varepsilon \to P \subset \overline{P}P$, unde ε este un element caracteristic al lui P.

In definitiv, $\overline{P}P$ este ideal. Conform axiomei α_3, idealul prim P este nedivizibil. Deci din (1) rezultă sau

$$\overline{P}P = P \tag{2}$$

sau

$$\overline{P}P = O. \tag{3}$$

Prima eventualitate cade. Intr'adevăr, din (2) deducem, pentru orice întreg natural h,

$$\overline{P}^h P = P. \tag{4}$$

Conform primei teoreme din aliniatul 11, există în $\overline{P}$ un element $\eta \to (E)$ astfel încât

$$\eta \to \overline{P}, \qquad \eta \not\to 0, \qquad \eta \to (E). \tag{5}$$

Dacă ε este un element caracteristic al lui $\overline{P}$, obţinem din (4)

$$\eta^h \varepsilon \to P \subset O,$$

$$\therefore \quad \eta^h \to O\varepsilon^{-1}, \qquad (\eta \to (E), \varepsilon \to E),$$

pentru toţi întregii naturali h. Aplicând axioma α_1 a închiderii aritmetice mod E, conchidem că

$$\eta \to O,$$

împotriva celei de a doua din relaţiile (5).

Rămâne deci a doua eventualitate (3),

$$\overline{P}P = O.$$

Dual obţinem

$$P\widetilde{P} = O.$$

Conchidem de aici, în modul cunoscut, la

$$P^{-1}P = PP^{-1} = O \qquad (\overline{P} = \widetilde{P} = P^{-1}).$$

Cu aceasta totul este demonstrat.

Teoremă. $\boxed{\overline{\alpha}_0+\overline{\alpha}_1+\alpha_2+\alpha_3}$ *Orice ideal prim P admite un modul invers*

$$P^{-1}P = PP^{-1} = O \qquad (\overline{P} = \widetilde{P} = P^{-1}).$$

Demonstraţie. Raţionamentul constă din preluarea cuvânt cu cuvânt a demonstraţiei precedente, cu singurele înlocuiri: prima teoremă din aliniatul 11, a doua teoremă din aliniatul 11°; grupul (E), centrul $\zeta(H)$; cererea prealabilă α_0, cererea prealabilă $\overline{\alpha}_0$; axioma α_1 axioma $\overline{\alpha}_1$; închiderea aritmetică mod E, închiderea aritmetică mod Z.

13°. *Teorema fundamentală a aritmeticilor închise*

Din aliniatul precedent se vede că, atât în cadrul $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, cât şi în cadrul $\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, este realizată axioma 2') a aritmeticilor anterioare (aliniatul 3°). Pe de altă parte, $\alpha_2 = 1')$, $\alpha_3 = 3')$,

Deci, fiecare din cadrele precedente este conţinut în cadrul $1') + 2') + 3')$ al aritmeticilor anterioare, cazul special. Teorema fundamentală din aliniatul 8° a acestora, pronunţată pentru cadrul mai echivalent $1') + 2') + 3'')$, ne dă aici această

Teoremă $\boxed{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, respectiv $\boxed{\overline{\alpha}_0+\overline{\alpha}_1+\alpha_2+\alpha_3}$. *Orice ideal $A < O$ este produs comutativ de ideale prime, unic determinat până la ordinea factorilor.*

Observaţie. Am văzut în aliniatul 10° că $\overline{\alpha}_0$ este banal verificată pentru $O =$ comutativ. Este clar că al doilea cadru ne dă (luând pe E egal cu semigrupul tuturor nondivizorilor lui zero) demonstraţia, prin specializare,

a unui rezultat, enunţat numai de Van der Waerden [9] *). Dacă α_0 se verifică, aşa dar dacă mulţimea divizorilor lui zero are o putere mai mică decât inelul O, cercetarea noastră arată că $\bar{\alpha}_1$ poate fi slăbită până la α_1.

14°. *Inversarea teoremei fundamentale pentru aritmeticile închise. Teorema de echivalare*

Ne propunem să arătăm că teorema fundamentală din aliniatul 13° pentru cadrul $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ se poate inversa.

Pentru formularea acestei inversări avem nevoie să stabilim următoarea consecinţă a teoremei fundamentale:

Teoremă $\boxed{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, respectiv $\boxed{\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1+\alpha_2+\alpha_3}$. *Divizibilitatea aditivă implică pe cea multiplicativă.*

Demonstraţie. Într'adevăr, fie idealele B, C $(C<O)$ în diviziune aditivă,

$$C \supset B. \tag{1}$$

Conform teoremei fundamentale din aliniatul 13, fiecare din aceste ideale se poate descompune în produs comutativ de ideale prime, unic determinat până la ordinea factorilor.

Potrivit proprietăţii de definiţie a idealelor prime, fiecare din factorii de descompunere ai lui C divide aditiv câte un factor din descompunerea lui B. Potrivit axiomei α_3, fiecare factor al lui C este identic deci cu câte un factor al lui B.

Pentru a preciza, să presupunem că factorul prim arbitrar P al lui C apare în descompunerea lui C la puterea maximă P^n iar în descompunerea lui B la puterea maximă P^m.

Nu putem avea $m < n$. Într'adevăr, însemnând cu P^{-1} modulul inversal lui P (aliniatul 12°) şi ţinând seama de comutativitatea descompunerilor, ar urma ca atât $P^{-m}\,C$ cât şi $P^{-m}\,B$ să fie ideale întregi. Din (1) ar rezulta atunci între aceste ideale

$$P^{-m}\,C \supset P^{-m}\,B. \tag{2}$$

Cum $n>m$, primul membru al lui (2) se divide mai departe cu P. Există deci printre factorii lui B un ideal prim Q astfel încât $P \supset Q$ şi deci (axioma α_3) $P = Q$. Ar urma (descompunerile fiind unice), ca puterea maximă a lui P cu care se divide B să fie mai mare decât m, ceea ce am exclus.

Rămâne stabilit, indirect, că $m \geqslant n$, pentru fiecare factor prim al descompunerii lui C. Deci B rezultă de forma

$$B = CD, \tag{1'}$$

unde D este un alt ideal. Relaţiile (1) şi (1') demonstrează teorema.

Inversarea teoremei fundamentale $\boxed{\alpha_0}$.

Fie O un inel şi E un semigrup caracteristic complet de nondivizori ai lui zero centrali. În cadrul α_0, inelul O şi inelul său H al căturilor mod E verifică

*) ed. I-a, p. 100.

obligatoriu axiomele

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

dacă admite teorema fundamentală şi dacă divizibilitatea aditivă implică pe cea multiplicativă.

Demonstraţie. Intreprindem verificarea pe rând a axiomelor în ordinea $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

Verificarea axiomei α_3. Fie P un ideal prim arbitrar. Presupunem, prin absurd, că ar fi divizibil, adică

$$O > I > P. \tag{3}$$

Dar diviziunea aditivă implică diviziunea multiplicativă. Aşa dar,

$$P = IJ, \tag{4}$$

unde $J < O$, altfel din (4) ar urma $P = I$, contrar lui (3).

Idealele $I < O$, $J < O$ admit descompuneri în factori primi care, introduse în (3), dau pentru membrul al doilea o descompunere în cel puţin doi factori primi (unul introdus de I, celălalt de J). Dar primul membru reprezintă o descompunere redusă la un singur factor.

Cum aritmeticile din enunţ au teoremă fundamentală, concluzia este imposibilă.

Rămâne dovedit indirect că P este nedivizibil.

Verificarea axiomei α_2. Să presupunem, prin absurd, că ar exista lanţuri veritabil ascendente, de ideale, indefinite

$$I < I_1 < I_2 < \ldots I_k < \ldots \tag{5}$$

Divizibilitatea aditivă implică pe cea multiplicativă. Aşa dar,

$$I = I_1 J_1, \quad I_1 = I_2 J_2, \ldots I_{k-1} = I_k J_k, \ldots \tag{6}$$

unde

$$J_k < O, \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

altfel am avea $I_{k-1} = I_k$, contrar înfăşurărilor tari (5).

Din (6) rezultă

$$I = I_k J_k J_{k-1} \ldots J_1. \tag{8}$$

Citim pe (7) că fiecare J_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ admite o descompunere în factori primi de dimensiune cel puţin egală cu 1. Deci produsul de factori J_i din (8) introduce o descompunere de dimensiune cel puţin egală cu k. Factorul I_k sporeşte sau nu acest număr, după cum este mai mic sau egal cu O.

Deci în (8) membrul al doilea admite o descompunere în factori primi de dimensiune mai mare sau egală cu orice întreg natural arbitrar dat k. Insă I are, potrivit teoremei fundamentale din aliniatul 13°, o descompunere într'un număr fix h de factori primi, iar în virtutea teoremei fundamentale, dimensiunile descompunerilor celor doi membri din (8) trebue să fie egale.

Ajungem deci la o contrazicere.

Este deci dovedit, indirect, că toate lanţurile veritabil ascendente (5) de ideale se rup în finit.

Observaţie. Verificarea axiomelor α_3 şi α_2 a cerut, înafară de implicaţia divizibilităţii aditive în cea multiplicativă, numai o parte din teorema fundamentală: existenţa descompunerilor şi unicitatea dimensiunii.

Verificarea axiomei α_1. Demonstraţia de mai jos este adaptată după cea clasică (unde O este domeniu de integritate cu element-unitate iar $E = (O - o)$) cazului general de aici.

Fie $\eta \to (E)$ astfel încât toate puterile întregi η^h să fie cuprinse într'un modul finit de forma $O\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \to E$, adică

$$\eta^h \to O\varepsilon^{-1}, \qquad (\varepsilon \to E). \tag{9}$$

Punem

$$\eta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \qquad (\varepsilon'\varepsilon'' \to E). \tag{10}$$

Din (9) rezultă

$$\eta^h = \frac{\omega_h}{\varepsilon}, \qquad (\omega_h \to O). \tag{11}$$

In particular, pentru $h = 1$, avem

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon\,\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

Cum *semigrupul E este complet*, adică

$$E = O \cap (E),$$

urmează că

$$\omega_1 = \varepsilon_1, \qquad (\varepsilon_1 \to E). \tag{12}$$

Considerăm lanţul de O-module, indicate prin bazele care le generează

$$(\eta) \subset (\eta, \eta^2) \subset \ldots (\eta, \eta^2, \ldots \eta^h) \subset \ldots \tag{13}$$

Aceste O-module sunt bilaterale, deoarece η şi puterile sale sunt permutabile cu fiecare din elementele lui O (semigrupul E, central !).

In virtutea lui (11), lanţul (13) se scrie

$$(\omega_1)\,\varepsilon^{-1} \subset (\omega_1, \omega_2)\,\varepsilon^{-1} \subset \ldots (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h)\,\varepsilon^{-1} \subset \ldots, \tag{13'}$$

unde parantezele reprezintă O-module generate de elementele indicate.

Este clar că lanţul (13') progresează sau se rupe în finit odată cu lanţul

$$(\omega_1) \subset (\omega_1, \omega_2) \subset \ldots (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_h) \subset \ldots, \tag{14}$$

deoarece ε^{-1} este o unitate din H.

Insă O-modulele (bilaterale) din (14) sunt generate, conform lui (11), de elemente din O. Ca atare, sunt ideale bilaterale ce conţin pe $\omega_1 = \varepsilon_1$ din (12), aşa dar sunt ideale.

Conform axiomei α_2, deja verificată, lanţul (14), deci lanţul (13), se rupe în finit.

Există deci un întreg h pentru care

$$\eta^{h+1} \to (\eta, \eta^2, \ldots \eta^h),$$

adică

$$\eta^{h+1} = o_{h-1}\eta^h + o_{h-2}\eta^{h-1} + \ldots o_0\eta \qquad (o_i \to O).$$

sau (η, nondivizor al lui zero)

$$\eta^h = o_{h-1}\eta^{h-1} + o_{h-2}\eta^{h-2} + \ldots o_1\eta + o_0 \qquad (o_i \to O). \tag{15}$$

Considerăm O-modulul generat de baza $\eta^{h-1}, \ldots \eta, 1$

$$\Xi = (\eta^{h-1}, \ldots \eta, 1). \tag{16}$$

Cum elementele bazei sunt permutabile cu orice element din O, se vede uşor că avem

$$\Xi^2 = (\eta^{2(h-1)}, \ldots \eta, 1). \tag{17}$$

Ţinând seama de (15), rezultă

$$\Xi^2 \subset (\eta^{h-1}, \ldots \eta, 1). \tag{17'}$$

Dar, evident,

$$(\eta^{2(h-1)}, \ldots \eta^{h-1}, \ldots \eta, 1) \supset (\eta^{h-1}, \ldots \eta, 1)$$

adică, potrivit lui (17),

$$\Xi^2 \supset (\eta^{h-1}, \ldots \eta, 1). \tag{17''}$$

Din (16), (17') şi (17'') conchidem că

$$\Xi^2 = \Xi. \tag{18}$$

Dar din (16), având în vedere (11), rezultă

$$\Xi(\varepsilon^{h-1}) = (\omega^{h-1}, \omega^{h-2}\varepsilon, \ldots \omega\varepsilon^{h-2}, \varepsilon^{h-1}), \tag{19}$$

unde am pus $\omega_1 = \omega$ şi unde (ε^{h-1}) înseamnă idealul principal generat de ε^{h-1}.

Este clar că O-modulul bilateral (ω în centru!)

$$T = (\omega^{h-1}, \omega^{h-2}\varepsilon, \ldots \omega\varepsilon^{h-2}, \varepsilon^{h-1}) \tag{20}$$

este un ideal bilateral, deoarece elementele generatoare sunt în O, şi chiar un ideal, întrucât conţine pe $\varepsilon^{h-1} \to E$.

Relaţia (19) devine

$$\Xi(\varepsilon^{h-1}) = T. \tag{21}$$

Se vede însă uşor (*chiar nefolosind ipoteza teoremei fundamentale* *), ci numai faptul că ε este central iar O are element-unitate) că idealul (ε^{h-1}) este permutabil cu O-modulul Ξ.

Din (21) urmează deci

$$(\varepsilon^{h-1})^2 \Xi^2 = T^2$$

sau, folosind (18),

$$(\varepsilon^{h-1})^2 \Xi = T^2$$

sau încă, folosind (21),

$$(\varepsilon^{h-1})\, T = T^2.$$

*) Anume, afirmaţia, că factorii în descompuneri sunt comutativi.

In baza teoremei fundamentale, idealul (ε^{h-1}) trebue să introducă în (22) aceiaşi factori primi de descompunere ca şi T, cu alte cuvinte *)

$$(\varepsilon^{h-1}) = T$$

$$\therefore \quad O = \frac{1}{\varepsilon^{h-1}} T = \frac{1}{\varepsilon^{h-1}} (\omega^{h-1}, \omega^{h-2}\varepsilon, \ldots \omega\varepsilon^{h-2}, \varepsilon^{h-1})$$

$$\therefore \qquad O = (\eta^{h-1}, \eta^{h-2}, \ldots \eta, 1).$$

Este deci dovedit că

$$\eta \to O.$$

Prin urmare, în aritmeticile considerate avem închidere aritmetică mod E. Cu aceasta demonstrarea teoremei inverse este terminată.

Ţinând seama acum de teorema fundamentală a aritmeticilor închise, de verificarea identică a implicaţiei divizibilităţii aditive în cea multiplicativă, cât şi de completitudinea semigrupului E cu ajutorul căreia a fost inversată teorema fundamentală, putem enunţa această

Teoremă de echivalare $\boxed{\alpha_0}$. Considerăm cadrul înfăşurărilor inelare $H \supset O$ ale unui inel O cu element-unitate, în corpul căturilor faţă de un semigrup central, complet, de nondivizori ai lui zero E şi satisfăcând cererea prealabilă α_0.

In acest cadru, aritmeticile cu teoremă fundamentală pentru descompunerile în ideale prime şi cu implicaţia divizibilităţii aditive în cea multiplicativă, de o parte, şi aritmeticile care satisfac axiomele

α_1. *Inchiderea aritmetică mod E,*

α_2. *Limitarea maximală pentru ideale,*

α_3. *Implicaţia «prim → nedivizibil»,*

de alta, se acoperă.

Avem astfel, purtată la un mare grad de generalitate, o teorie exhaustivă a idealelor de tip Noether, construită cu închiderea aritmetică, nu cu maximalitatea ordinului.

Observaţie. Reexaminarea demonstraţiei arată că, pentru inversare, nu este nevoie să cerem *a priori* comutativitatea produsului de ideale din descompunere. Unicitatea se poate formula necomutativ şi slab, cerând egalitatea dimensiunilor produselor comparate şi, în plus, scurtarea (la dreapta). De asemenea, divizibilitatea multiplicativă a lui $B \subset A$ poate fi cerută numai la stânga, $B = AC$ sau numai la dreapta, $B = CA$.

Observaţie importantă. Prin inversarea de mai sus, teoria exhaustivă a lui E. Noether se extinde la toate inelele O comutative cu element-unitate **), care sunt supuse cererii α_0.

§ 3. Aritmeticile complete

15°. *Definiţia aritmeticilor complete*

Aritmeticile închise din § 2 sunt inversabile dar împrumută destul de multe trăsături ale aritmeticilor domeniilor de integritate (existenţa unui inel al

*) Dacă nu folosim comutativitatea factorilor din teorema fundamentală trebue să postulăm scurtarea (la dreapta).

**) Unde E reprezintă semigrupul tuturor nondivizorilor lui zero din O. Am văzut în aliniatul 10° că un astfel de semigrup este complet.

câturilor mod E, cererea prealabilă α_0, care este, în definitiv, o cerere de semiintegritate).

Aritmeticile primitive sunt aritmetici pronunţat necomutative (semigrupul caracteristic E nu satisface nicio cerere de permutabilitate). Ele sunt însă neinversabile şi apoi au trecută între axiome cererea modulului invers, o împrejurare care curmă cu tradiţia lui Dedekind şi creează o anumită tautologie.

In acest paragraf introducem o subspecie a aritmeticilor primitive care construeşte, şi nu postulează, existenţa modulului invers şi care, cum vom vedea în § 5, permite inversarea teoremei fundamentale: *aritmeticile complete*. Ele constitue generalizarea naturală a aritmeticilor numerelor hipercomplexe ale lui Speiser, Brandt şi Artin, s'ar putea spune generalizarea formală, dacă nu am preveni această critică prin construcţiile de ipoteze din § 4, pe care le judecăm foarte importante.

Demonstraţiile reproduc în linii mari demonstraţiile lui E. Artin, cu unele abateri însă. Apoi, în cadrul nostru mai rarefiat, am căutat să punem mai mult ordine faţă de acela al lui E. Artin, unde desfăşurarea momentelor demonstraţiei se face cu o oarecare lipsă de perspectivă.

In sistematizarea noastră am urmărit să reperăm totul la axiome şi să arătăm în ce anume moment implicaţia «prim → nedivizibil» intervine hotărîtor. Lucrarea noastră serveşte de introducere unei teorii necomutative a idealelor quasi-egale şi această muncă preparatoare era necesară.

Aritmeticile complete sunt construite cu maximalitatea intrinsecă (la E. Artin, cu maximalitatea extrinsecă) a ordinului. Cum vom vedea în § 5, înlocuirea închiderii aritmetice cu maximalitatea are cea mai mare importanţă pentru inversarea teoremei fundamentale. Cu totul nou faţă de E. Artin este aliniatul în care arătăm că teorema fundamentală directă se poate constitui şi aici cu închiderea aritmetică.

Definiţie. Fie $H \supset O$ o înfăşurare inelară cu element-unitate iar E un semigrup de unităţi ale lui H, situate în O şi subpermutabile global cu O

$$O\varepsilon \subset \varepsilon O \qquad (\varepsilon \in E).$$

Acest semigrup este luat ca semigrup caracteristic.

Definiţie Zicem că *H induce în O o aritmetică completă, când următoarele axiome sunt satisfăcute*:

1. *Limitarea maximală* *) *pentru idealele drepte conţinătoare de* $\varepsilon \to E$.
2. *Implicaţia «prim → nedivizibil»*.
3. *Maximalitatea intrinsecă a ordinului O în H.*

16°. *Existenţa modulului invers la dreapta pentru idealele nedivizibile regulate.*

In acest aliniat, axioma 1 este folosită sub forma slabă din notă, dar $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ e înlocuit cu $O\varepsilon = \varepsilon O$.

Definiţie. *Un ideal N a cărui imagine dreaptă $\bar{N}$ înfăşură tare $\bar{N} > O$ inelul O* se numeşte *regulat.*

---

*) O formă mai slabă, suficientă în tot acest paragraf, este următoarea: Idealele din O au bază finită la dreapta peste O.

Teoremă $\boxed{1+3}$. *Un ideal nedivizibil regulat N admite ca modul invers la dreapta imagina sa dreaptă*

$$\overline{N}N = O.$$

Demonstrație. Fie ε o unitate caracteristică a lui N. Conform alineatului 2°, avem în $\overline{N}\varepsilon$ un O-modul drept. Dar $\overline{N}\varepsilon O = \overline{N}O\varepsilon \subset \overline{N}\varepsilon$, deci $\overline{N}\varepsilon$ este, în același timp, O-modul stâng. Insă $\varepsilon \to N$, așa dar

$$\overline{N}\varepsilon \subset O,$$

deci $\overline{N}\varepsilon$ este ideal bilateral. Dar $\overline{N} \supset O$ conține elementul-unitate. Ca atare $\varepsilon \to \overline{N}\varepsilon$, deci $\overline{N}\varepsilon$ este ideal.

Conform axiomei 1, idealul $\overline{N}\varepsilon$ are bază finită *) la dreapta peste O, adică

$$\overline{N}\varepsilon = o_1\nu_1 + o_2\nu_2 + \ldots o_k\nu_k \qquad (o_i \in O,\ \nu_i \to O),$$

$$\therefore \overline{N} = o_1\nu_1\varepsilon^{-1} + o_2\nu_2\varepsilon^{-1} + \ldots o_k\nu_k\varepsilon^{-1} \qquad (o_i \in O,\ \nu_i\varepsilon^{-1} \to H)$$

astfel încât $\overline{N}$ apare O-modul finit drept.

Din

$$\overline{N} \supset O$$

conchidem că (O, cu element unitate iar N, ideal bilateral)

$$\overline{N}N \supset N. \tag{1}$$

Pe de altă parte, prin definiție,

$$\overline{N}N \subset O. \tag{2}$$

Citim pe (1) și (2) că produsul de O-module bilaterale $\overline{N}N$ este ideal bilateral și chiar ideal, întrucât $\varepsilon \to N \subset \overline{N}N$.

Insă N este ideal nedivizibil. Prin urmare, din (1), sau

$$\overline{N}N = N \tag{3}$$

sau

$$\overline{N}N = O. \tag{4}$$

Eventualitatea (3) cade. Intr'adevăr, urmează

$$\overline{N}^2N = N \subset O,$$

așa dar

$$\overline{N}^2 \subset \overline{N}.$$

Deci $\overline{N}$ este un O-modul finit drept peste O, cu $\overline{N} \supset O$, în același timp inel. Conform axiomei 3, a maximalității intrinsece a lui O, conchidem

$$\overline{N} = O,$$

împotriva regularității presupuse a lui $\overline{N}$.

*) Repetând demonstrația teoremei bazei, dar pornind dela un ideal principal drept generat de un ε, se arată în modul cunoscut, că idealele drepte conținătoare de ε au bază finită, în axioma 1.

Rămâne eventualitatea (4). Cu aceasta totul este demonstrat.

Observație. Dacă folosim axioma 1 întreagă și nu forma slabă din notă, semigrupul E poate fi orice semigrup de unități ale lui H conținute în O. Este deajuns să știm că $\overline{N}\varepsilon$ este ideal drept conținător de unități $\varepsilon \to E$.

17°. *Existența modulului invers pentru idealele nedivizibile regulate.*

Axioma 1 este folosită tot în sensul mai larg din aliniatul 16°, nota din josul paginii.

Teoremă $\boxed{1+3}$. *Orice ideal nedivizibil regulat N are modulul invers*

$$\overline{N}N = N\widetilde{N} = O, \qquad cu\ \overline{N} = \widetilde{N} = N^{-1}.$$

Demonstrație. Am arătat în aliniatul 16° că $\overline{N}\varepsilon$ este ideal bilateral. Avem deci în $N\overline{N}\varepsilon$ un ideal bilateral. Ca atare (axioma 1, forma slabă),

$$N\overline{N}\varepsilon = o_1\nu_1 + o_2\nu_2 + \ldots o_h\nu_h \qquad (o_i \in O,\ \nu_i \to O)$$

$$\therefore\ N\overline{N} = o_1\nu_1\varepsilon^{-1} + o_2\nu_2\varepsilon^{-1} + \ldots o_h\nu_h\varepsilon^{-1} \qquad (o_i \in O,\ \nu_i\varepsilon^{-1} \to H).$$

Deci $N\overline{N}$ este un O-modul (bilateral) cu bază finită la dreapta. Reuniunea $N\overline{N} \cup O$, adică

$$O \cup N\overline{N} = o_0 1 + o_1\nu_1\varepsilon^{-1} + \ldots o_h\nu_h\varepsilon^{-1} \qquad (o_i \in O)$$

este încă un O-modul finit drept.

Avem succesiv, ținând seama de teorema din aliniatul 16°,

$$(O \cup N\overline{N})^2 = O^2 \cup ON\overline{N} \cup N\overline{N}O \cup N\overline{N}N\overline{N} =$$

$$= O^2 \cup ON\overline{N} \cup N\overline{N}O \cup NO\overline{N} \subset$$

$$\subset O^2 \cup N\overline{N} \cup N\overline{N} \cup N\overline{N} = O \cup N\overline{N}$$

Așa dar, avem în $O \cup N\overline{N}$ un O-modul finit drept, înfășurător al lui O, în același timp inel. Insă O este, conform axiomei 3, ordin maximal intrinsec. Conchidem că

$$O \cup N\overline{N} = O,$$

$$\therefore\ N\overline{N} \subset O,$$

$$\therefore\ \overline{N} \subset \widetilde{N}.$$

Așa dar, cum $\overline{N} > O$, rezultă

$$\widetilde{N} > O, \tag{1}$$

Prin urmare, regularitatea lui N este un concept dualizabil în parte (nu putem vorbi de dualitate perfectă deoarece axioma 1, respectiv 3, nu este autoduală).

Se arată ca în aliniatul 16°, însă cu unele modificări ale demonstrației, că $\overline{N}$ este modul invers la stânga al lui N. Iată cum.

Pornim dela $\widetilde{N} \supset O$ şi obţinem $N\widetilde{N} \supset N$. Aici $N\widetilde{N}$ este O-modul bilateral, ca produs de O-module bilaterale. Este ideal bilateral, deoarece $N\widetilde{N} \subset O$. Este ideal, deoarece $\widetilde{N} \supset O$ conţine elementul-unitate şi ca atare $\varepsilon \to N \subset N\widetilde{N}$.

Dar N este nedivizibil. Aşa dar, sau

$$N\widetilde{N} = N \tag{2}$$

$$N\widetilde{N} = O. \tag{3}$$

Din (2) rezultă $N\widetilde{N}^2 = N \subset O$ adică $\widetilde{N}^2 \subset \widetilde{N}$. Prin urmare, $\widetilde{N}$ este inel. Pe de altă parte, pentru $\varepsilon \to N$, avem în virtutea subpermutabilităţii lui E

$$O\,\varepsilon\widetilde{N} \subset \varepsilon O\widetilde{N} \subset \varepsilon\widetilde{N},$$

deci $\varepsilon\widetilde{N}$ este O modul drept. Evident, este şi O-modul stâng,. Deci $\varepsilon\widetilde{N}$ rezultă O-modul bilateral. Cum $\varepsilon \to N$, urmează că $\varepsilon\widetilde{N} \subset O$ şi $\varepsilon \to \varepsilon\widetilde{N}$, deoarece $\widetilde{N} \supset O$ conţine elementul-unitate. In definitiv, $\varepsilon\widetilde{N}$ este ideal.

Aplicând atunci axioma 1 (forma slabă) putem scrie

$$\varepsilon\widetilde{N} = o_1\nu_1 + o_2\nu_2 + \ldots o_k\nu_k \qquad (o_i \in O,\ \nu_i \to O).$$

De aici, ţinând seamă, că $\varepsilon O \supset o\,\varepsilon$ implică $O\varepsilon^{-1} \supset \varepsilon^{-1}O$, obţinem pe rând

$$\widetilde{N} = \varepsilon^{-1}o_1\nu_1 + \varepsilon^{-1}o_2\nu_2 + \ldots \varepsilon^{-1}o_k\nu_k,$$

$$\therefore \quad \widetilde{N} = o_1'\varepsilon^{-1}\nu_1 + o_2'\varepsilon^{-1}\nu_2 + \ldots o_k'\varepsilon^{-1}\nu_k \qquad (o_i' \in o\,\varepsilon^{-1}\nu_i \to \widetilde{N}).$$

Avem deci în $\widetilde{N} \supset O$ un O-modul finit drept în acelaşi timp inel. Conform axiomei 3 urmează

$$\widetilde{N} = 0,$$

împotriva rezultatului (1).

Prin urmare, eventualitatea (2) cade. Rămâne (3) care, împreună cu $\overline{N}N = O$ din aliniatul 6° arată *) că există un modul invers N^{-1} cu

$$N^{-1}N = NN^{-1} = O \qquad N^{-1} = \overline{N} = \widetilde{N}.$$

18°. *Teorema modulului invers al idealelor nedivizibile regulate, cu închiderea aritmetică.*

Axioma 3 a maximalităţii lui O nu este folosită în ceea ce urmează. Are deci sens să propunem o altă fundare, paralelă, a teoriei idealelor, cu ipoteza închiderii aritmetice în locul maximalităţii lui O. Materia aliniatelor viitoare din § 3, întrucât nici maximalitatea nici închiderea aritmetică a lui O nu mai intervin direct ci prin mijlocirea teoremei modulului invers, este comună celor două fundări.

Fie înfăşurarea inelară $H \supset O$ unde H are element-unitate şi unde semigrupul caracteristic E este format din unităţi ale lui H conţinute în O şi subpermutabile global $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ cu O

*) Raţionamentul este clasic. In virtutea relaţiei (3) şi relaţiei teoremei din aliniatul 16°, putem scrie $\overline{N}N\widetilde{N} = \overline{N}O = \overline{N}$, $\overline{N}N\widetilde{N} = O\widetilde{N} = \widetilde{N}$, deoarece $\overline{N}$, $\widetilde{N}$ sunt O module bilaterale iar O are elemente unitare. Urmează $\overline{N} = \widetilde{N} = N^{-1}$.

Presupunem că O *este aritmetic închis în* H. Aceasta înseamnă că orice element $\varkappa$ din H al cărui puteri naturale $\varkappa^h$ se găsesc toate cuprinse în acelaşi O-modul finit $O\varepsilon^{-1}$ $(\varepsilon \to E)$ aparţine lui O.

Teoremă. *In aceste condiţii se poate demonstra că orice ideal nedivizibil regulat* N *(aşa dar* $\overline{N} > O$*) are modulul invers.*

Demonstraţie. Menţionăm în treacăt că închiderea aritmetică din enunţ, fără să fie cea mai tare posibilă, este mai tare decât ceea ce am numit în § 2 închiderea aritmetică mod E şi chiar mod Z.

Observăm că produsul de O-module bilaterale $\overline{N}N$ este ideal, deoarece $\overline{N}N \subset O$ iar elementul caracteristic ε al lui N este cuprins în $\overline{N}N$.

Din $\overline{N} \supset O$ rezultă

$$\overline{N}N \supset N. \tag{1}$$

Aşa dar, sau

$$\overline{N}N = N \tag{2}$$

sau

$$\overline{N}N = O. \tag{3}$$

Considerăm eventualitatea (2). Rezultă

$$\overline{N}^h N = N$$

pentru toţi întregii naturali h.

Fie $\varkappa \in \overline{N}$ iar $\varepsilon \to N$, $\varepsilon \to E$. Urmează că

$$\varkappa^h \varepsilon \to N \subset O,$$

$$\therefore \varkappa^h \to O\varepsilon^{-1}.$$

Conform închiderii aritmetice din enunţ, rezultă că $\varkappa \to 0$, aşa dar

$$\overline{N} \subset O,$$

împotriva regularităţii postulate $\overline{N} > O$.

Deci eventualitatea (2) cade. Rămâne (3).

In virtutea lui (3) avem

$$N\overline{N}N = ON. \tag{4}$$

Insă O are element-unitate. Intr'adevăr, avem pentru 1 din H egalitatea $1 = \varepsilon\varepsilon^{-1}$, aşa dar $1^h = 1 \to O\varepsilon^{-1}$. Deci, în virtutea închiderii aritmetice, $1 \to O$.

De aceea (4) devine

$$N\overline{N}N = N,$$

$$\therefore (N\overline{N})^h N = N.$$

Fie $y \in N\overline{N}$. Găsim

$$y^h \varepsilon \to N \subset O,$$

$$\therefore y^h \to O\varepsilon^{-1},$$

pentru toţi h întregi naturali. Ca atare $y \to O$. In definitiv

$$N\overline{N} \subset O,$$
$$\therefore \overline{N} \subset \widetilde{N}$$

Dar $\overline{N} > O$. Deci

$$\widetilde{N} > O. \tag{5}$$

Considerăm acum produsul de O module bilaterale $N\widetilde{N}$. Avem $N\widetilde{N} \subset O$. Pe de altă parte, din $\widetilde{N} \supset O$ rezultă

$$N\widetilde{N} \supset N. \tag{6}$$

Deci $N\widetilde{N}$ este ideal bilateral ce conţine pe $\varepsilon \to N \subset N\widetilde{N}$. In definitiv, este ideal.

Insă N este nedivizibil, încât din (6) urmează sau

$$N\widetilde{N} = N \tag{7}$$

sau

$$N\widetilde{N} = O. \tag{8}$$

In cazul (7) avem

$$N\widetilde{N}^h = N,$$

pentru toţi întregii naturali h. Fie $z \in \overline{N}$. Urmează

$$\varepsilon z^h \to N \subset O$$
$$\therefore \quad z^h \to \varepsilon^{-1} O.$$

Cu subpermutabilitatea globală a lui ε faţă de O aşa dar $O\,\varepsilon \subset \varepsilon O$, $\therefore \varepsilon^{-1} O \subset O\varepsilon^{-1}$ obţinem

$$z^h \to O\varepsilon^{-1},$$

încât, în virtutea închiderii aritmetice din enunţ, rezultă $z \to O$, adică

$$\widetilde{N} = \subset O,$$

împotriva lui (5).

Aşa dar, eventualitatea (7) cade. Rămâne (8).

Relaţiile (3) şi (8) luate împreună dau

$$N^{-1} N = NN^{-1} = O, \qquad (N^{-1} = \overline{N} = \widetilde{N}).$$

Este deci dovedit că proprietatea modulului invers pentru idealele nedivizibile regulate poate fi obţinută numai cu închiderea aritmetică, fără maximalitatea lui O (şi *chiar fără vreo referire la axioma* 1 *a limitării maximale*).

19°. *Identificarea idealelor prime ca ideale nedivizibile regulate*

Axioma 3 a maximalităţii, respectiv axioma din aliniatul precedent, a închiderii aritmetice, nu va mai fi folosită direct, de aici înainte, ci prin intermediul *propoziţiei modulului invers* pentru idealele nedivizibile regulate, *arătată* în ceea ce urmează *prin* μ.

Iarăşi, axioma 1 a limitării maximale pentru idealele drepte (de intervenţia căreia demonstraţia lui μ, cu închiderea aritmetică — am văzut în aliniatul precedent — este liberă) o vom folosi numai sub forma slabă 1') a limitării maximale pentru ideale.

Teoremă $\boxed{1') + 2 + \mu}$. *Orice ideal prim este un ideal nedivizibil regulat. Idealele prime sunt permutabile între ele.*

Demonstraţie. Fie P un ideal prim arbitrar iar ε o unitate caracteristică a sa.

In virtutea subpermutabilităţii globale a lui E, adică $O\varepsilon \subset \varepsilon O$, avem în εO un ideal bilateral. Cum O are element-unitate, chiar un ideal, deoarece $\varepsilon \to \varepsilon O$.

Teorema din aliniatul 4° a produsului de divizori primi, divizat, se stabileşte numai cu axioma 1'), deci este valabilă aici. Avem

$$P \supset \varepsilon O \supset P_1 P_2 \dots P_{r-1} P_r, \qquad P_k \supset \varepsilon O, \qquad (k = 1, 2 \dots r) \tag{1}$$

unde dimensiunea r poate fi presupusă minimă pentru produsele de divizori primi divizate, ale lui $O\varepsilon$.

Cum P este prim, urmează pentru un anume indice i de mai sus,

$$P \supset P_i .$$

sau, în virtutea axiomei 2,

$$P = P_i . \tag{2}$$

Dacă $r = 1$, înfăşurările (1) se scriu

$$\begin{aligned} & P \supset \varepsilon O \supset P_1 = P, \\ \dots \quad & O\varepsilon = \varepsilon O = P, \\ \dots \quad & \varepsilon^{-1} P = O, \\ \dots \quad & \varepsilon^{-1} \to \overline{P}. \end{aligned} \tag{3}$$

Insă

$$\varepsilon^{-1} \not\to O. \tag{3'}$$

Altfel am avea $1 = \varepsilon^{-1} \varepsilon = P$, adică $P = O$, ceea ce este exclus.

Cum $\overline{P} \supset O$, din (3), (3') rezultă

$$\overline{P} > 0.$$

In virtutea axiomei 2, idealul P este şi nedivizibil. Deci, pentru $r = 1$ prima parte a teoremei este verificată.

Fie $r > 1$. Cum r este minim, prin comparare cu (1) urmează

$$\varepsilon O \not\supset P_1 P_2 \dots P_{r-1} . \tag{4}$$

Există deci un element η cu

$$\eta \to P_1 P_2 \dots P_{r-1} \qquad (\eta \not\to \varepsilon O). \tag{5}$$

Avem însă din (1)

$$\begin{aligned} & \eta P_r \subset \varepsilon O, \\ \dots \quad & \varepsilon^{-1} \eta P_r \subset O, \\ \dots \quad & \varepsilon^{-1} \eta \to \overline{P}_r . \end{aligned} \tag{6}$$

Dar

$$\varepsilon^{-1}\,\eta \not\to O, \tag{7}$$

altfel am avea $\eta \to \varepsilon O$, împotriva celei de a doua din relaţiile (5). Cum $\overline{P_r} \supset O$, din (6) şi (7) conchidem

$$\overline{P_r} > O.$$

In virtutea acestei relaţii şi a axiomei 2 avem în P_r un *ideal nedivizibil regulat*. Conform propoziţiei μ, idealul P_r are modul invers. Ca atare, P_r este permutabil cu orice ideal prim ce nu-l divide (teorema generală din aliniatul 5°), deci, cu toate idealele prime (afară poate de el însuşi), întrucât P_r este nedivizibil. Dar, bine înţeles, este permutabil şi cu el însuşi. In definitiv P_r este permutabil cu orice ideal prim, fără excepţie.

(Notăm că această concluzie se aplică şi idealului P din cazul $r = 1$. Deci *toate punctele teoremei se verifică pentru* $r = 1$).

Intorcându-ne la (1) şi folosind permutabilitatea lui P_r cu toţi factorii anteriori (ideale prime), relaţia devine

$$P \supset \varepsilon O \supset P_r P_1 \dots P_{r-1}, \tag{1'}$$

aşa dar o relaţie în totul asemănătoare cu (1), cu deosebire că locul lui P_r este ocupat de P_{r-1}.

Iterând, recunoaştem în P_{r-1} un ideal nedivizibil regulat, permutabil cu orice ideal prim. Din (1') obţinem deci

$$P \supset \varepsilon O \supset P_{r-1} P_r P_1 \dots P_{r-2}. \tag{1''}$$

Din aproape, în aproape, ajungem la

$$P \supset \varepsilon O \supset P_{i+1} P_{i+2} \dots P_r P_1 \dots P_i. \tag{1^{r-1}}$$

In concluzie avem în P_i un ideal nedivizibil regulat, permutabil cu orice ideal prim.

Dar, conform lui (2), P_i nu este altceva decât idealul prim, arbitrar luat, P.

Teorema este deci demonstrată pentru $r > 1$. In definitiv, este complet demonstrată pentru orice $r \geqslant 1$.

Teoremă principală $\boxed{1') + 2 + \mu}$. *Idealele prime au modul invers.*

Demonstraţie. Este de ajuns să luăm împreună teorema precedentă şi propoziţia μ.

20°. *Teorema fundamentală pentru aritmeticile complete*

Cererea închiderii aritmetice de care am făcut uz în aliniatul 18° este mai tare decât închiderea aritmetică $\overline{\alpha}_1$ mod Z, ea însăşi mai tare decât închiderea aritmetică α_1 mod E (§ 2). O vom nota cu α. Orice element $x \to H$ pentru care

$$x^h \to O\varepsilon^{-1} \qquad (\varepsilon \to E, \quad x \to H),$$

oricare ar fi intregul natural h, aparţine lui O. Deci

$$x \to O.$$

Aşa fiind, putem enunţa două teoreme fundamentale, corespunzătoare la două cadre diferite:

Teoremă fundamentală $\boxed{1+2+3}$, respectiv $\boxed{1')+2+\alpha}$. *Orice ideal $I < O$ se descompune în produs comutativ de ideale prime, unic determinat până la ordinea factorilor.*

Demonstrație. Să considerăm cadrul $\boxed{1+2+3}$. Axioma 1') se verifică aici, întrucât ea este o formă mai slabă a axiomei 1. Axioma 2') este satisfăcută întrucât, în virtutea axiomei 2, coincide cu propoziția μ. Axioma 3') coincide cu axioma 2.

Considerăm cadrul $\boxed{1')+2+\alpha}$. Axioma 1') chiar intră în acest cadru. Axioma 2') este satisfăcută întrucât, în virtutea axiomei 2, coincide cu propoziția μ, demonstrată în alineatul 18° numai cu α. Insfârșit, axioma 3') coincide cu axioma 2.

Prin urmare, fiecare din cadrele indicate în enunț este conținut în cadrul $\boxed{1')+2')+3')}$ al aritmeticilor anterioare din aliniatul 3°. Teorema fundamentală de aici rezultă deci prin particularizare din teorema din aliniatul 8°.

Cu aceasta, cercetarea asupra aritmeticilor complete este terminată.

Observație importantă. Din confruntarea teoremei principale dela sfârșitul aliniatului precedent cu teorema din aliniatul 9°, a implicației « prim→nedivizibil » în aritmeticile primitive, conchidem că *aritmeticile complete și aritmeticile primitive cu semigrup caracteristic E, format din unități global subpermutabile $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ cu inelul O, se acoperă.* Această cerere de subpermutabilitate globală a lui E este însă, în realitate, o cerere tare.

§ 4. Construirea ipotezelor 1 și 2 ale limitării maximale și implicației « prim → nedivizibil »

21°. *Existența idealului dilatat, nenul, divizat*

Teorema bazei dă mijlocul de a construi limitarea maximală pentru idealele (drepte) în orice inel $\mathcal{C}$-modul finit, prin transferare, adică prin impunerea acestei condiții lui $\mathcal{C}$.

In prima jumătate a acestui paragraf, rezolvăm o problemă mai generală: într'o algebră peste corpul câturilor unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$, construim, prin condiții impuse asupra lui $\mathcal{C}$, limitarea maximală și pentru inelele despre care nu știm *a priori* că sunt $\mathcal{C}$-module finite.

Soluția pe care o dăm este rezultatul analizei memoriului binecunoscut al lui H. Grell asupra teoriei clasice a idealelor în extinderile finite algebrice nu numai decât separabile (cazul separabil a fost considerat de E. Noether). In cele ce urmează ne propunem să izolăm ideea mai adâncă ce stă la baza lucrării lui H. Grell valabilă și în necomutativ: transferarea limitării maximale a idealelor, asupra inelelor nu numaidecât $\mathcal{C}$-module finite ale unei algebre.

Dat este un domeniu de integritate $\mathcal{C}$, cu element-unitate, și o algebră H de gradul n, cu element-unitate, peste corpul k al câturilor lui $\mathcal{C}$. Considerăm un sub-inel O al algebrei H supus singurelor condiții

$$O \cap k = \mathcal{C}, \qquad O \supset \mathcal{C}.$$

Semigrupul caracteristic E al idealelor din O este luat egal cu

$$E = \mathcal{C} - 0.$$

Ipoteza fundamentală este că în $\mathcal{C}$ stăpânește o teorie clasică a idealelor. Toate desvoltările alineatelor următoare tind să stabilească existența limitării maximale pentru idealele drepte conținătoare de elemente $c \neq 0$, $c \to \mathcal{C}$ din O, așa dar, axioma 1 a aritmeticilor complete.

T e o r e m ă. *Orice ideal drept J al lui O, conținător al unui element $c \neq 0$, înfășură idealul dilatat Oj al unui ideal nenul j din $\mathcal{C}$*, adică

$$J \supset Oj.$$

Demonstrație. Fie

$$j = J \cap \mathcal{C}. \tag{1}$$

Este clar că j este un modul al lui $\mathcal{C}$ și anume un modul nenul, întrucât $c \to j$. Fie $a \in \mathcal{C}$. Cum $O \supset \mathcal{C}$ urmează

$$aj \subset J \quad , \quad aj \subset \mathcal{C} \qquad (a \in \mathcal{C}),$$

$$\therefore \quad aj \subset J \cap \mathcal{C} = j \qquad (a \in \mathcal{C}).$$

Așa dar avem în j un ideal nenul al lui $\mathcal{C}$.

Considerăm produsul de module Oj pe care îl numim *dilatarea lui j*. Rezultă

$$O \cdot Oj \subset O^2 j \subset Oj,$$

$$jO \cdot O \subset jO^2 \subset jO.$$

Prin urmare $Oj = jO$ (deoarece $j \subset \mathcal{C}$ este în centrul lui H) este un ideal bilateral al lui O. Este chiar un ideal, întrucât $c^2 \to Oj$ iar $c^2 \neq 0$.

J fiind ideal drept, urmează din (1), pe rând,

$$j \subset J,$$

$$Oj \subset OJ \subset J.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

22°. *Descompunerea inelului $\mathcal{C}/j$ în sumă directă de inele multiplicativ-anulate.*

T e o r e m ă. Dacă

$$j = \mathfrak{p}_1^{\rho_1} \mathfrak{p}_2^{\rho_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{\rho_k} \quad (\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_h, \quad i \neq h)$$

este descompunerea în ideale prime ce rezultă pentru j în inelul $\mathcal{C}$ cu teorie clasică a idealelor, avem izomorfismul

$$\frac{\mathcal{C}}{j} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_1^{\rho_1}} + \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_2^{\rho_2}} + \ldots \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_k^{\rho_k}},$$

unde membrul al doilea este o sumă directă abstractă de inele reziduale, ce se anulează multiplicativ reciproc. Aceasta înseamnă

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_i^{\rho_i}} \times \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_k^{\rho_\rho}} = 0 \qquad (i \neq h).$$

Demonstrație. Fie, mai general, un inel nu numaidecât comutativ Γ, cu element-unitate, iar

$$A \cap B \cap \ldots K \cap L$$

o secțiune de ideale bilaterale, două câte două divizibil străine, din Γ.

Dacă (α), respectiv (β), este un sistem complet de reprezentanţi ai idealelor claselor de resturi $\frac{\Gamma}{B}$, respectiv $\frac{\Gamma}{A}$, iar

$$a + b = 1$$
$$(a \to A \quad , \quad b \to B),$$

descompunerea lui 1 prin mijlocirea perechii de ideale divizibil străine A, B, se ştie [11] *) că

$$\alpha a + \beta b$$

constitue un sistem complet de reprezentanţi pentru $\frac{\Gamma}{A \cap B}$.

Avem congruenţa cu dublu modul

$$(\alpha' a + \beta' b)(\alpha'' a + \beta'' b) \equiv \alpha' a \alpha'' a + \beta' b \beta'' b \qquad \text{mod } AB,\ BA,$$

deoarece $a \to A$, $b \to B$.

Pe de altă parte,

$$\alpha' a \alpha'' a = \alpha'(1 - b)\alpha'' a \equiv \alpha' \alpha'' a \qquad \text{mod } BA \tag{1}$$

$$\beta' b \beta'' b = \beta'(1 - a)\beta'' b \equiv \beta' \beta'' b \qquad \text{mod } AB \tag{2}$$

Deci

$$(\alpha' a + \beta' b)(\alpha'' a + \beta'' b) \equiv \alpha' \alpha'' a + \beta' \beta'' b \qquad \text{mod } AB,\ BA \tag{3}$$

Dar evident $AB \subset A \cap B$ şi $BA \subset A \cap B$, încât (1), (2) şi (3) devin

$$\alpha' a \cdot \alpha'' a \equiv \alpha' \alpha'' a \text{ mod } A \cap B \,(1'), \quad \beta' b \cdot \beta'' b \equiv \beta' \beta'' b \quad \text{mod } A \cap B, \tag{2'}$$

$$(\alpha' a + \beta' b)(\alpha'' a + \beta'' b) \equiv \alpha' \alpha'' a + \beta' \beta'' b \qquad \text{mod } A \cap B. \tag{3'}$$

La acestea adăugăm

$$\alpha a \cdot \beta b \equiv 0 \qquad \text{mod } A \cap B. \tag{4}$$

Citim pe (1'), respectiv pe (2'), izomorfismele **)

$$\frac{\Gamma}{B} \rightleftarrows \mathfrak{A}, \quad \text{respectiv } \frac{\Gamma}{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}, \tag{5}$$

unde $\mathfrak{A}$, respectiv $\mathfrak{B}$ este domeniul aditiv-multiplicativ al produselor (αa), respectiv (βb), luate modulo $A \cap B$ şi organizate cu adunarea din Γ şi cu înmulţirea (1'), respectiv (2').

Pe (3') citim izomorfismul

$$\frac{\Gamma}{A \cap B} \rightleftarrows \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \tag{5'}$$

unde membrul al doilea este suma directă abstractă a inelelor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

---

*) p. 206.

**) Relaţiile privitoare la adunare.

$$\alpha' a + \alpha'' a \equiv (\alpha' + \alpha'') a \qquad \text{mod } A \cap B$$
$$\beta' b + \beta'' b \equiv (\beta' + \beta'') b \qquad \text{mod } A \cap B$$

sunt evidente.

In virtutea lui (4) inelele $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sunt, în (5), multiplicativ anulate

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = 0.$$

Transformând suma directă abstractă (5′) cu izomorfismele (5) şi menţinând condiţia anulării multiplicative, obţinem un alt izomorfism

$$\frac{\Gamma}{A \cap B} \rightleftarrows \frac{\Gamma}{A} + \frac{\Gamma}{B}, \quad \frac{\Gamma}{A} \times \frac{\Gamma}{B} = 0. \tag{6}$$

Fie acum idealele A, B, $C \ldots K$, L, două câte două divizibil-străine, ale inelului Γ. Se ştie [9] că oricare din ele este divizibil străin cu secţiunea celorlalte

$$(A \cap B \cap \ldots K) \cup L = \Gamma. \tag{6′}$$

Aplicând proprietatea (6), generală, idealelor divizibil străine $(A \cap B \cap \ldots K)$ şi L din (6′), obţinem

$$\frac{\Gamma}{A \cap B \cap \ldots K \cap L} \rightleftarrows \frac{\Gamma}{A \cap B \cap \ldots K} + \frac{\Gamma}{L}, \tag{7}$$

$$\frac{\Gamma}{A \cap B \cap \ldots K} \times \frac{\Gamma}{L} = 0.$$

Să admitem ipoteza inductivă

$$\frac{\Gamma}{A \cap B \cap \ldots K} \rightleftarrows \frac{\Gamma}{A} + \frac{\Gamma}{B} + \ldots \frac{\Gamma}{K}, \tag{7′}$$

unde inelele sumei directe din membrul al doilea se anulează reciproc, prin înmulţire.

Introducând (7′) în (7), obţinem suma directă

$$\frac{\Gamma}{A \cap B \cap \ldots K \cap L} \rightleftarrows \frac{\Gamma}{A} + \frac{\Gamma}{B} + \ldots \frac{\Gamma}{K} + \frac{\Gamma}{L}, \tag{8}$$

unde relaţiile de anulare reciprocă se extind şi lui $\frac{\Gamma}{L}$; într'adevăr, în virtutea lui (7) şi (7′), avem

$$\left(\frac{\Gamma}{A} + \frac{\Gamma}{B} + \ldots \frac{\Gamma}{K}\right) \times \frac{\Gamma}{L} = 0,$$

paranteza însemnând o sumă *directă*.

Pe de altă parte, conform lui (6), descompunerea (7′) se verifică pentru două componente. Deci este valabilă pentru orice secţiune de ideale bilaterale două câte două divizibil străine.

Să facem aplicaţia acestui rezultat general cazului din enunţ.

Idealele prime şi diferite $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ sunt divizibil străine. Cum $\mathcal{C}$ are element-unitate, se demonstrează (chiar fără teorema fundamentală) că puterile $\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$, $\mathfrak{p}_h^{\rho_h}$ sunt divizibil străine

$$\mathfrak{p}_i^{\rho_i} \cup \mathfrak{p}_h^{\rho_h} = \mathcal{C}, \qquad (i \neq h). \tag{9}$$

După o teoremă cunoscută [12], avem

$$j = \mathfrak{p}_1^{\rho_1}\,\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{\rho_k} = \mathfrak{p}_1^{\rho_1}\cap\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\cap\ldots\mathfrak{p}_k^{\rho_k}. \tag{10}$$

Aplicând rezultatul precedent obţinem

$$\frac{\mathcal{C}}{j}\rightleftarrows\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_1^{\rho_1}}+\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_2^{\rho_2}}+\ldots\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_k^{\rho_k}},\qquad \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_i^{\rho_i}}\times\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}_h^{\rho_h}}=0,\qquad (i\neq h) \tag{11}$$

unde în membrul al doilea al izomorfismului figurează o sumă directă abstractă

23°. *Descompunerea inelului O/Oj în sumă directă de inele multiplicativ-anulate.*

Din relaţia (9), aliniatul precedent, urmează (înmulţire de module!)

$$O\mathfrak{p}_i^{\rho_i}\cup O\mathfrak{p}_h^{\rho_h}=O\qquad (i\neq h), \tag{1}$$

(deoarece $O\supset\mathcal{C}$ iar $\mathcal{C}$ conţine elementul-unitate, am pus $O\mathcal{C}=O$).

Din (10) urmează

$$Oj=O^k\,\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\,\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{\rho_k}=O\mathfrak{p}_1^{\rho_1}O\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\ldots O\mathfrak{p}_k^{\rho_k}. \tag{2}$$

Dar proprietatea secţiunii unui număr de ideale bilaterale divizibil străine de a fi egală cu produsul lor, adevărată în comutativ, se menţine şi în necomutativ, dacă idealcle sunt permutabile [11] *).

Este tocmai cazul aici, întrucât $\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$, $\mathfrak{p}_h^{\rho_h}$ fiind în centru, avem

$$O\mathfrak{p}_i^{\rho_i}O\mathfrak{p}_h^{\rho_h}=O^2\mathfrak{p}_i^{\rho_i}\,\mathfrak{p}_h^{\rho_h}=O\mathfrak{p}_h^{\rho_h}O\mathfrak{p}_i^{\rho_i}. \tag{1'}$$

Deci (2) se scrie în baza lui (1) şi (1')

$$Oj=O\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\cap O\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\cap\ldots O\mathfrak{p}_k^{\rho_k}.$$

Aplicând rezultatul general din aliniatul precedent, obţinem următoarea

T e o r e m ă. *Factorizarea lui O la dilatarea Oj este sumă directă multiplicativ-anulată de factorizările la dilatările $O\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$ ale puterilor primare de descompunere ale lui j,* anume

$$\frac{O}{Oj}=\frac{O}{O\mathfrak{p}_1^{\rho_1}}+\frac{O}{O\mathfrak{p}_2^{\rho_2}}+\ldots\frac{O}{O\mathfrak{p}_k^{\rho_k}},\ \frac{O}{O\mathfrak{p}_i^{\rho_i}}\times\frac{O}{O\mathfrak{p}_h^{\rho_h}}=0,\qquad (i\neq h).$$

24°. *Omomorfismul de contragere.*

T e o r e m ă. *Urma omomorfismului $O\rightleftarrows\dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$ pe $\mathcal{C}$ este izomorfă cu $\dfrac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}}$:*

omomorfismul este de contragere.

Demonstraţie. Aici $\mathfrak{p}$ este unul din idealele prime $\mathfrak{p}_i$ ale lui $\mathcal{C}$, de care a fost vorba în aliniatele precedente.

*) p. 151.

Am văzut că $J \cap \mathcal{C}$ este un ideal din $\mathcal{C}$. Potrivit acestei propoziţii generale, $O\mathfrak{p} \cap \mathcal{C}$ este un ideal din $\mathcal{C}$ cu înfăşurările evidente (O, cu element-unitate!)

$$\mathcal{C} \supset O\mathfrak{p} \cap \mathcal{C} \supset \mathfrak{p}. \tag{1}$$

Nu putem avea

$$\mathcal{C} = O\mathfrak{p} \cap \mathcal{C},$$

adică

$$\mathcal{C} \subset O\mathfrak{p},$$

căci înmulţind (în semigrupul modulelor din H) cu modulul invers $\mathfrak{p}^{-1}$ al lui $\mathfrak{p}$, obţinem

$$\mathcal{C}\mathfrak{p}^{-1} \subset O\mathcal{C} = O.$$

Insă $\mathfrak{p}^{-1}$ este un $\mathcal{C}$-modul din corpul câturilor k, iar $\mathcal{C}$ are element-unitate. Rămâne

$$\mathfrak{p}^{-1} \subset O.$$

Aceasta înseamnă, întrucât $\mathfrak{p}^{-1} > \mathcal{C}$,

$$O \cap k \supset \mathfrak{p}^{-1} > \mathcal{C},$$

unde k este corpul câturilor lui $\mathcal{C}$, ceea ce am exclus.

Aşa dar, avem în (1)

$$\mathcal{C} > O\mathfrak{p} \cap \mathcal{C} \supset \mathfrak{p}. \tag{2}$$

Prin ipoteză, în domeniul de integritate cu element-unitate $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor. Deci, idealul prim $\mathfrak{p}$ este nedivizibil. Din (2) conchidem

$$O\mathfrak{p} \cap \mathcal{C} = \mathfrak{p}. \tag{3}$$

Teorema Dedekind-Noether ne dă

$$\frac{\mathcal{C} \cup O\mathfrak{p}}{O\mathfrak{p}} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} \cap O\mathfrak{p}}$$

sau, în virtutea lui (3),

$$\frac{\mathcal{C} \cap O\mathfrak{p}}{O\mathfrak{p}} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}}.$$

Primul membru este tocmai urma pe $\mathcal{C}$ a omomorfismului din enunţ $O \rightarrow \frac{O}{O\mathfrak{p}}$. Teorema este deci demonstrată.

25°. *Teoremă principală.*

Inelul $\frac{O}{O\mathfrak{p}}$ *este un modul de grad finit peste corpul* $\frac{\mathcal{C} \cup O\mathfrak{p}}{O\mathfrak{p}} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{p}}$.

Demonstraţie. Algebra H are peste corpul câturilor k al lui $\mathcal{C}$ gradul finit n. Aşa dar, între oricare $n + 1$ numere din $O \subset H$, arbitrar luate, avem sigur o legătură liniară cu coeficienţii nenuli, peste k. După gonirea numitorilor, această legătură devine

$$a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + \ldots a_n\omega_n \qquad (\omega_i \in O, \quad a_i \to \mathcal{C}), \tag{1}$$

unde nu toţi a_i sunt nuli.

Fie $\mathfrak{p}^m$ cea mai mare putere a lui $\mathfrak{p}$ (unul din idealele $\mathfrak{p}_i$ din aliniatele precedente) care divide fiecare din idealele principale (a_i) din $\mathcal{C}$. Punem

$$(a_i) = \mathfrak{p}^m \sigma_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

unde σ_i sunt alte ideale din $\mathcal{C}$.

Dar în inelele cu teorie clasică a idealelor, pentru fiecare pereche de ideale $A \neq 0$, $B \neq 0$, dar altfel arbitrare, există un ideal C divizibil străin cu B al cărui produs cu idealul A este un ideal principal $(c) \neq 0$. Aceasta înseamnă că

$$AC = (c) \qquad (c \neq 0),$$
$$C \cup B = \mathcal{C}.$$

Luând $A = \mathfrak{p}^m$, $B = \mathfrak{p}$, există deci un ideal $C = \gamma$ cu

$$\mathfrak{p}^m \gamma = (c) \qquad (c \neq 0), \tag{3}$$
$$\gamma \cup \mathfrak{p} = \mathcal{C}.$$

Este clar că $\mathfrak{p}$ nu devide pe γ, altfel $\mathfrak{p} < \mathcal{C}$ ar divide pe $\mathcal{C}$.
Din (2) şi (3) rezultă

$$\gamma\,(a_i) = (c)\,\sigma_i. \tag{4}$$

Luând acum $A = \gamma$, $B = \mathfrak{p}$, există un ideal $C = \tau$ astfel încât

$$\begin{matrix} \gamma\,\tau = (t) \\ \tau \cup \mathfrak{p} = \mathcal{C}. \end{matrix} \qquad (t \neq 0), \tag{5}$$

Aceeaşi observaţie: $\mathfrak{p}$ nu divide pe τ.
Din (4) şi (5) rezultă

$$(t)\ (a_i) = (c)\ \tau\,\sigma_i,$$

adică, în grupul idealelor fracţionare,

$$\tau\sigma_i = \left(\frac{t\,a_i}{c}\right). \tag{6}$$

Dar $\tau\ \sigma_i$ este un produs de ideale întregi, deci un ideal întreg. Membrul al doilea din (6) este deci un ideal principal întreg, încât putem scrie

$$\frac{t\,a_i}{c} = s_i \qquad (s_i \to \mathcal{C}), \tag{6'}$$

$$\therefore\ (t)\ (a_i) = (c)\ (s_i), \tag{7}$$

unde cel puţin unul din idealele (s_i) este nedivizibil cu $\mathfrak{p}$.

Intr'adevăr, din (6), (6') urmează

$$(s_i) = \tau\,\sigma_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Nu toţi σ_i se divid cu $\mathfrak{p}$. Altfel, în (2), $\mathfrak{p}^m$ n'ar fi cea mai mare putere care divide pe toţi (a_i).

Fie σ_{i_0} acel σ_i care sigur nu se divide cu $\mathfrak{p}$. Pe de altă parte, prin construcţie, τ nu se divide cu $\mathfrak{p}$. Cum $\mathfrak{p}$ este prim, conchidem că (s_{i_0}) nu se divide cu $\mathfrak{p}$.

Din (7) rezultă deci, însemnând cu ε_i o unitate a lui O,

$$t\, a_i = c\, b_i \tag{8}$$

unde nu toţi $b_i = s_i\, \varepsilon_i$ se divid cu $\mathfrak{p}$.

Inmulţind deci în (1) cu t şi apoi scurtând cu $c \neq 0$, obţinem

$$b_0\, \omega_0 + b_1\, \omega_1 + \ldots\, b_n\, \omega_n = 0 \tag{9}$$

unde nu toţi b_i se divid cu $\mathfrak{p}$.

Să aplicăm aici omomorfismul $O \rightarrow \dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$. Am văzut că urma sa pe $\mathfrak{C}$ este aceeaşi ca şi a omomorfismului $\mathfrak{C} \rightarrow \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}$ (aliniatul 4°), adică un corp *) $o^* \subset \dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$.

Obţinem din (9)

$$b_0^*\, \omega_0^* + b_1^*\, \omega_1^* + \ldots\, b_n^*\, \omega_n^* = 0. \tag{10}$$

Prin felul cum au fost introduşi ω_i, rezultă că avem în ω_i^* chiar $n+1$ numere arbitrare din $\dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$. Citim pe (10) că între aceste numere există o legătură liniară, cu coeficienţi în corpul o^*, nu toţi nuli (cel puţin un $b_i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$).

Aşa dar $\dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$ are peste corpul o^* o bază finită de gradul $g \leqslant n$.

26°. *Baza finită a factorizărilor la dilatările primare*

Teoremă. *Inelul* $\dfrac{O}{O\mathfrak{p}^\rho}$ *are bază finită peste inelul* $\dfrac{\mathfrak{C}}{O\mathfrak{p}^\rho}$.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{p}$ unul din divizorii primi ai lui j.

Avem $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2$. Nu putem lua $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ din cauza teoremei fundamentale din $\mathfrak{C}$. Aşa dar

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{p}^2.$$

Fie deci p un element cu

$$p \rightarrow \mathfrak{p}, \qquad p \rightarrow \mathfrak{p}^2.$$

Deoarece $\mathfrak{p} \supset (p)$ iar în $\mathfrak{C}$ divizibilitatea aditivă şi multiplicativă coincid, urmează

$$(p) = \mathfrak{p}\varkappa,$$

unde $\varkappa$ este un alt ideal din $\mathfrak{C}$.

Recunoaştem că $\varkappa$ nu se mai divide cu $\mathfrak{p}$, altfel $p \rightarrow \mathfrak{p}^2$. Cum $\mathfrak{p}$ este prim, orice putere $\varkappa^h$ a lui $\varkappa$ nu se divide cu $\mathfrak{p}$.

Deci

$$\mathfrak{p} \cup \varkappa^h = \mathfrak{C}, \tag{0}$$

*) Cum $\mathfrak{C}$ are teorie clasică a idealelor, $\mathfrak{p}$ este nedivizibil. Pe de altă parte, $\mathfrak{C}$ are element-unitate. Deci $\mathfrak{C}_\mathfrak{p}$ este corp.

pentru orice întreg natural h. Altfel, idealul $\mathfrak{p} \cup \varkappa^h < \mathcal{C}$ divizând pe $\mathfrak{p}$ s'ar confunda cu idealul nedivizibil $\mathfrak{p}$. Ar urma $\mathfrak{p} \supset \varkappa^h$, împotriva observației de mai sus.

In virtutea lui (0), rezultă pe rând, pentru $h = 1, 2, \ldots,$

$$(p) \cup \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}(\varkappa \cup \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}, \tag{1}$$

$$(p)^2 \cup \mathfrak{p}^3 = \mathfrak{p}^2(\varkappa^2 \cup \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^2, \tag{2}$$

. . . . . .

$$(p^h) \cup \mathfrak{p}^{h+1} = \mathfrak{p}^h(\varkappa^h \cup \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^h, \tag{h}$$

. . . . . .

Fie (λ) un sistem complet de reprezentanți ai claselor de resturi din $\mathcal{C}/\mathfrak{p}$ iar x un element arbitrar din $\mathcal{C}$.

Avem pentru un anume λ,

$$\varkappa - \lambda \to \mathfrak{p} \qquad (\varkappa \in \mathcal{C})$$

sau, folosind (1),

$$\varkappa - \lambda = l'p + \mathfrak{p}^2 \qquad (l' \to O).$$

Aici putem înlocui pe l' prin reprezentantul său λ' din (λ), iar membrul al doilea rămâne același mod $\mathfrak{p}^2$

$$\varkappa - \lambda - \lambda' p \to \mathfrak{p}^2$$

Folosind (2), avem mai departe

$$\varkappa - \lambda - \lambda' p = l'' p^2 + \mathfrak{p}^3 \qquad (e'' \to O).$$

Punând $l'' = \lambda''$ mod $\mathfrak{p}$ cu $\lambda'' \to (\lambda)$, avem încă

$$\varkappa - \lambda - \lambda' p - \lambda'' p^2 \to \mathfrak{p}^3$$

și așa mai departe. Obținem în definitiv

$$\varkappa - \lambda - \lambda' p - \lambda'' p^2 - \ldots \lambda^{(\rho-1)} p^{\rho-1} \to \mathfrak{p}^\rho$$

sau

$$\varkappa \equiv \lambda + \lambda' p + \lambda'' p^2 + \ldots \lambda^{(\rho-1)} p^{\rho-1} \qquad \text{mod } \mathfrak{p}^\rho \tag{3}$$

cu toți $\lambda, \lambda', \ldots \lambda^{(\rho-1)}$ în (λ).

In definitiv, din (3) rezultă, deoarece $\varkappa \in \mathcal{C}$, iar (λ) sunt în $\mathcal{C}$ luați mod $\mathfrak{p}$,

$$\mathcal{C} \equiv o^* + o^* p + o^* p^2 + \ldots o^* p^{\rho-1}, \qquad \text{mod } p^\rho \tag{4}$$

unde o^* înseamnă aici chiar $\mathcal{C}/\mathfrak{p}$, nu izomorful său $\mathcal{C} \cup O\mathfrak{p}/O\mathfrak{p}$

Să înmulțim în (4) peste tot cu O și să înlocuim modulul $\mathfrak{p}^\rho$ cu $O\mathfrak{p}^\rho$. Avem $O\mathcal{C} = O$.

Apoi, Oo^* adică O ($\mathcal{C}$ mod $\mathfrak{p}$) trebue înlocuit cu $O\mathcal{C}$ mod $O\mathfrak{p}$. In definitiv, Oo^* poate fi înlocuit cu O mod $O\mathfrak{p}$, așa dar cu $O^* = \dfrac{O}{O\mathfrak{p}}$.

Deci (4) devine

$$O \equiv O^* + O^* p + O^* p^2 + \ldots O^* p^{\rho-1} \qquad \text{mod } O\mathfrak{p}^\rho. \tag{5}$$

Am văzut însă în aliniatul 25° că $O^* = \frac{O}{Op}$ se reprezintă peste corpul O^* cu o bază $\omega_0^*, \omega_1^k, \ldots \omega_{g-1}^*$.

Din (5), conchidem că O se reprezintă mod Op^ρ peste corpul o^* cu o bază din următoarele $g\rho$ numere

$$p^i \omega_j^* \qquad (i = 0, 1, \ldots \rho - 1, \quad j = 0, 1, \ldots g - 1).$$

In definitiv (5) devine

$$O \equiv \sum_{j,i} o^* \cdot \omega_j^* p^i \qquad \text{mod } Op_\rho \tag{6}$$

sau încă (o^* fiind urma pe $\mathcal{C}$ a factorizării prin $Op \supset Op^\rho$)

$$\frac{O}{Op^\rho} = \sum_{j,i} \frac{\mathcal{C}}{Op^\rho} \omega_j^* p^i, \tag{7}$$

unde ω_j^*, p trebue consideraţi reprezentanţi de clase mod Op^ρ.

Dar $\mathcal{C}$ are limitare pentru ideale. Oricare imagine omomorfă a sa are de asemenea limitare pentru ideale.

Citim deci pe (7) că O/Op^ρ este modul finit peste *subinelul* său $\mathcal{C}/Op^\rho$ cu limitare pentru ideale.

Conform teoremei bazei, conchidem că toate $\frac{\mathcal{C}}{Op^\rho}$-modulele lui drepte (a *fortiori* toate idealele drepte) au bază finită.

Deci $\frac{O}{Op^\rho}$ este limitare maximală pentru idealele sale drepte.

27°. *Teorema finală*

In algebra H, peste corpul câturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu teorie clasică a idealelor, orice inel $O \supset \mathcal{C}$ cu $O \cap k = \mathcal{C}$ are limitare maximală pentru idealele drepte conţinătoare de câte un element nenul din $\mathcal{C}$.

Demonstraţie. Să revenim la descompunerea directă din aliniatul 23°

$$\frac{O}{Oj} = \frac{O}{Op^{\rho_1}} + \frac{O}{Op^{\rho_2}} + \ldots \frac{O}{Op^{\rho_k}}, \qquad \frac{O}{Op^{\rho_i}} \times \frac{O}{Op^{\rho_h}} = 0. \quad (i \neq h)$$

Un ideal drept al primului membru este o sumă de ideale drepte (nu numai decât directă) ale componentelor $\frac{O}{Op^{\rho_i}}$, cum uşor se poate vedea. Fiecare din idealele componente au bază finită peste acea componentă (aliniatul 26°).

In virtutea anulării multiplicative, rezultă că idealul drept din $\frac{O}{Oj}$ are bază finită la dreapta peste $\frac{O}{Oj}$.

Deci O/Oj are limitare maximală pentru lanţurile de ideale drepte.

Aceasta înseamnă că orice lanţ ascendent de ideale drepte, trecând prin Oj al lui O, se rupe în finit. *A fortiori*, lanţurile de ideale drepte care trec prin $J \supset Oj$.

Dar J este un ideal drept al lui O, conținător de un element nenul din $\mathcal{C}$, dar altfel arbitrar.

Este deci dovedit că lanțurile de astfel de ideale, ale oricărui subinel $O \supset \mathcal{C}$, cu $O \cap k = \mathcal{C}$, al lui H, au limitare maximală.

Cu aceasta totul este demonstrat.

28°. *Prima construcție a implicației « prim nedivizibil »*

Sfârșitul acestui paragraf este destinat construirii ipotezei 2 a aritmeticilor complete.

Peste tot, în ultimile aliniate ale paragrafului, cu excepția celui de față, idealele prime sunt presupuse *tari* (aliniatul 1°). Teorema fundamentală pentru idealele anterioare din aliniatul 8° și deci toate celelalte teoreme fundamentale, deduse prin specializare din aceasta, continuă să rămână valabile, cum am recunoscut la sfârșitul aliniatului 8°.

Fie $H \supset O$ o înfășurare inelară cu semigrup caracteristic E arbitrar.

Teoremă. *Dacă inelul O are limitare minimală pentru idealele drepte ce divid câte un același ideal prim, implicația « prim $\rightarrow$ nedivizibil » este realizată.*

Demonstrație. Fie P un ideal prim arbitrar din O. Conform teoremei lui Brauer-Hopkins, inelul factor $\frac{O}{P}$ are radical nilpotent deoarece, în virtutea ipotezei din enunț, $\frac{O}{P}$ are limitare minimală pentru idealele drepte.

Fie $\frac{W}{P}$ radicalul, cu $W \supset P$. Cum $\frac{W}{P}$ este ideal bilateral în $\frac{O}{P}$, ramificarea totală W a lui $\frac{W}{P}$ în omomorfismul $O \rightarrow \frac{O}{P}$ este ideal bilateral în O. Dar avem

$$\left(\frac{W}{P}\right)^n = (\underline{0}), \tag{1}$$

unde $(\underline{0})$ este idealul nul din $\frac{O}{P}$ iar exponentul n este minim.

Fie U, V două ideale din O cu $U \supset P$, $V \supset P$. Produsul în $\frac{O}{P}$ al idealelor $\left(\frac{U}{P}\right)\left(\frac{V}{P}\right)$ este evident modulul generat de complexul $U^\omega \cdot V^\omega$, unde ω este omomorfismul $O \rightarrow \frac{O}{P}$. Dar evident $U^\omega \cdot V^\omega = (U \cdot V)^\omega$, unde $U \cdot V$ este complexul produselor de elemente *u.v.*

De aici, formula generală

$$\left(\frac{U}{P}\right)\left(\frac{V}{P}\right) = \frac{UV}{P}. \tag{2}$$

Ca atare (1) se scrie

$$\frac{W^n}{P} = (\underline{0}),$$

adică

$$W^n \subset P. \tag{3}$$

Afirmăm că $n = 1$. Presupunem dimpotrivă $n > 1$. In acest caz, (3) se poate scrie

$$\underset{n'+n''=n}{W^{n'}\,W^{n''}} \subset P, \quad (0 < n' < n, \quad 0 < n'' < n). \tag{4}$$

Dar $W^{n^{(i)}}$ sunt ideale bilaterale care conţin puterea $\varepsilon^{n^{(i)}}$, $(i=1, 2)$ a unui element caracteristic ε al lui P. Deci sunt ideale.

Cum P este presupus prim (nu numaidecât prim-tare), din (4) urmează, pentru un anume i

$$W^{n^{(i)}} \subset P \qquad (0 < n^{(i)} < n). \tag{3'}$$

Relaţiile (3) şi (3') contrazic minimalitatea exponentului n.

Este deci indirect dovedit că

$$n = 1.$$

Cu aceasta (1) devine

$$\frac{W}{P} = (\underline{0}).$$

Avem deci în $\dfrac{O}{P}$ un inel semisimplu cu limitare minimală pentru idealele drepte. Teorema lui Wedderburn ne dă

$$\frac{O}{P} = \frac{M^{(1)}}{P} + \frac{M^{(2)}}{P} + \dots \frac{M^{(r)}}{P} \qquad (M^{(i)} \supset P), \tag{5}$$

$$\frac{M^{(i)}}{P} \times \frac{M^{(j)}}{P} = \underline{0} \qquad (i \neq j). \tag{6}$$

unde $\dfrac{M^{(i)}}{P}$ este izomorf cu un inel complet de matrice peste un corp k_i.

Nu putem avea în (5) neegalitatea $r > 1$. Altfel ar exista doi indici diferiţi $i \neq j$ pentru care să avem (6). Trecând, în (6), dela produsul de complexe la produsul de ideale, rezultă

$$\left(\frac{M^{(i)}}{P}\right)\left(\frac{M^{(j)}}{P}\right) = (\underline{0})$$

sau, în virtutea formulei generale (2),

$$\frac{M^{(i)}\,M^{(j)}}{P} = (\underline{0}),$$

$$\therefore \qquad M^{(i)}\,M^{(j)} \subset P. \tag{7}$$

Dar în suma directă (5), inelul $\dfrac{O}{P}$ admite idealul bilateral $\dfrac{M^{(i)}}{P}$. Cum $M^{(i)}$ este ramificarea totală a acestuia în omomorfismul $O \rightarrow \dfrac{O}{P}$, avem în $M^{(i)}$ un deal bilateral şi chiar un ideal, deoarece $\varepsilon \rightarrow P \subset M^{(i)}$.

Deci, P fiind ideal prim, din (7) rezultă pentru unul, anume, din indicii i, j, însemnat aici cu k,

$$M^{(k)} \subset P$$

$$\therefore \qquad \frac{M^{(k)}}{P} = (\underline{0}),$$

concluzie absurdă. întrucât $M^{(k)}/P$ este izomorf cu un inel complet de matrice peste un corp.

Este deci indirect dovedit că

$$r = 1.$$

Cu aceasta (5) devine

$$\frac{O}{P} = \frac{M}{P} \qquad (M \supset P),$$

unde $\frac{M}{P}$, aşa dar $\frac{O}{P}$, este un inel complet de matrice peste un corp, adică un inel simplu.

Să presupunem, prin absurd, că idealul prim P ar fi divizibil, adică am avea

$$O > N > P$$

cu N ideal, aşa dar ideal bilateral. Ar urma că

$$\frac{O}{P} > \frac{N}{P} > (\underline{0}) \tag{8}$$

cu $\frac{N}{P}$ ideal bilateral în $\frac{O}{P}$. Înfăşurările tari (8) sunt însă imposibile întrucât $\frac{O}{P}$ este inel simplu.

Nedivizibilitatea lui P, adică implicaţia « prim → nedivizibil », este astfel indirect stabilită.

29°. *Construcţia ipotezei « prim → nedivizibil » prin transferare.*

Fie $O \supset \mathcal{C}$ o înfăşurare inelară cu element-unitate. Introducem cererile prealabile

$\overline{1}$. O este $\mathcal{C}$ modul finit drept.

$\overline{2}$. Semigrupul caracteristic E al idealelor din O este conţinut în $(\mathcal{C} - 0)$.

$\overline{3}$. Elementele din $\mathcal{C}$ sunt global subpermutabile cu O

$$cO \subset Oc \qquad (c \in \mathcal{C}).$$

Cu definiţia tare a idealelor din O putem demonstra

T e o r e m a 1. *Dacă în $\mathcal{C}$ idealele prime obişnuite *), conţinătoare de elemente $\varepsilon \to E$ sunt nedivizibile, în O avem realizată ipoteza « prim → nedivizibil ».*

*) Idealul se numeşte ideal prim obişnuit în $\mathcal{C}$, când inelul $\mathcal{C}/p$ este fără divizori ai lui zero iar $p < \mathcal{C}$. Un ideal se numeşte nedivizibil în sensul obişnuit când nu se divide veritabil cu niciun ideal drept stâng şi niciun veritabil.

Demonstrație. Fie $x \in O$. Conform cererii prealabile $\overline{1}$ avem

$$x = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \ldots c_r\omega_r \qquad (c_i \in \mathcal{C},\ \omega_i \to O).$$

Dacă P este un ideal prim tare, dar altfel arbitrar din O iar f omomorfismul $O \rightleftarrows \frac{O}{P}$, atunci

$$x^f = c_1^f\omega_1^f + c_2^f\omega_2^f + \ldots c_r^f\omega_r^f, \tag{1}$$

unde c_i^f sunt în

$$\frac{\mathcal{C} \cup P}{P}.$$

Conform teoremei Dedekind-Noether, putem scrie

$$\frac{\mathcal{C} \cup P}{P} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} \cap P}. \tag{2}$$

Conform cererii prealabile $\overline{2}$ rezultă pentru un element caracteristic ε al lui P

$$\varepsilon \to \mathcal{C}, \qquad \varepsilon \to P,$$

$$\therefore\ \varepsilon \to (\mathcal{C} \cap P).$$

Pe de altă parte, se recunoaşte uşor că modulul $\mathcal{C} \cap P$ este ideal bilateral al lui $\mathcal{C}$. Aşa dar

$$p = \mathcal{C} \cap P$$

este un ideal bilateral al lui $\mathcal{C}$, conţinător de $\varepsilon \to E$.

Fie acum ab un produs de elemente din $\mathcal{C}$ divizat de p, dar altfel arbitrar. Avem

$$ab \to (\mathcal{C} \cap P) \subset P, \tag{3}$$

$$\therefore\ O^2\, ab \subset O^2\, P \subset P. \tag{4}$$

Folosind cererea prealabilă $\overline{3}$, rezultă

$$Oa \cdot Ob = O \cdot a\, Ob \subset O \cdot Oab \subset O^2\, ab. \tag{5}$$

unde punctul înseamnă înmulţire de complexe. Din (3) şi (4) conchidem

$$\begin{aligned} &Oa \cdot Ob \subset P, \\ &\therefore\ Oa\, Ob \subset P. \end{aligned} \tag{6}$$

Dar modulele Oa şi Ob sunt evident ideale drepte. Ele sunt chiar ideale bilaterale, deoarece

$$Oa \cdot O \subset O \cdot Oa \subset Oa, \quad Ob \cdot O \subset O \cdot Ob \subset Ob.$$

Deci, P fiind declarat ideal prim-tare, urmează din (6) sau

$$Oa \subset P$$

sau

$$Ob \subset P,$$

cu alte cuvinte (element-unitate !) sau

$$a \to P \tag{7}$$

sau

$$b \to P.$$

Pe de altă parte,

$$a \to \mathcal{C}, \qquad b \to \mathcal{C}, \tag{7'}$$

încât din (7) şi (7') rezultă sau

$$a \to (\mathcal{C} \cap P) = p \ .$$

sau

$$b \to (\mathcal{C} \cap P) = p.$$

Citim pe (3), (3') că p este un ideal prim obişnuit *) al lui $\mathcal{C}$. Pe de altă parte, am arătat că $\varepsilon \to p$. Prin urmare, în virtutea ipotezei din enunţ, p rezultă ideal nedivizibil (în înţelesul obişnuit).

Insă $\mathcal{C}$ are element-unitate. Este astfel dovedit că inelul factorial $\frac{\mathcal{C}}{p}$ şi, odată cu el, izomorful sau $\frac{\mathcal{C} \cup P}{P}$, din (2), este corp. Citim atunci pe (1) că $\frac{O}{P}$ are o bază minimală de gradul $\rho \leqslant n$ la dreapta, peste corpul $\frac{\mathcal{C} \cup P}{P}$. Altfel spus, $\frac{O}{P}$ este spaţiu de vectori.

Lanţurile veritabil descendente de subspaţii de vectori ale unui spaţiu de vectori se rup în finit, cum se ştie **).

Considerăm atunci lanţul veritabil descendent de ideale drepte, divizoare ale lui P, din O

$$O \supset J > J_1 > \ldots J_i > \ldots \supset P. \tag{8}$$

Factorizând la P, obţinem lanţul veritabil descendent de ideale drepte din $\frac{O}{P}$,

$$\frac{O}{P} \supset \frac{J}{P} > \frac{J_1}{P} > \ldots \frac{J_i}{P} > \ldots \supset (\underline{0}), \tag{8'}$$

aşa dar un lanţ de subspaţii al spaţiului de vectori $\frac{O}{P}$. Lanţul (8) trebue să se rupă în finit, altfel lanţul (8') ar continua indefinit.

---

*) Rămâne încă de arătat că $p < \mathcal{C}$. Intr'adevăr, nu putem avea $p = \mathcal{C}$, altfel $p \subset P$ ar conţine elementul-unitate al înfăşurării $O \supset \mathcal{C}$. Deci P ar fi egal cu O, ceea ce este exclus.

**) Iată argumentul: In cadrul inelelor module finite drepte peste un corp se poate redemonstra teorema lui Steinitz, a schimbului, invarianţa gradului ρ al bazei cum şi proprietatea oricărei mulţimi de elemente liniar independente la dreapta de a fi o bază.

Rezultă de aici că în înfăşurarea de O -module drepte $M > M_1$, unde primul este cu bază finită de gradul ρ la dreapta, al doilea este şi el cu bază finită de gradul $\rho_1 \leqslant \rho$, egalitatea intervenind atunci şi numai atunci când $M = M_1$. Este clar deci că un lanţ veritabil descendent $M > M_1 > M_2 > \ldots M_i > \ldots$ de module ale lui M se rupe în finit.

Este deci dovedit că în O avem limitare minimală pentru lanţurile de ideale drepte care divid câte un ideal prim.

In virtutea teoremei din aliniatul precedent, rezultă că implicaţia «prim → nedivizibil» este construită în O.

Teorema 2. *Fie $\mathcal{C}$ cu $c\mathcal{C} \subset \mathcal{C}c$ şi limitare minimală *) pentru idealele drepte conţinătoare de $\varepsilon \to E$, Implicaţia «prim → nedivizibil» este construită în O.*

Demonstraţie. Conform teoremei din aliniatul 28° avem realizată în $\mathcal{C}$ implicaţia «prim → nedivizibil», chiar pentru o categorie mai largă decât aceea a idealelor prime obişnuite (conţinătoare de $\varepsilon \to E$). Deci ipotezele teoremei 1 sunt toate realizate.

Observaţie importantă. Teorema din aliniatul 28° poate fi redemonstrată direct. Demonstraţia introduce următoarea lemă, generalizare a cunoscutei teoreme a lui E. Noether *(un domeniu de integritate cu limitare minimală pentru subinele este corp)* de către van der Waerden [9], prin consideraţii elementare.

Lemă. *Un inel nenul fără divizori ai lui zero, cu limitare minimală pentru idealele drepte este corp.*

Demonstraţie. Inelul este fără radical, altfel ar avea divizori ai lui zero. Conform teoremei lui Wedderburn, având limitare minimală pentru idealele drepte, este sumă directă de inele complete de matrice în anulare reciprocă, peste diverse corpuri. Toate matricele trebue să fie însă de ordinul 1 (să se reducă la corpuri), altfel ar exista divizori ai lui zero. Această sumă de corpuri în anulare reciprocă trebue să se reducă la un singur corp, altfel ar exista divizori ai lui zero. Lema este astfel demonstrată.

In cazul unui p, ideal prim obişnuit, inelul $\mathcal{C}/p$ este fără divizori ai lui zero. Conform ipotezei, $\mathcal{C}/p$ este cu limitare minimală pentru idealele drepte. In virtutea lemei, rezultă corp. Aşa dar p este nedivizibil în sensul obişnuit. Teorema 2 rezultă atunci în baza teoremei din aliniatul 28°.

Teorema 3. *Fie înfăşurarea $O \supset \mathcal{C}$ cu element-unitate, unde inelul O este* subcomutativ: $o\,O \subset O\,o$, $o \in O$ *şi format din întregi relativi la $\mathcal{C}$ şi unde inelul $\mathcal{C}$ este cu limitare maximală pentru idealele drepte. In acest caz, implicaţia «prim → nedivizibil» este transferabilă dela $\mathcal{C}$ la O, pentru idealele prime-tari şi pentru $E \subset \mathcal{C}$.*

Demonstraţie. Fie $P \supset ab$ un ideal prim-tare din O, cu $a, b \to O$. Avem

$$P = O^2 P \supset O^2 ab = O \cdot O\,ab \supset O \cdot a\,O\,b.$$

In definitiv

$$P \supset O\,a\;O\,b.$$

Se verifică bilateralitatea idealelor drepte Oa, Ob şi se conchide la $a \to P$ sau $b \to P$. Deci, P este ideal prim obişnuit. Presupunem că P ar fi divizibil

$$O > Q > P.$$

Fie elementul $q \to Q$, $q \not\to P$. El satisface ecuaţia

$$q^m - c_{m-1} q^{m-1} - \ldots c_1 q - c_0 = 0.$$

---

*) Sau încă mai puţin limitare pentru lanţurile de ideale drepte divizoare a câte unui ideal prim obişnuit, conţinător de $\varepsilon \to E$.

O cerere intermediară este limitarea minimală pentru lanţurile de ideale drepte care divid câte un ideal.

deoarece $\mathcal{C}$ are limitare maximală pentru ideale, iar q este întreg. Nu toţi c_i sunt în P. Altfel, din $q^m \to P$ ar urma $q \to P$. Fie deci $c_i \not\to P$.
Avem

$$q^i (q^{m-i} - c_{m-1} q^{m-1-i} - \ldots - c_i) = 0 \to P. \text{ Dar } q^i \not\to P. \text{ Urmează}$$

$$(q^{m-i} - c_{m-1} q^{m-1-i} - \ldots - c_i) \to P < Q.$$

Deci

$$c_i \to Q,\ c_i \to \mathcal{C}.$$

In definitiv

$$c_i \to Q \cap \mathcal{C},\ c_i \not\to P \cap \mathcal{C}.$$

Avem deci

$\mathcal{C} \supset Q \cap \mathcal{C} > P \cap \mathcal{C}$. Dar $p = P \cap \mathcal{C}$ este ideal prim, deci nedivizibil în $\mathcal{C}$.
Prin urmare

$$\mathcal{C} = Q \cap \mathcal{C},\ \therefore\ 1 \to \mathcal{C} \subset Q,\ \therefore\ Q = O,$$

concluzie absurdă. Este dovedit deci prin absurd că P este nedivizibil.

30° *Construcţii de aritmetici complete*

T e o r e m a 1. *Fie $H \supset \mathcal{C}$ o înfăşurare inelară cu element-unitate, iar E un semigrup de unităţi din H, global permutabile $\varepsilon O = O \varepsilon$ cu O, situat în $\mathcal{C}$. Dacă în $\mathcal{C}$ sunt satisfăcute axiomele*

0′. Subpermutabilitatea $cO \subset Oc$ a elementelor din $\mathcal{C}$ cu O.

1′. Limitarea maximală pentru lanţurile de orice fel de ideale drepte.

2′. Implicaţia «prim → nedivizibil», în sensul obişnuit, pentru toate idealele prime conţinătoare de $\varepsilon \to E$, atunci orice ordin maximal extrinsec $O \supset E$, cu E ca semigrup caracteristic are o aritmetică completă pentru ideale prime-tari.

Demonstraţie. Dacă O este ordin extrinsec, atunci este $\mathcal{C}$-modul drept finit. In virtutea axiomei 1′ şi a teoremei bazei, axioma 1 a aritmeticilor complete este satisfăcută în O.

Toate cererile prealabile ale teoremei 1 din aliniatul 29° sunt realizate aici. Mai mult, ipoteza din enunţul acelei teoreme este şi ea satisfăcută, în virtutea axiomei 2′. Conform teoremei menţionate, axioma 2 a aritmeticilor complete se verifică în O pentru ideale prime-tari.

In sfârşit, maximalitatea extrinsecă a lui O implică maximalitatea intrinsecă. Intr'adevăr, O fiind $\mathcal{C}$-modul drept finit, orice O modul drept finit O' rezultă $\mathcal{C}$-modul drept finit. Deci O este maximal şi printre aceste inele O'. Axioma 3 este deci satisfăcută.

Avem aşa dar definită în O o aritmetică completă relativă la ideale prime-tari, deci cu teoremă fundamentală (a se vedea argumentul dat la începutul aliniatului 28°).

Observaţie importantă. Dacă facem uz de teorema 2 din aliniatul 29°, axioma 2′ poate fi înlocuită cu cererea limitării minimale pentru lanţurile de ideale drepte divizoare de ideale prime, bineînţeles pentru inele $\mathcal{C}$ subcomutative.

Prin urmare, renunţând la o parte din generalitate, pentru a câştiga în netezime, putem în enunţul de mai sus, contrage axiomele 1′ şi 2′ în axioma unică: *limitarea maximală şi minimală pentru lanţurile de ideale drepte nenule, mărginite inferior.*

Dacă facem uz de cadrul teoremei 3 din aliniatul 29°, axioma 0′ cade. Este singura simplificare. In schimb, enunţul pe care îl obţinem din teorema 1 de mai sus este mult prea particular.

Teorema 2. (Generalizarea teoremei lui Grell). *Fie H o algebră peste corpul căturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$.*

Dacă în $\mathcal{C}$ stăpâneşte o teorie clasică a idealelor, atunci în orice ordin O intrinsec-maximal, cu

$$O \cap k = \mathcal{C},$$

şi limitare minimală pentru lanţurile de ideale drepte divizoare ale câte unui ideal, avem o aritmetică completă (relativă la ideale prime-tari).

Semigrupul caracteristic este aici $E = (\mathcal{C} - 0)$.

Demonstraţie. Conform teoremei din aliniatul 27°, inelul O are limitare maximală pentru idealele drepte conţinătoare de elemente $c \to (\mathcal{C} - 0) = E$. Axioma 1 este verificată.

In virtutea ipotezei din enunţ şi a teoremei din aliniatul 28°, axioma 2 este de asemenea verificată.

Axioma 3 este postulată în enunţ.

Cu aceasta totul este demonstrat.

Observaţii. Cele două exemple de mai sus corespund respectiv construirii axiomei 1 cu teorema bazei sau cu procedeul generalizat al lui Grell, din aliniatul 27°. Un procedeu se adaptează maximalităţii extrinsece; celălalt este aproape obligatoriu pentru maximalitatea intrinsecă.

Numai maximalitatea ordinului rămâne neconstruită. E. Artin în aritmetica sa a sistemelor hipercomplexe semisimple (ce intră ca un caz particular în fiecare din exemplele precedente) construeşte maximalitatea extrinsecă folosind o teoremă dată de L. E. Dickson [asupra discriminantului].

Teorema 3 *(A doua generalizare a teoremei lui Grell). Fie H o algebră subcomutativă $x\,H \subset H\,x$ peste corpul căturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu teorie clasică a idealelor. Atunci, în orice ordin intrinsec-maximal O, din H, cu $O \cap k = \mathcal{C}$ constând din întregi relativi la $\mathcal{C}$, unde $E \subset (C - 0)$, avem o aritmetică completă în raport cu ideale prime-tari.*

Demonstraţie. Axioma 1 a aritmeticilor complete este verificată: acelaşi argument ca la demonstraţia teoremei 2. Axioma 2 rezultă din aplicarea teoremei 3, aliniatul 29°. Axioma 3 este postulată în enunţ.

§ 5. Exhaustivitatea aritmeticilor complete. Inversarea teoremei fundamentale. Teoreme de echivalare

31°. *Teorema inversă a teoremei fundamentale*

Fie $H \supset O$ o înfăşurare inelară cu element-unitate. Semigrupul caracteristic E este presupus format din unităţi ale lui H cuprinse în O şi subpermutabile global cu O

$$O\varepsilon \subset \varepsilon O \qquad (\varepsilon \to E).$$

Pentru a duce la o încheiere inversarea teoremei fundamentale, avem nevoie de o situaţie particulară în înfăşurarea unui domeniu de integritate în corpul căturilor. Această situaţie o introducem prin cererea prealabilă *)

*) O astfel de cerere apare şi la Cl. Chevalley. Ea rezultă din axiomele sale II şi III. Este interesant, cum am arătat în § 1, că teorema fundamentală se obţine fără această cerere.

I. O-modulele finite drepte $M \supset O$ din H, în acelaşi timp inele, coincid cu amplificări la stânga ale idealelor întregi A prin câte o unitate stângă η din H, adică

$$M = \eta A, \qquad \eta' \eta = 1.$$

Se ştie că în chiar teoria clasică a idealelor, inversarea se obţine pentru acele descompuneri care asigură transformarea divizibilităţii aditive a idealelor într'o divizibilitate multiplicativă.

Este deci rezonabil să introducem şi noi o asemenea cerere sub forma următoarei definiţii:

Zicem că o teoremă fundamentală a unei aritmetici este de tip Noether când ea permite să conchidem la implicaţia divizibilităţii aditive a două ideale în divizibilitatea lor multiplicativă la dreapta

$$A \supset B, \qquad \therefore B = CA,$$

unde C este un alt ideal.

Încă o noţiune: *zicem că descompunerile unui ideal în produs* (nu numai decât comutativ) *de ideale prime sunt necomutativ-unice când au aceeaşi dimensiune.*

Putem demonstra acum această inversare a teoremei fundamentale (provizorie, întrucât axioma 1 este obţinută sub forma slabă 1'):

T e o r e m ă. *Dacă idealele $A < O$ au teoremă fundamentală cu unicitate necomutativă, de tip Noether, atunci înfăşurarea inelară $H \supset O$ satisface axiomele*

1'). *Limitarea maximală pentru ideale.*

2. *Implicaţia «prim—nedivizibil».*

3. *Maximalitatea intrinsecă a lui O.*

Demonstraţie. Fie înfăşurarea tare de ideale

$$A_1 > A. \tag{1}$$

In virtutea ipotezei Noether putem scrie

$$A = B A_1, \tag{2}$$

unde $B < O$, altfel (element-unitate !) am avea $A = A_1$.

Insemnăm cu r, r_1, r_0 respectiv dimensiunile descompunerilor lui A, A_1, B. Cum $O > A_1 > A$, $O > B$, avem în r_1, r, r_0 numere naturale (nenule). In virtutea unicităţii necomutative urmează din (2)

$$r = r_1 + r_0$$

adică

$$r > r_1. \tag{1'}$$

Comparând pe (1) cu (1'), conchidem că orice lanţ veritabil ascendent de ideale

$$\ldots > A_i \ldots A_2 > A_1 > A$$

se rupe în finit; altfel şirul descrescător al dimensiunilor

$$r > r_1 > r_2 > \ldots r_i > \ldots,$$

ar continua indefinit.

Cu aceasta axioma 1') este verificată.

Inainte de a trece la verificarea celorlalte axiome, să arătăm că fiecare ideal $A < O$ admite un modul invers la dreapta.

Insemnăm cu ε unitatea caracteristică a lui A. Avem

$$A \supset \varepsilon O. \tag{3}$$

Este vizibil că εO este ideal stâng. Este în acelaşi timp şi ideal drept, în virtutea sub permutabilităţii lui ε cu O. Pe de altă parte, $\varepsilon \to O\varepsilon$, deoarece avem element-unitate.

In definitiv εO din (3) este ideal. Aplicând ipoteza Noether, obţinem

$$O\varepsilon = BA,$$

$$\therefore O = \varepsilon^{-1} BA.$$

Este deci dovedit că fiecare ideal $A < O$ admite un modul invers la dreapta $A' = \varepsilon^{-1} B$, adică

$$O = A'A.$$

Fie atunci Q un inel, O-modul drept finit, care înfăşură pe O

$$Q \supset O. \tag{4}$$

Conform cererii prealabile I, putem scrie

$$Q = \eta I, \tag{5}$$

unde I este un ideal întreg, iar η o unitate stângă din H.

Să însemnăm cu I' modulul invers drept al lui I. Considerăm modulul

$$Q' = I'\eta', \tag{5'}$$

unde η' este inversul la dreapta al lui η, aşa dar $\eta' \eta = 1$.

Inmulţind modulele (5) şi (5'), în această ordine, găsim

$$Q'Q = I' \eta'\eta I = I'I = O$$

în definitiv

$$Q'Q = O. \tag{6}$$

Dar Q este inel. Folosind (6) obţinem pe rând (element-unitate !)

$$Q^2 \subset Q$$

$$\therefore Q'Q^2 \subset Q'Q$$

$$\therefore O\,Q \subset O.$$

Insă $O\,Q = Q$, întrucât $OQ \subset Q$, în virtutea lui (4) şi a faptului că Q este inel; iar $O\,Q \supset Q$ deoarece O conţine element-unitate al lui H. Deci (6') devine

$$Q \subset O. \tag{4'}$$

Relaţiile (4), (4') luate împreună dau

$$Q = O.$$

Prin urmare axioma 3, maximalitatea intrinsecă a ordinului, este şi ea verificată.

In sfârşit să probăm axioma 2.

Fie P un ideal prim arbitrar. Presupunem, prin absurd, că ar fi divizibil, anume

$$O > N > P. \tag{7}$$

Conform ipotezei Noether, urmează

$$P = MN, \tag{8}$$

cu M ideal.

În locul unicităţii necomutative a descompunerilor, să folosim identitatea factorilor esenţiali (dacă folosim egalitatea dimensiunilor, concluzia este imediată). Citim atunci pe (8) că descompunerea lui N este neapărat de forma

$$N = P^i.$$

Insă

$$P \supset P^i = N. \tag{7'}$$

Relaţiile (7) şi (7') luate împreună dau o contrazicere.

Astfel axioma 2 este verificată indirect: orice ideal prim este nedivizibil.

Observaţie. Nu trebue acreditată părerea, după demonstraţia de mai sus, că maximalitatea lui O este o condiţie necesară pentru producerea teoremei fundamentale. Cercetând mai de aproape mecanismul demonstraţiei, vedem că axioma 3 numai cu cererea prealabilă I şi cu existenţa modulului invers la dreapta devine necesară.

Cum cererea prealabilă I nu poate fi derivată din cadrul $\boxed{1') + 2 + \alpha}$ al aritmeticilor complete, amendate, din aliniatul 20°, demonstraţia de acolo a teoremei fundamentale, cu închiderea aritmetică α, nu se lasă, probabil, înlocuită printr'o demonstraţie cu axioma de maximalitate 3.

Observaţie. Dacă excludem existenţa idealelor drepte, ca atare, făcând ca idealele drepte şi idealele bilaterale să se acopere, de exemplu punând sub comutativitatea $xO \subset Ox$, $x \in O$, a inelului O (atunci orice ideal drept J este bilateral întru cât $JO \subset OJ \subset J$), teorema fundamentală devine complet inversabilă deoarece axioma 1') se confundă cu 1.

Acelaşi scop îl atingem, mai constructiv, cu cererea prealabilă II din alineatul viitor. Datorită ei, limitarea maximală 1') implică limitarea maximală 1. Şi în acest caz teorema fundamentală este complet inversabilă.

32°. *Teorema de echivalare*

In cele ce urmează presupunem, ca şi în aliniatul 31°, semigrupul caracteristic E format din unităţi global sub permutabile cu O.

Cererea prealabilă I o întărim cu o a doua.

II. Dacă $A \supset B$ este o înfăşurare de ideale drepte conţinătoare de unităţi $\varepsilon \to E$, avem atunci implicaţia

$$AO = BO, \quad \therefore \quad A = B.$$

In cadrul fix I + II *şi la menţinerea particularităţii de mai sus a semigrupului caracteristic putem demonstra această*

Teoremă. *Aritmeticile complete şi aritmeticile în care orice ideal admite descompuneri necomutativ-unice, de tip Noether, se acoperă.*

Demonstraţie. Fie $H \supset O$ o înfăşurare inelară cu aritmetică completă. Ea admite teoremă fundamentală (aliniatul 20°) iar descompunerile sunt, cum am văzut, comutative. Unicitatea este verificată chiar sub forma tare, comutativă,

Pe de altă parte, idealele prime au aici modul-invers (aliniatele 17° şi 18°). Ceva mai mult, descompunerile în ideale prime sunt comutative. Cu acest material am demonstrat în aliniatul 14° că divizibilitatea aditivă implică pe cea multiplicativă. Prin urmare teorema fundamentală este de tip Noether.

Echivalenţa este verificată într'un sens.

Să considerăm acum o aritmetică cu teoremă fundamentală (unicitate necomutativă) de tip Noether.

Cu cererea prealabilă I am putut arăta în aliniatul 31° că o astfel de aritmetică satisface axiomele 1') + 2 + 3. Să arătăm că satisface chiar axioma 1.

Fie lanţul veritabil ascendent de ideale drepte conţinătoare de unităţi $\varepsilon \to E$

$$\ldots > A_i \ldots > A_2 > A_1 . \tag{1}$$

Este clar că produsele de module $A_i O$ sunt ideale. Intr'adevăr, un astfel de produs AO este evident O-modul drept. Este şi O-modul stâng, deoarece O este O-modul bilateral. Din $A \subset O$ urmează că $AO \subset O^2 \subset O$. Ca atare, AO este ideal bilateral. Prin ipoteză însă, $\varepsilon \to A$, cu $\varepsilon \to E$. Cum O are element-unitate, conchidem că $\varepsilon \to AO$.

In definitiv AO este ideal.

Din (1) obţinem

$$\ldots \supset A_i O \ldots \supset A_2 O \supset OA.$$

Conform celor arătate, avem în (2) un lanţ ascendent de ideale. Insă axioma 1') este verificată (aliniatul 31°), prin urmare lanţul (2) se rupe în finit.

Există aşa dar un indice k astfel încât pentru orice întreg naturul h să avem

$$A_{k+h} O = A_k O.$$

unde $A_{k+h} \supset A_k$. In virtutea cererii prealabile II urmează că

$$A_{k+h} = A_k .$$

Deci lanţul (1) se rupe în finit. Axioma 1 este verificată.

Observaţie. Descompunerile teoremei fundamentale din enunţ nu sunt presupuse permutabile. Dar prin chiar faptul teoremei de echivalare, comutativitatea rezultă *a posteriori* (aliniatul 20°).

33°. *Construirea cadrului prealabil* I + II

T e o r e m ă. *Fie E un semigrup central de nondivizori ai lui zero din inelul cu element-unitate O. Infăşurarea inelară $H \supset O$ a lui O in inelul câturilor mod E satisface dela sine cererea prealabilă I. Dacă O este un $\mathcal{C}$-modul drept finit peste un subinel $\mathcal{C}$ cu limitare maximală pentru idealele drepte, cererea prealabilă II poate fi şi ea omisă.*

Demonstraţie. Fie M un O-modul finit drept, în acelaşi timp inel, cu $M \supset O$. El este de forma

$$M = o_1 \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} + o_2 \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} + \ldots o_n \frac{\lambda_n}{\varepsilon_n}, \qquad \begin{pmatrix} o_i \in O, \\ \lambda_i \to O, \quad \varepsilon_i \to E \end{pmatrix}.$$

Dar ε_i sunt în centrul lui O, deci al lui H (inel al câturilor mod. E). Prin urmare (1) devine

$$M = \eta\,(o_1\,\mu_1 + o_2\,\mu_2 + \ldots o_n\,\mu_n) = \eta J \tag{2}$$

$$\eta = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)^{-1}, \quad \mu_i = \lambda_i\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}\,\varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_n, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2'}$$

Evident

$$J = o_1\,\mu_1 + O_2\,\mu_2 + \ldots O_n\,\mu_n \tag{3}$$

este ideal drept.

Să introducem condiţiile: M inel şi $M \supset O$. Din (2) rezultă

$$\eta J \supset O; \tag{4}$$

iar din faptul că M este inel, cu $M \supset O$,

$$MO \subset M, \quad \therefore \quad \eta JO \subset \eta J.$$

Simplificând aici cu η obţinem

$$JO \subset J, \tag{5}$$

Citim pe (5) că J este ideal stâng. In definitiv, un ideal bilateral.

Din (2') rezultă

$$\eta^{-1} \to E \tag{6}$$

iar din (4) şi din faptul că O are element-unitate

$$\eta^{-1} \to J. \tag{6'}$$

Relaţiile (6) şi (6') arată că J este ideal. Avem deci, din (2), reprezentarea

$$M = \eta J,$$

unde η, conform lui (2'), face parte din grupul unităţilor lui H.

Deci cererea prealabilă I este verificată.

Dacă O este $\mathcal{C}$-modul drept finit peste subinelul $\mathcal{C}$ cu limitare maximală pentru idealele drepte, conform teoremei bazei, O satisface axioma 1. Insă cererea prealabilă II a fost introdusă în aliniatul 32° tocmai pentru a realiza pe 1 prin mijlocirea lui 1'). Dar, în cazul de faţă, 1 este realizată pe altă cale. Menţinerea cererii prealabile II este de prisos.

Putem enunţa deci *teorema de echivalare* pentru înfăşurările în inelul câturilor H, specializarea teoremei din aliniatul 32°.

Teoremă. *În cadrul inelelor O, în acelaşi timp $\mathcal{C}$-module drepte finite peste un inel $\mathcal{C}$ cu limitare maximală pentru idealele drepte, şi faţă de un semigrup central E de nondivizori ai lui zero rezultă:*

Aritmeticile complete şi aritmeticile în care orice ideal $A < O$ admite descompuneri necomutativ-unice, de tip Noether, sunt identice.

In sfârşit o ultimă *teoremă de echivalare* pentru ordinele intrinsece din algebre.

Teoremă. *Fie H o algebră peste corpul câturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu teorie clasică a idealelor. Cadrul îl formează inelele O, astfel încât $O \cap k = \mathcal{C}$. Semigrupul caracteristic este fixat la $E = (\mathcal{C} - 0)$.*

In aceste condiţii, aritmeticile complete relative la corpul câturilor mod E şi aritmeticile în care orice ideal $A < O$ admite descompuneri necomutativ-unice, de tip Noether, se acoperă.

Demonstrație. Într'adevăr, dacă aritmetica este completă, descompunerile există și sunt chiar comutativ-unice și de tip Noether (aliniatele 20° și 14°). Acum, reciproc; în virtutea teoremei din aliniatul 27°, inelele O din enunț sunt cu limitare maximală pentru idealele drepte. Deci cererea prealabilă II cade. Fiind vorba de înfășurarea în inelul câturilor mod $(\mathcal{C} - 0)$, cererea prealabilă I este satisfăcută (a se vedea mai sus). Conform teoremei din aliniatul 32°, dacă există descompuneri necomutativ-unice și de tip Noether, aritmetica este completă *.

34°. *Algebre cu ordine de bază minimală*

Fie H o algebră de gradul n peste corpul câturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu element-unitate. Elementul-unitate al lui $\mathcal{C}$ este operatorul 1 al lui H.

Introducem următoarea axiomă a lui Artin, a cărei formalizare coincide cu axioma II a aritmeticilor regulate ale lui Chevalley (inutilă, cum am văzut, pentru construirea teoremei fundamentale):

Axioma A. Dacă $O \supset \mathcal{C}$ este un ordin primitiv (conține o bază a lui H) extrinsec al algebrei H, orice număr $x \in H$ admite o reprezentare

$$x = \sigma/c \quad (o \to O; \quad c \to (\mathcal{C} - 0)).$$

Demonstrăm această lemă, dată de E. Artin pentru $\mathcal{C}$ = inelul numerelor întregi.

Lemă. *Numerele $o \in O$ ale unui ordin primitiv $O \supset \mathcal{C}$, extrinsec, din algebra H, admit reprezentarea*

$$o = \frac{c_1}{c}\omega_1 + \frac{c_2}{c}\omega_2 \ldots \frac{c_n}{c}\omega_n, \tag{1}$$

unde $c \to (\mathcal{C} - 0)$ este un numitor fix, unde $c_i \to \mathcal{C}$ sunt numărători nu numaidecât *arbitrar luați în $\mathcal{C}$ și unde*

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \to O$$

reprezintă o bază a lui H din O.

Demonstrație. Dacă $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ este o bază a algebrei H, avem

$$o = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \ldots k_n\varepsilon_n \qquad (k_i \to k). \tag{2}$$

Însă, în virtutea axiomei A, putem scrie

$$\varepsilon_i = \frac{\omega_i}{c^{(i)}} \qquad (\omega_i \to O; \quad c^{(i)} \to (\mathcal{C} - 0), \tag{3}$$

încât (2) devine

$$o = k_1'\omega_1 + k_2'\omega_2 + \ldots k_n'\omega_n. \tag{4}$$

Pe de altă parte, ordinul extrinsec $O \supset \mathcal{C}$ este $\mathcal{C}$-modul finit

$$o = c_1' o_1 + c_2' o_2 + \ldots c_m' o_m, \qquad (o_i \to O; \quad c_i' \to \mathcal{C}). \tag{5}$$

Dar, în virtutea lui (2), avem (sumă einsteiniană)

$$o_j = k_{ij}'\omega_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n; \qquad j = 1, 2, \ldots m). \tag{6}$$

*) Teorema generalizează pe aceea a lui *K. Henke*, *Hamburger* Abh. 11_{3-4}, pg. 324 relativă la ordinele unei algebre semisimple de caracteristică $p = 0$.

Din (5) şi (6) rezultă (sumă einsteiniană)

$$o = c_j' k_{ij}' \omega_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots m). \tag{7}$$

Fie $c \to (\mathcal{C} - 0)$ un numitor comun al celor mn numere k_{ij}' din corpul câturilor lui $\mathcal{C}$. Expresia (7) devine

$$o = \frac{c_i}{c} \omega_i, \qquad (c_i \to \mathcal{C};\ i = 1, 2, \ldots n). \tag{8}$$

Citim însă, pe (3), că $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sunt n numere din O liniar-independente faţă de k, odată cu elementele $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ale bazei lui H. Această observaţie şi formula (8) demonstrează complet lema.

Cu ajutorul acestei leme putem stabili o primă teoremă de construire a unei algebre în care ordinele extrinsece admit bază minimală.

Teorema este clasică pentru corpurile de numere algebrice. Pentru extinderile algebrice finite peste corpul câturilor unui inel cu ideal principal a fost stabilită de E. N o e t h e r. Pentru *algebrele semisimple* cu $\mathcal{C}$ = inelul întregilor raţionali se găseşte enunţată fără demonstraţie, invocându-se analogia cu corpurile de numere algebrice, la E. A r t i n. Demonstraţia noastră nu foloseşte schema demonstraţiei teoremei corespunzătoare din corpurile de numere algebrice [12], [14]. *Ea nu presupune semisimplicitatea algebrei H.*

T e o r e m ă. *Dacă H este o algebră peste corpul câturilor k al unui inel cu ideal principal $\mathcal{C}$, ordinele primitive extrinsece O ale lui H admit bază minimală.*

Demonstraţie. In virtutea lemei precedente un element $o \in O$ admite reprezentarea (1), cu numitor c fix.

Mulţimea elementelor cu $c_n \neq 0$, nu este deşartă, deoarece $\frac{c}{c} \omega_n = \omega_n$. Se vede uşor că totalitatea numărătorilor c_n completată cu zero formează un ideal (γ_n) al inelului cu ideal principal $\mathcal{C}$. Avem în special pentru c_n din (1).

$$\begin{aligned} &c_n = c^{(n)} \gamma_n \qquad (c^{(n)} \to \mathcal{C}), \\ &\gamma_n \neq 0 \qquad (\gamma_n \to \mathcal{C}). \end{aligned} \tag{9}$$

Insemnăm cu $\omega^{(n)}$ un element din O ce realizează pe γ_n ca numărător c_n în (1); obţinem

$$o_1 = o - c^{(n)} \omega^{(n)} = \frac{c_1^{(1)}}{c} \omega_1 + \frac{c_2^{(1)}}{c} \omega_2 + \ldots \frac{c_{n-1}^{(1)}}{c} \omega_{n-1}, \tag{9'}$$

unde, evident, $o_1 \to O$.

Mulţimea elementelor de forma o_1 din O, pentru care $c_{n-1}^1 \neq 0$, nu este deşartă, deoarece avem $\omega_{n-1} = \frac{c}{c} \omega_{n-1}$. Deci, totalitatea numărătorilor $c_{n-1}^{(1)}$ completată cu zero formează un ideal (γ_{n-1}) nenul al lui $\mathcal{C}$. Avem deci

$$\begin{aligned} &c_{n-1}^{(1)} = c^{(n-1)} \gamma_{n-1}, \qquad (c^{(n-1)} \to \mathcal{C}), \\ &\gamma_{n-1} \neq 0, \qquad (\gamma_{n-1} \to \mathcal{C}). \end{aligned} \tag{10}$$

Fie $\omega^{(n-1)}$ numărul o_1 care realizează pe γ_{n-1} ca numărător $c_{n-1}^{(1)}$. Obţinem

$$o_2 = o - c^{(n-1)} \omega^{(n-1)} - c^{(n)} \omega^{(n)} = \frac{c_1^{(2)}}{c} \omega_1 + \frac{c_2^{(2)}}{c} \omega_2 + \ldots \frac{c_{n-2}^{(2)}}{c} \omega_{n-2}, \tag{10'}$$

$$(o_1 \to O).$$

Iterând, găsim în cele din urmă

$$o_n = o - c^{(2)}\omega^{(2)} - \ldots c^{(n-1)}\omega^{(n-1)} - c^{(n)}\omega^{(n)} = \frac{c_1^{(n-1)}}{c}\omega_1. \tag{11}$$

Recunoaştem, ca mai sus, că mulţimea numărătorilor $c_1^{(n-1)} \neq 0$ pentru numerele o_n de forma (11′) nu este deşartă, deoarece $\omega_1 = \frac{c}{c}\omega_1$. Prin urmare, totalitatea numărătorilor $c_1^{(n-1)}$ completaţi cu zero formează un ideal nenul (γ_1) al lui $\mathcal{C}$.

Avem

$$\begin{aligned} &c_1^{(n-1)} = c^{(1)}\gamma_1, \quad (c^{(1)} \to \mathcal{C}), \\ &\gamma_1 \neq 0, \qquad\qquad (\gamma_1 \to \mathcal{C}). \end{aligned} \tag{11′}$$

Punem

$$\frac{\gamma_1}{c}\omega_1 = \omega^{(1)}.$$

Cu aceasta o din (11) devine

$$\begin{aligned} &o = c^{(1)}\omega^{(1)} + c^{(2)}\omega^{(2)} + \ldots c^{(n)}\omega^{(n)}, \qquad (o \to O), \\ &c^{(i)} \to \mathcal{C}, \qquad \omega^{(i)} \to O, \end{aligned} \tag{12}$$

unde elementele $\omega^{(i)}$ sunt de forma (coeficienţii care nu interesează sunt arătaţi printr'o stea)

$$\omega^{(n)} = \omega_1 + {}^{*}\omega_2 + \cdots \omega_{n-1} + \frac{\gamma_n}{c}\omega_n,$$

$$\omega^{(n-1)} = {}^{*}\omega_1 + {}^{*}\omega_2 + \cdots \frac{\gamma_{n-1}}{c}\omega_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega^{(2)} = {}^{*}\omega_1 + \frac{\gamma_2}{c}\omega_2,$$

$$\omega^{(1)} = \frac{\gamma_1}{c}\omega_1.$$

Determinantul matricei care transformă vectorul $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ în vectorul $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(n)}$ este egal cu

$$\frac{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}{c^n}$$

şi deci, în virtutea lui (9), (10) ... (11), diferit de zero.

Prin urmare, avem în (12) o reprezentare liniară a ordinului O peste $\mathcal{C}$ cu ajutorul unei *baze* $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(n)}$ a lui H, conţinută în O. Cum $O \supset \mathcal{C}$, este clar că în (12) coeficienţii $c^{(i)}$ pot fi presupuşi arbitrari în $\mathcal{C}$.

Citim pe (12) că O admite o bază minimală peste $\mathcal{C}$. Cu aceasta totul este demonstrat.

35°. *Inele cu ideal quasi-principal. A doua construcţie de algebre cu ordine de bază minimală.*

Inelele cu ideal principal au teorie clasică a idealelor (în mod banal). Importă pentru materia ultimelor aliniate să dăm o construcție de algebre cu ordine cu bază minimală, dar al căror inel inițial $\mathcal{C}$ să nu aibă numaidecât teorie clasică a idealelor.

Este clar că o algebră cu element-unitate conține ordine extrinsece cu bază minimală, dar banale. Într'adevăr, dacă θ este un element al lui H cu ecuație minimă de gradul n cu coeficienții în $\mathcal{C}$ — dintre care primul egal cu 1 — -modulul finit $(\theta^{n-1}, \theta^{n-2}, \ldots \theta, 1)$ este un ordin cu bază minimală. Însă acest ordin este izomorf cu ordinul unei extinderi algebrice finite când polinomul $P_n[\theta]$ este ireductibil, anume cu un ordin regulat, al lui Dedekind.

Ne interesează ordinele necomutative cu bază minimală, ale algebrei. Aprofundând tehnica demonstrației existenței bazei minimale în corpurile de numere algebrice [12], [14], am reușit să construim algebre care admit, pentru anume ordine pe care le-am numit *închise*, o astfel de bază.

Să introducem deocamdată

Definiția inelelor cu ideal quasi-principal. *Un domeniu de integritate $\mathcal{C}$ cu element-unitate îl numim inel cu ideal quasi-principal, când următoarele patru axiome sunt satisfăcute:*

1^{ω}. *Toate elementele $c \in (\mathcal{C} - 0)$ admit o valorificare peste o semistructură $\Sigma^{\cap}$ relativă la secțiune $|c| \to \Sigma^{\cap}$. (Dacă — așa cum vom face — renunțăm să construim valorile minimale ale discriminantului cu axioma lui Zorn, mulțimea $\Sigma^{\cap}$ poate fi presupusă numai mulțime parțial ordonată).*

2^{ω}. *Dacă în $\mathcal{C}$ elementul $b \neq 0$ nu divide pe a, există atunci două elemente α, $\beta \to \mathcal{C}$ astfel încât*

$$|\alpha a + \beta b| < |b|.$$

3^{ω}. *Ordinea parțială din $\Sigma^{\cap}$ a valorilor este monotonă față de înmulțirea în $\mathcal{C}$. Aceasta înseamnă că*

$$|a| > |b| \qquad (a, b \to (\mathcal{C} - o)),$$

implică

$$|ca| > |cb|.$$

4^{ω}. Dacă

$$|a'b'| = |a''b''|$$
$$|a'| < |a''|$$

atunci

$$|b'| > |b''|.$$

Comparând cu criteriul Hasse-Dedekind al inelelor cu ideal principal, conchidem că avem de a face cu o considerabilă slăbire a acestora: lanțurile descendente de valori nu sunt obligatoriu închise.

Să definim acum ordinele închise ale unei algebre.

Fie $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ baza algebrei H cu element-unitate peste corpul k al câturilor domeniului de integritate $\mathcal{C}$. Amintim că, punând

$$x(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = (\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) M, \qquad (x \in H), \qquad (1)$$

unde M este matricea care dă transformarea vectorului $(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ după înmulțirea cu x (așa dar, matricea de ordinul n peste k), obținem o repezentare izomorfă a algebrei H peste un inel de matrice (M) de ordinul n cu coeficienții în k.

Se numește *urmă* $S(x)$ a lui $x \in H$ urma $S(M)$ a matricei corespunzătoare prin izomorfismul (1).

Dacă O este un ordin extrinsec şi dacă axioma A din aliniatul precedent este satisfăcută, rezultă, în virtutea lemei din acelaşi aliniat, că matricea M corespunzătoare unui element $o \in O$ are coeficienţii fracţiuni din k de acelaşi numitor c. Deci $S(o)$ este o fracţiune de aceeaşi formă.

Definiţie. *Un ordin extrinsec se numeşte* închis *dacă urmele $S(o)$ ale elementelor sale se găsesc toate în $\mathcal{C}$ şi dacă mulţimea valorilor discriminanţilor *) admite valori minimale faţă de ordinea parţială din $\Sigma^{\cap}$.*

(Dacă H este o extindere algebrică finită iar $\mathcal{C}$ este închis aritmetic, se ştie că urmele $S(o)$ ale elementelor oricărui ordin O sunt valorificate în $\mathcal{C}$).

Demonstrăm această

Teoremă A. *Un ordin O (extrinesc) închis al unei algebre semisimple H peste corpul căturilor k al unui inel cu ideal quasi-principal $\mathcal{C}$ admite bază minimală.*

Demonstraţie. Conform lemei din aliniatul precedent, există în O o bază liniară $(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ a algebrei H de gradul n, cu ajutorul căreia elementele din O se reprezintă cu numitor fix c.

Considerăm mulţimea tuturor bazelor de acest fel şi discriminanţii (determinanţii formaţi din urmele produselor $\omega_i \omega_j$) corespunzători

$$D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = |\, S(\omega_i \omega_j)\,|. \tag{2}$$

Cum H este algebră semisimplă, în virtutea unei teoreme a lui Dickson (a cărei conclusie o putem lua aici ca nouă ipoteză) urmează

$$D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \neq 0.$$

Pe de altă parte, ordinul O fiind închis, urmează că

$$S(\omega_i \omega_j) \to \mathcal{C}$$

şi deci

$$D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \to (\mathcal{C} - 0).$$

Aşa dar, putem vorbi de mulţimea valorilor tuturor discriminanţilor consideraţi

$$|\, D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)\,|. \tag{3}$$

In virtutea definiţiei ordinelor extrinsece închise, mulţimea (3) conţine cel puţin o valoare minimală.

Presupunem că baza $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n)$ realizează o astfel de valoare minimală. Afirmăm că în reprezentarea

$$o = \frac{c_1}{c}\omega_1 + \frac{c_2}{c}\omega_2 \ldots \frac{c_n}{c}\omega_n, \tag{4}$$

dată de lema din aliniatul 34° pentru elementele $o \in O$, numitorul c divide în $\mathcal{C}$ toţi numărătorii c_i.

Presupunem, prin absurd, că de exemplu c_1 nu s'ar divide cu c. Avem în virtutea axiomei 2^{ω} a inelelor cu ideal quasi-principal

$$|\gamma_1| < |c|, \qquad (\gamma_1 \to (\mathcal{C} - 0)), \tag{5}$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 c + \alpha c, \qquad (\alpha, \alpha_1 \to \mathcal{C}). \tag{5'}$$

*) Pentru definiţia discriminantului a se vedea formula (2).

Din (4) şi (5′) deducem

$$\omega_1^* = \alpha_1 o + \alpha\omega_1 = \frac{\gamma_1}{c}\omega_1 + \frac{c_2'}{c}\omega_2 + \ldots \frac{c_n'}{c}\omega_n \quad (c_i' \to \mathcal{C}). \tag{6}$$

Este clar că

$$\omega_1^* \to O. \tag{6'}$$

In (6) punem, pentru prescurtare,

$$\omega_1^* = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots k_n\omega_n, \qquad \left(k_1 = \frac{\gamma_1}{c}\right) \tag{7}$$

Izomorfismul $H \rightleftarrows (M)$ din (1) justifică formula $S(ax) = aS(x)$ cu $a \in \mathcal{C}$, $x \in H$. Avem deci (sume einsteiniene !)

$$D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n) = \begin{vmatrix} k_i k_j S(\omega_i\omega_j) & k_i S(\omega_i\omega_2) \ldots & k_i S(\omega_i\omega_n) \\ k_i S(\omega_2\omega_i) & S(\omega_2\omega_2) \ldots & S(\omega_2\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_i S(\omega_n\omega_i) & S(\omega_n\omega_2) \ldots & S(\omega_n\omega_n) \end{vmatrix}.$$

De aici, prin scăderi de coloane, respectiv linii, înmulţite cu $k_2, k_3 \ldots k_n$, din coloana, respectiv linia, întâia rezultă

$$D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n) = \begin{vmatrix} k_1^2 S(\omega_1\omega_1) & k_1 S(\omega_1\omega_2) \ldots & k_1 S(\omega_1\omega_n) \\ k_1 S(\omega_2\omega_1) & S(\omega_2\omega_2) \ldots & S(\omega_2\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 S(\omega_n\omega_1) & S(\omega_n\omega_2) \ldots & S(\omega_n\omega_n) \end{vmatrix}.$$

$$\therefore D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n) = k_1^2 D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \tag{8}$$

Cum $k_1^2 \neq 0$, — (7), (6) şi (5), — conchidem că $\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n$ este încă o bază lineară a lui H conţinută în O. Ca atare, ordinul O fiind închis, urmează că $D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n)$ este valorificat în $(\mathcal{C} - 0)$ şi deci admite o valoare în $\Sigma^{\cap}$.

Din (7) şi (8) urmează că

$$c^2 D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n) = \gamma_1^2 D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

şi trecând la valori

$$|c^2 D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n)| = |\gamma_1^2 D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)|. \tag{9}$$

Dar, din (5), aplicând axioma 3^{ω}, urmează succesiv

$$|\gamma_1 c| < |c^2|, \qquad |\gamma_1^2| < |\gamma_1 c|,$$
$$\therefore |\gamma_1^2| < |c^2|. \tag{10}$$

Din (9) şi (10), cu aplicarea axiomei 4^{ω}, rezultă

$$|D(\omega_1^*, \omega_2, \ldots \omega_n)| < |D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)|$$

împotriva minimalităţii lui $|D(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)|$.

Este deci dovedit, indirect, că c divide pe c_1. La fel se arată că c divide toți numărătorii c_i^*, $(i = 1, 2, \ldots n)$ din (3). Ca atare, expresia lui o din (3) devine

$$o = c_1^* \omega_1 + c_2^* \omega_2 + \ldots c_n^* \omega_n \qquad (c_i^* \to \mathcal{C}). \tag{11}$$

Cum $O \supset \mathcal{C}$ iar $\omega_i \to O$, este clar că în (11) putem lua

$$c_i^* \in \mathcal{C}. \tag{11'}$$

Ținând seama că $(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ sunt linear-independenți peste k, citim pe (11), (11'), că O admite baza minimală peste $\mathcal{C}$.

Cu aceasta totul este demonstrat.

Observație. Ca în algebrele semisimple ale lui Artin, peste inelul $\mathcal{C}$ al întregilor raționali, se poate arăta și pentru algebrele H, de mai sus, că admit cel puțin un ordin extrinsec maximal. Demonstrația are nevoie de postularea închiderii tuturor ordinelor extrinsece și folosește formula de transformare a discriminantului la o schimbare a bazei. Dacă $\mathcal{C}$ este inel cu ideal principal, nu este nevoie de nicio nouă cerere (alineatul 34°).

36°. *Transferarea, în algebre, a teoremei fundamentale; dela ordin, la inelul de începere. Inversarea teoremei lui E. Noether.*

Teorema 2 din alineatul 30° și ultima teoremă din aliniatul 33° arată că o teorie clasică a idealelor în inelul de începere $\mathcal{C}$ al unei algebre construește anumite axiome ale aritmeticilor complete în unele din subinelele algebrei.

Ne putem întreba dacă există un cadru în care condiția necesară și suficientă pentru o teoremă fundamentală în ordinele maximale ale algebrei să fie existența unei teorii clasice a idealelor în $\mathcal{C}$.

Fie H o algebră cu element-unitate peste corpul câturilor k al domeniului de integritate $\mathcal{C}$ (cu element-unitate).

Răspunsul la întrebarea formulată mai sus este dat de următoarea

T e o r e m ă. *Condiția necesară pentru ca un ordin extrinsec $O \supset \mathcal{C}$ cu bază minimală, al algebrei H, să aibă o aritmetică completă este, ca în $\mathcal{C}$ să stăpânească o teorie clasică a idealelor.*

*Reciproc, dacă în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor, atunci orice ordin maximal extrinsec *), O admite o aritmetică completă.*

Aici semigrupul caracteristic E trebue luat egal cu $(\mathcal{C} - 0)$.

Demonstrație. Teorema, în partea ei reciprocă, se verifică imediat. Dacă O este ordin extrinsesc (așa dar $\mathcal{C}$- modul finit), rezultă cu limitare maximală pentru idealele drepte, deoarece în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor și deci limitare maximală pentru ideale (se aplică teorema bazei). Dacă O este ordin intrinsec, cu $O \cap k = \mathcal{C}$, concluzia nu se schimbă în virtutea teoremei din aliniatul 27°. Mai departe, O fiind ordin extrinsesc, iar în $\mathcal{C}$ implicația «prim→ nedivizibil» verificându-se, această implicație are loc și în O, conform teoremei din aliniatul 29°, pentru idealele prime-tari. In sfârșit, ordinele maximale extrinsece sunt și intrinsece (a se vedea demonstrația teoremei 1 din alineatul 30°). Cu aceasta și celelalte două axiome 2 și 3 ale aritmeticilor complete sunt verificate în O. Ținând seamă că $E = (\mathcal{C} - 0)$, conchidem că O admite o aritmetică completă.

---

*) La reciprocă nu este nevoie de minimalitatea bazei.

Să trecem la demonstrarea părţii directe a teoremei.

Fie $m' > m''$ două ideale din $\mathcal{C}$ în înfăşurare tare. Presupunem $m'' > (0)$. Avem în Om' şi Om'' două ideale ale lui O.

Intr'adevăr, dacă m este unul din idealele m', m'', este clar că $Om = mO$, deci Om este O-modul bilateral. Dar $Om \subset O$ deoarece $m \subset \mathcal{C} \subset O$, aşa dar Om este ideal bilateral. Cum O are element-unitate, urmează că $Om \supset m$, $m \subset (\mathcal{C} - 0)$. Deci, Om conţine elemente ale semigrupului caracteristic. In definitiv Om este ideal al lui O.

Dar O este $\mathcal{C}$-modul finit cu bază minimală. Evident *), componentele lui Om se găsesc în m şi pot fi presupuse arbitrar luate în m. Deci, submodulul lui O, obţinut limitând componentele lui O la elemente arbitrar luate în m, este un ideal din O, anume idealul Om.

Dar $m' > m''$. Baza liniară a lui O peste $\mathcal{C}$ fiind, prin ipoteză, minimală, există în $0m'$, potrivit celor spuse, cel puţin un element mai mult ca în $0m''$: este elementul ale cărui componente sunt luate din complementul topologic $m' - m''$.

Conchidem că $m' > m''$ implică $Om' > Om''$.

Să admitem că în O avem o aritmetică completă; aşa dar axioma 1 (este de ajuns forma ei mai slabă 1') se verifică. In acest caz, orice lanţ veritabil ascendent infinit

$$m_1 < m_2 < \ldots m_i < \ldots$$

de ideale din $\mathcal{C}$ dă naştere la un lanţ veritabil ascendent, infinit, de ideale bilaterale (deci drepte) din O, conţinătoare de elemente $m_1 \to (\mathcal{C} - 0)$, adică

$$Om_1 < Om_2 < \ldots Om_i < \ldots$$

ceea ce este imposibil. Prin urmare, axioma 1 se verifică şi pentru $\mathcal{C}$.

Să trecem la axioma 2.

Fie p un ideal prim în înţelesul obişnuit din $\mathcal{C}$. Avem în $\frac{O}{Op}$ un modul finit peste $\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op}$. Teorema Noether-Dedekind ne dă

$$\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} \cap Op}. \tag{1}$$

Să însemnăm cu 1 elementul-unitate din O. Orice element $c \in \mathcal{C}$ are, în baza lui O, descompunerea $c1$ mijlocită de descompunerea lui 1. Baza fiind minimală, reprezentarea $c1$ a lui c în O este unică.

Am arătat mai sus că idealul Op este identic cu submodulul lui O, ale cărui componente sunt luate arbitrar din p. Pe de altă parte, conform observaţiei de mai sus, totalitatea elementelor lui Op situate în $\mathcal{C}$ sunt date de $p1$, unde p stă pentru un element arbitrar din p. Ca atare

$$\mathcal{C} \cap Op = p \cdot 1 = p.$$

*) Un element $x \in Om$ este de forma $x = \sum o_h m_h$ cu $o_h \to O$, $m_h \to m$. Deci $x = \sum c_{ih} m_h \omega_i$. Pe de altă parte, avem $x = c_i \omega_i$, $c_i \to \mathcal{C}$. Baza $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ fiind minimală, urmează că $c_i = c_{ih} m_h \to m$. Reciproc, pentru $m_i \in m$, avem $x = \sum m_i \omega_i \to Om$ deoarece $\omega_i \to O$.

Cu aceasta (1) devine

$$\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op} \rightleftarrows \frac{\mathcal{C}}{p} . \tag{2}$$

In definitiv avem în $\frac{O}{Op}$ un modul finit peste domeniul de integritate $\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op}$, izomorful lui $\frac{\mathcal{C}}{p}$.

Am văzut că elementele din Op sunt caracterizate prin proprietatea de a avea componentele în p. Conchidem că în $\frac{O}{Op}$ o relaţie liniară cu coeficienţii în domeniul de integritate $\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op}$ este nulă atunci şi numai atunci când coeficienţii sunt nuli *).

Aşa dar, $\frac{O}{Op}$ admite o bază liniară minimală (formată din elemente liniar-independente faţă de corpul câturilor lui $\frac{\mathcal{C}}{p}$) peste $\frac{\mathcal{C}}{p}$ (sau izomorful său $\frac{\mathcal{C} \cup Op}{Op}$).

Prin ipoteză, O are aritmetică completă. Conform teoremei din aliniatul 20° şi implicaţiei « aditiv → multiplicativ » demonstrată în aliniatul 14°, idealul Op admite un număr finit de ideale (bilaterale) divizori aditivi. Ca atare, $\frac{O}{Op}$ rezultă cu limitare minimală pentru idealele bilaterale.

Recunoaştem întocmai ca mai sus (consecinţă a minimalităţii bazei lui $\frac{O}{Op}$) că, dacă μ este un ideal obişnuit al lui $\frac{\mathcal{C}}{p}$, idealul bilateral $\frac{O}{Op}\mu$ constă din submodulul lui O/Op cu componente luate arbitrar lui μ şi că avem implicaţia

$$\mu' > \mu'',$$

$$\therefore \quad \frac{O}{Op}\mu' > \frac{O}{Op}\mu''.$$

Aşa fiind, $\frac{\mathcal{C}}{p}$ rezultă cu limitare minimală pentru ideale. Intr'adevăr, lanţul veritabil descendent de ideale din $\frac{\mathcal{C}}{p}$

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots \mu_i > \ldots$$

*) Intr'adevăr, $x = \sum_i c_i \omega_i$ cade în Op numai când $c_i \to p \subset Op$, şi reciproc. Deci $\frac{O}{Op}$ admite baza formată de imaginile $\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots \omega_n^*$ în omomorfismul $O \rightarrow O/Op$.

are drept consecinţă lanţul veritabil descendent de ideale bilaterale din O/Op.

$$\frac{O}{Op}\mu_1 > \frac{O}{Op}\mu_2 > \ldots \frac{O}{Op}\mu_i > \ldots,$$

prin urmare se rupe în finit odată cu aceasta.

Ne găsim aşa dar în faţa unui domeniu de integritate nenul ($\mathcal{C} > p$) cu limitare minimală pentru ideale. In virtutea cunoscutei teoreme a lui E. Noether, redemonstrată la sfârşitul aliniatului 29°, conchidem că $\frac{\mathcal{C}}{p}$ este corp.

Deci, idealul prim $p \neq (0)$ din $\mathcal{C}$ este nedivizibil. Axioma 2 este verificată în $\mathcal{C}$.

Să arătăm că inelul $\mathcal{C}$ satisface axioma α a închiderii aritmetice.

Fie θ un întreg din k relativ la $\mathcal{C}$. Am demonstrat mai sus că inelul $\mathcal{C}$ are limitare maximală pentru ideale. Conform unei teoreme cunoscute, θ satisface o ecuaţie de forma

$$\theta^n = c_{n-1}\theta^{n-1} + c_{n-2}\theta^{n-2} + \ldots c_1\theta + c_0 \qquad (c_i \to \mathcal{C}). \tag{3}$$

Considerăm inelul generat în H de complexul $[O, \theta]$

$$O' = (O, \theta). \tag{4}$$

Este clar că avem înfăşurarea

$$O' \supset (1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1})_O, \tag{5}$$

unde membrul al doilea înseamnă O-modulul generat de baza indicată în paranteză.

Reciproc, în virtutea comutativităţii lui θ cu O, un element arbitrar luat în O' este o formaţie polinomială, cu coeficienţii în O şi de argument θ, ce se poate reduce, ţinând seama de (3), la gradul $n - 1$.

Aşa dar, în (5) avem şi înfăşurarea contrară. Conchidem că

$$O' = (1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1})_O.$$

Avem deci în $O' \supset O$ un inel O-modul finit. Insă, potrivit axiomei 3 a aritmeticilor complete, O este ordin maximal intrinsec. Ca atare

$$O' = O$$

şi deci, din (5),

$$\theta \to O.$$

Pe de altă parte,

$$\theta \to k.$$

Aceste două implicaţii dau împreună

$$\theta \to O \cap k. \tag{6}$$

Insă O are, prin ipoteză, bază minimală. Considerând descompunerea lui 1 din O în această bază, este clar că orice element $q \in (O \cap k)$ admite descompunerea $q.1$, iar această descompunere este unică. Pe de altă parte, ca element al lui O, lui $q.1$ îi corespunde o descompunere, în aceeaşi bază, de componente situate în $\mathcal{C}$.

Pentru a preciza, fie $e_1, e_2, \ldots e_n$ componentele lui 1 şi $f_1, f_2, \ldots f_n$ componentele lui $q.1$. Avem, aşa dar, în virtutea minimalităţii bazei lui O peste $\mathcal{C}$,

$$q' e_i = q'' f_i \qquad (e_i, f_i \to \mathcal{C}; \quad q', q'' \to \mathcal{C}), \tag{7}$$

unde am pus

$$q = q' : q'' \qquad (q \in (O \cap k)). \tag{8}$$

Tot în virtutea existenţei bazei minimale a lui O, constantele de structură ale algebrei H sunt în $\mathcal{C}$. Deci, produsul lui 1 cu un număr ξ din O de componente $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, arbitrar luate în $\mathcal{C}$ rezultă un număr $1.\xi$ din O de componente: forme liniare de $e_1, e_2, \ldots e_n$ cu coeficienţii în $\mathcal{C}$.

Dar, evident, $1.\xi = \xi$ are aceleaşi componente (arbitrare) $x_1, x_2, \ldots x_n$ ca mai sus. Luând, de exemplu, pe x_1 egal cu elementul-unitate 1 al lui $\mathcal{C}$, urmează că

$$1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots a_n e_n, \qquad (a_i \to \mathcal{C}). \tag{9}$$

Inmulţind în amândoi membrii din (9) cu q' şi făcând înlocuirile (7), obţinem

$$q' = q'' \sum_1^n a_i f_i$$

sau, ţinând seama de (8)

$$q = \frac{q'}{q''} = \sum_1^n a_i f_i \to \mathcal{C}.$$

Este astfel dovedit că

$$O \cap k \subset \mathcal{C}.$$

Pe de altă parte, incluziunea contrară este evidentă, deoarece $O \supset \mathcal{C}$, $k \supset \mathcal{C}$. In definitiv,

$$O \cap k = \mathcal{C}.$$

Comparând cu (6), conchidem că

$$\theta \to \mathcal{C}.$$

Axioma închiderii aritmetice α se verifică deci în $\mathcal{C}$. Prin urmare $\mathcal{C}$ satisface axiomele $1 + 2 + \alpha$. Aceasta înseamnă că în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor.

Teorema este deci demonstrată.

37°. *Aplicații*

Folosind construcțiile bazei minimale din aliniatele 35° și 36° deducem următoarele teoreme particulare (cu axioma A):

Teorema I. *Intr'o algebră H peste corpul câturilor k al unui inel cu ideal principal $\mathcal{C}$ avem aritmetică completă în orice ordin maximal extrinsec $O \supset \mathcal{C}$ cu $E = (\mathcal{C} - 0)$.*

Teorema II. *Intr'o algebră semisimplă H peste corpul câturilor k al unui inel cu ideal quasi-principal $\mathcal{C}$, avem aritmetică completă într'un ordin (extrinsec) închis $O \supset \mathcal{C}$ numai atunci când în $\mathcal{C}$ stăpânește o teorie clasică a idealelor. Reciproc, dacă în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor, orice ordin maximal extrinsec $O \supset \mathcal{C}$ admite o aritmetică completă pentru $E = \mathcal{C} - 0$ și pentru idealele prime-tari.*

Folosind a doua teoremă de echivalare din aliniatul 33° putem da teoremei generale din aliniatul 36° acest enunț mai semnificativ.

Teorema III. *Intr'un ordin (extrinsec) O, cu bază minimală, al algebrei H peste corpul câturilor k al unui domeniu de integritate $\mathcal{C}$, avem teoremă fundamentală* (de tip Noether, cu unicitate necomutativă) *numai când în $\mathcal{C}$ există teorie clasică a idealelor. Reciproc, dacă în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor, iar O este ordin maximal extrinsec, O admite teoremă fundamentală pentru idealele prime-tari.*

Intr'adevăr, dacă *O* are teorema fundamentală menționată în enunț, conform teoremei de echivalare din aliniatul 33°, aritmetica este completă. Aplicând teorema generală dela începutul aliniatului 36°, conchidem că în $\mathcal{C}$ avem teorie clasică a idealelor. Partea a doua a enunțului rezultă din partea a doua a teoremei dela începutul aliniatului 36° și din aliniatul 20°.

Teorema III are o consecință importantă.

E. Noether a arătat că dacă în $\mathcal{C}$ există teorie clasică a idealelor, atunci și în ordinul principal Ω al oricărei extinderi separabile finite peste corpul *k* al câturilor lui $\mathcal{C}$.

In [9] *) demonstrează că rezultatul lui E. Noether se menține și pentru extinderile inseparabile finite, de caracteristică *p*, dacă «inelul rădăcinilor» $\mathcal{C}\,1/p$ este modul finit peste $\mathcal{C}$. F. K. Schmidt [15] a arătat că această ultimă condiție este esențială.

Ținând seama că Ω admite bază minimală când $\mathcal{C}$ este inel cu ideal quasi-principal (aliniatul 35°), iar Ω închis, putem enunța această *inversare a teoremei lui E. Noether* (ca aplicație a teoremei III):

Teoremă. *Dacă $\mathcal{C}$ este un domeniu de integritate, iar $k\,(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m)$ o extindere finită peste corpul k al câturilor lui $\mathcal{C}$, al cărei inel al tuturor întregilor Ω admite bază minimală* (condiție suficientă: $\mathcal{C}$ inel cu ideal quasi-principal iar Ω închis), *avem în Ω teorie clasică a idealelor numai când în $\mathcal{C}$ stăpânește o astfel de teorie.* Reciproc, dacă în domeniul de integritate $\mathcal{C}$ (nu numai decât cu ideal quasi-principal) avem teoria clasică a idealelor, atunci ordinul principal Ω al oricărei extinderi separabile finite $k\,(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$ sau oricărei extinderi inseparabile finite $k\,(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$ de inel $\mathcal{C}^{1/p}$ modul finit peste $\mathcal{C}$, este de asemenea cu teorie clasică a idealelor.

*) ed. 1, p. 94.

НЕКОММУТАТИВНЫЕ АРИФМЕТИКИ С ИСЧЕРПЫВАЮЩЕЙ ТЕОРИЕЙ ИДЕАЛОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор предлагает абстрактную теорию некоммутативных арифметик по примеру классической теории идеалов — образец любого исчерпывающего математического исследования. Следовательно надо найти гипотезы, обеспечивающие в некоммутативных кольцах существование основной теоремы о разложении любого идеала в коммутативное произведение, определенное только простыми идеалами, и которые были бы логично равносильными этой теореме.

Поскольку известно, существует один очерк Шевалье об абстрактной теории арифметики в системах гиперкомплексных чисел. Она указана в предисловии к его труду об арифметике алгебр матриц (Париж, Герман, 1936), но не является исчерпывающей. Все же она является для автора исходной точкой его исследований.

Таким образом, в § 1 настоящей работы выявляется сущность (очерк Шевалье весьма сжат, почти непонятен) того, что названо Шевалье регулярными арифметиками и далее обобщение этих же арифметик под названием примитивных арифметик. Равным образом расширяется понятие идеала, использованное Шевалье.

Пусть $H \supset O$ — включение двух колец с единичным элементом, вообще некоммутативных, и E -семигруппа единиц H, находящихся в O. Двухсторонний идеал от O, содержащий по меньшей мере единицу, называется просто идеалом. Это понятие является менее релятивским у Шевалье. Семигруппа E будет равна семигруппе всех единиц H, содержащихся в O. Помимо этого требуется, чтобы любой неделитель нуля в кольце O был единицей H.

Аксиомы примитивных арифметик также значительно ослаблены по отношению к четырем аксиомам I + II + III + IV регулярных арифметик Требуется:

1. Условие восходящих цепей для прямых идеалов, содержащих элементы $\varepsilon \to E$.

2. Существование обратного модуля для любого неделимого идеала.

3. Максимальность порядка O в H.

Аксиома I является частью аксиомы III Шевалье.

Аксиома II содержится в аксиоме I.

Аксиома III доказана Шевалье при помощи аксиом I и III. Таким образом аксиомы II и IV не применяются в определении примитивных арифметик.

В рамке 1 + 2 + 3 доказываем основную теорему при помощи 3, что всякий простой идеал неделим, обобщая предварительную теорему Артина, то есть, что всякий идеал с обратным модулем перемещаем со всеми своими простыми неделителями. Доказательство ведется по схеме, данной Ван дер Верденом для классической теории идеалов. (Современная алгебра II, стр. 100, изд. 1 и 2). В этом случае отвлекаемся от индуктивного рассуждения, искаженного из-за преувеличенной краткости.

Таким образом, определяется основная теорема для еще более общих арифметик (предыдущей арифметики) и аксиома I формулируется только для идеалов, аксиома 2 распространяется на все простые идеалы, в то время как аксиома 3 заменена некоторым слабым требованием неделимости простых идеалов (если $P' \supset P''$ — простые, тогда $P'' = P' P_1$ с $P'' = P'' = P_2 P'$ будут простыми или равными O).

Замечательным явлением этих предыдущих арифметик является то, что без влечения «простой неделимый» можно все же установить основную теорему по отношению к разложению неделимых идеалов.

Примитивные арифметики являются еще слишком общими для того, чтобы быть исчерпывающими. Все же удалось выделить два вида, обладающие этим свойством и являющиеся замечательными во многих отношениях — замкнутые и полные арифметики.

Первые являются истинными некоммутативными аналогами классических арифметик, соответствующими сферам целостности и точно также определяются с помощью теоремы арифметической замкнутости. В аксиомы второго вида включается максимальность порядка.

В § 2 рассматриваются замкнутые арифметики.

Пусть O кольцо, обладающее семигруппой E неделителей нуля, взятых в центре O. Вводим, опираясь на классический вывод поля частных, которые можно назвать кольцом $H \supset O$ частных $O \bmod E$, строя абстрактные частные $\frac{a}{\varepsilon}$ с $a \in O$, $\varepsilon \in E$.

Приводим аксиомы замкнутых арифметик:

$\bar{\alpha}_1$. Любой элемент $\eta \to Z$, взятый в центре Z, принадлежащем H с $\eta^i \to O\,\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \to E$ для всех $i = 1, 2, \ldots n, \ldots$, принадлежит O.

α_2. Максимальное условие цепных идеалов удовлетворено.

α_3. Влечение «простой → неделимый» для идеалов удовлетворено.

Доказываем, что замкнутые арифметики включены в предыдущие арифметики и в качестве таковых допускают основную теорему.

Исчерпывающая теория Эмми Нозера не действительна для всех коммутативных колец, а действительна только для колец целостности. Аналогично выводим то, что можно назвать аксиомой полуцелостности α_0.

Множество O имеет большую мощность, чем $(O - E)$.

Можно даже ослабить α_0 до α_1, Кольцо O допускает алгоритм Евклида $\bmod E$.

Это означает, что для всякого $a \in O$, $\varepsilon \in E$ существует $b \to O$, $\eta \to E$ так, что $a = b\varepsilon + \eta$.

В рамках предварительных аксиом α_0, соответственно α_0' может ослабить $\bar{\alpha}_1$, до высказывания α_1, вытекающего из $\bar{\alpha}_1$, ограничивая элементы η элементами, содержащимися в мультипликативной группе (E), образующейся E в H. Другими словами, беря (E) вместо Z в определении замкнутых арифметик, указанных выше.

Доказывается, что в рамках $\alpha_0' + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ основная теорема является еще справедливой.

Условимся говорить, что разложение идеалов $A < O$ в произведении простых идеалов квазиуникально, если размеры и существенные факторы (кроме их повторений) остаются такими же для всех этих разложений A.

Условимся еще говорить, что разложение типа Нозера тогда, когда для $A \supset B$ существует идеал C так, что равенство

$$A = BC$$

становится тождеством при замене идеалов A, B, C соответствующими разложениями.

Тогда можем доказать следующую исчерпывающую теорему:

В рамках α_0 (соответственно α_0') и для полной семигруппы $E : E = (E) \cap O$ замкнутые арифметики и арифметики, допускающие основную теорему типа Нозера с квази-единством тождественны.

В дальнейшем следует, что разложения перемещаемы, а квази-единство будет в конечном счете истинным единством.

Становится очевидным, что здесь имеет место настоящая перестановка классической теории Эмми Нозера в неокоммутативную.

Возвращаясь к арифметикам $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ и ограничиваясь коммутативными идеалами O приходим к основной теореме для идеалов с делителями нуля, изложенной без доказательства Ван дер Верденом (M. Алгебра II, стр. 100). Но теорема, указанная выше одновременно показывает какими являются приближенные гипотезы и изменения, необходимые, чтобы теория идеалов в таких кольцах становилась исчерпывающей.

В § 3 вводим полные арифметики.

Пусть $H \supset O$ — включение двух колец с элементом-единицей.

Положим, что характеристическая семигруппа E образована из единиц, перемещаемых с O.

$$O\,\varepsilon \subset \varepsilon\,O \quad , \quad \varepsilon \in E.$$

Определение полных арифметик производится с помощью трех аксиом при строгой аналогии с аксиомами классической теории идеалов;

1. Максимальное условие для цепных прямых идеалов, содержащих элемент $\varepsilon \to E$.

2. Влечение «простой → неделимый».

3. Максимальность порядка O в H. Согласно общим чертам выводов Артина из арифметики гиперкомплексных чисел доказываем, что полные арифметики суть примитивные арифметики (a posteriori следует даже тождество полных арифметик с примитивными арифметиками характеристической группы E, заменяемой видом (1) в O). Приходим к заключению, что полные арифметики обладают основной теоремой.

Помимо того, доказываем, что основную теорему можно еще доказать аксиомой, с более слабым условием $\tilde{1}$, изложенной лишь для идеалов, но с заменой условия 3 максимального порядка требованием арифметической замкнутости.

α. Если $\varkappa \to H$ с $\varkappa^i \to O\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \to E$ для всех целых и положительных i, тогда $\varkappa \to O$. В § 5 будет установлено это свойство для полных арифметик в определенной форме.

В § 4 дано построение аксиом 1 и 2 полных арифметик.

Предлагаем строение аксиомы 1, обобщающей весьма скрытый результат X. Грелля и формулированной им для возможно неотделимых расширений финитной степени коммутативного тела. Распространяем его на некоммутативные кольца следующим образом:

Пусть H есть алгебра с элементом-единицей и полем K, полем частных сферы целостности, где имеет место классическая теория идеалов. Берем $E = (C - 0)$.

Тогда можно показать, что любое кольцо O, принадлежащее H, с $O \cap k = C$ удовлетворяет максимальному условию прямых идеалов, содержащих элементы $c \to (C - 0)$.

Построение аксиомы 2 получаем применением теоремы о идеалах Брауер-Гопкинса с условием для цепей восходящих прямых идеалов и теоремы Веддербурна.

Находим (для произвольной семигруппы E):

Любое кольцо O, простые идеалы P которого допускают минимальное условие для их прямых делителей, осуществляет требование 2.

Из этого общего требования выводим два более частные, но более полезные, применяя следующую рамку.

1. O есть конечный, правый C-модуль относительно кольца C с элементом единицей и удовлетворяющий условию подпереместимости на O.

$$c\,O \subset Oc, \qquad c \leftarrow \mathcal{C}.$$

2. Характеристическая семигруппа E содержится в $\mathcal{C}$.

3. Понятие простого идеала ограничено. P является простым, если для $P \supset AB$, где A, B двухсторонние идеалы, следует $P \supset A$ или $P \supset B$.

В этой рамке находим:

Если кольцо $\mathcal{C}$ удовлетворяет 2 для всех обычных простых идеалов, содержащих единицы $\varepsilon \to E$, тогда аксиома 2 осуществлена в O.

Если кольцо $\mathcal{C}$ удовлетворяет минимальному условию для прямых идеалов делителей обычного простого идеала, содержащего $\varepsilon \to E$, тогда условие 2 осуществимо в O.

Учитывая предыдущие построения аксиом 1 и 2 приходим к созданию достаточно широкой теории полных арифметик.

Пусть H алгебра с элементом-единицей относительно поля K частных сферы целостности $\mathcal{C}$ с классической теорией идеалов.

В таком случае в каждом максимальном порядке O[1]) от H с $O \cap k = \mathcal{C}$ и минимальным условием для прямых делителей простых идеалов, имеем полную арифметику для каждой характеристической семигруппы $E \subset (\mathcal{C} - O)$.

Это предположение обобщает теорему Грелля, которая может быть найдена вновь, полагая $H =$ коммутативной делимой алгебре.

Любое включение $H \supset \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ обладает двойным условием для прямых идеалов (с нижней ненулевой гранью), порождает в максимальных порядках [2]) O, перемещаемых с элементами $\mathcal{C}$ полную арифметику. Характеристическая семигруппа E должна быть взята из $\mathcal{C}$.

В § 5 содержится обратимость основной теоремы для полных арифметик.

Для осуществления этой обратимости необходимы два предварительных условия. Первое условие появляется также у Шевалье, но видно, что для определения основной теоремы оно бесполезно и, как

[1]) Максимальный в своем кольце частных mod E.

[2]) Конечные модули справа относительно $\mathcal{C}$.

будет видно, необходимо только для обратной теоремы. Эти условия следующие:

I. Порядки $M \supset O$ относительно O от H имеют вид

$$M = \eta A,$$

где A есть идеал O, а η единица H.

II. Если $A \supset B$ суть два прямых идеала, содержащие $\varepsilon \to E$, тогда $AO = BO$ влечет $A = B$.

В рамках I+II и для семигруппы E перемещаемых единиц на $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ с O доказываем:

Полные арифметики и арифметики с основной теоремой типа Нозера с квази-единицей совпадают.

Если E есть семигруппа, образованная из неделителей нуля, взятых в центре O, а H кольцо частных *mod.* E, то показываем, что требование I тождественно удовлетворено. Если помимо того, O есть прямой конечный C -модуль относительно подкольца $\mathcal{C}$ с максимальным условием для цепных идеалов, II становится лишним и можно им как таковым пренебречь.

Наконец, устанавливаем «перенесением» довольно скрытым, исчерпывающую теорему, которая показывает необходимость всех промежуточных результатов, указанных выше

Пусть $H \supset k$ алгебра с элементом-единицей относительно поля k частных сферы целостности $\mathcal{C}$. Для того, чтобы в максимальных порядках *) O от H с $O \cap k = \mathcal{C}$ и минимальной базой получить полную арифметику, необходимым и достаточным условием является, чтобы в $\mathcal{C}$ господствовала классическая теория идеалов.

Или:

Если $H \supset k$ есть алгебра с элементом единицей, относящимся к полю k частных сферы целостности $\mathcal{C}$, необходимым условием для получения в порядке O от H с $O \cap k = C$ и минимальной базой основной теоремы типа Нозера с квази-единственностью, является господство классической теории идеалов в $\mathcal{C}$. Обратно, если в $\mathcal{C}$ имеем классическую теорию идеалов, тогда любой максимальный порядок O, принадлежащий H с $O \cap k = \mathcal{C}$, допускает основную теорему.

Отсюда выводим обратимость известной теоремы Эмми Нозера обобщенной Ван дер Верденом (Сов. Алгебра II, стр. 94):

Достаточным и необходимым условием, чтобы в главном порядке Ω сепарабельною конечного расширения поля частных k относительно сферы целостности $\mathcal{C}$ с элементом единицей или несепарабильного конечного расширения поля частных k относительно сферы целостности $\mathcal{C}$ (с характеристикой P), и в то же время являющегося конечным модулем по отношению к «кольцу корней» с $1/p$ является господство в самом $\mathcal{C}$ такой теории. Обратно необходимость требует, чтобы Ω обладало минимальной базой по отношению к $\mathcal{C}$, что всегда имеет место, если $\mathcal{C}$ кольцо с квазиглавным идеалом (понятие определенное в тексте).

---

*) Максимальные порядки в кольце частных *mod* $E \subset E < (C - 0)$, кольцо, которое согласно выводу Артина совпадает с H.

LES ARITHMÉTIQUES NON COMMUTATIVES À THÉORIE EXHAUSTIVE DES IDÉAUX

(RÉSUMÉ)

L'Auteur propose dans ce travail une théorie abstraite des arithmétiques non commutatives, à l'instar de la théorie classique des idéaux, modèle de toute recherche mathématique exhaustive. Il s'agit donc de trouver des hypothèses qui assurent, dans les anneaux non commutatifs, l'existence du théorème fondamental sur la décomposition de tout idéal en produit commutatif uniquement déterminé par des idéaux premiers et qui soient logiquement équivalentes à ce théorème même.

Il existe, à notre connaissance, une seule esquisse, due à Chevalley, d'une théorie abstraite des arithmétiques dans les systèmes de nombres hypercomplexes. Elle est indiquée dans l'introduction de son étude sur l'arithmétique des algèbres de matrices (Paris, Herman, 1936), mais elle n'est pas exhaustive. Néanmoins, l'Auteur en fait le point de départ de ses recherches.

Aussi le 1er paragraphe du présent travail est-il fait de la mise au point (l'esquisse de Chevalley étant extrêmement concise, voire obscure) de ce que Chevalley appelle les *arithmétiques régulières*, puis de la généralisation de ces mêmes arithmétiques sous le nom *d'arithmétiques primitives*. On élargit également la notion d'idéal employée par Chevalley.

Soit $H \supset O$ une inclusion de deux anneaux à élément-unité, en général non-commutatifs, et E un semi-groupe d'unités de H, prises à O. Un idéal bilatère de O, qui contient au moins une unité $\varepsilon \in E$, est appelé *idéal* tout court. La notion apparaît moins relativisée chez Chevalley. Le semigroupe E est identifié à l'ensemble de toutes les unités de H en O et on exige que tout non diviseur de zéro dans l'anneau O soit une unité de H.

Les axiomes des arithmétiques primitives sont aussi considérablement allégés par rapport aux quatre axiomes I+II+III+IV des arithmétiques régulières.

On demande:

1. La condition des chaînes ascendantes pour les idéaux droits qui contiennent des éléments $\varepsilon \to E$.

2. L'existence du module inverse pour tout idéal non divisible.

3. La maximalité de l'ordre O en H.

L'axiome 1 est une partie de l'axiome III de Chevalley.

L'axiome 2 est compris dans l'axiome I. L'axiome 3 est démontré par Chevalley à l'aide de I et III. De sorte que, dans la définition des arithmétiques primitives, les axiomes II et IV n'interviennent pas.

Dans le cadre 1+2+3, l'Auteur démontre le théorème fondamental, en prouvant à l'aide de 3 que tout idéal premier est non divisible, et en généralisant au préalable un théorème d'Artin qui revient à dire que tout idéal à module inverse est permutable avec tous ses non-diviseurs premiers. La démonstration se poursuit d'après le schéma donné par Van der Waerden pour la théorie classique des idéaux (Moderne Algebra, II, p. 100, 1ère et 2e éditions) et dont on redresse à cet effet le raisonnement inductif, faussé par une trop grande concision.

De fait, l'Auteur établit le théorème fondamental pour des arithmétiques encore plus générales *(les arithmétiques antérieures)* où l'axiome 1 n'est formulé

que pour les idéaux, l'axiome 2 est étendu à tous les idéaux premiers, tandis que 3 est remplacé par une certaine demande très faible de non-divisibilité des idéaux premiers *(si $P' \supset P''$ sont premiers, $P''=P'P_1$ et $P''=P_2P'$ avec P_1, P_2 idéaux véritables ou égaux à O)*. Ce qu'il y a de remarquable dans ces arithmétiques antérieures, c'est que, sans l'implication « premier → non-divisible », on peut cependant émettre le théorème fondamental.

Les arithmétiques primitives sont encore trop générales pour être exhaustives. L'Auteur en extrait pourtant deux espèces qui ont cette propriété et qui sont remarquables à divers titres: les *arithmétiques fermées* et les *arithmétiques complètes*. Les premières représentent les vraies analogues non commutatives des arithmétiques classiques des domaines d'intégrité et sont constituées comme celles-ci avec un axiome de « fermeture entière ». Parmi les axiomes postulés, les dernières ont la maximalité de l'ordre.

Le paragraphe 2 s'occupe des arithmétiques fermées.

Soit O un anneau qui possède un semigroupe E de non-diviseurs de zéro pris au centre de O. On introduit, par le raisonnement classique des corps de quotients, ce qu'on pourrait appeler l'anneau $H \supset O$ des quotients de O mod E, en définissant les quotients abstraits $\frac{a}{\varepsilon}$ avec $a \in O$, $\varepsilon \in E$.

Voici les *axiomes des arithmétiques fermées:*

$\overline{\alpha}_1$. Tout élément $\eta \to Z$ pris au centre de Z de H avec $\eta^i \to O\,\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \to E$, pour toutes les puissances $i=1, 2, \ldots n \ldots$, appartient à O.

α_2. Il y a condition maximale pour les idéaux enchaînés.

α_3. Il y a implication « premier → non-divisible ».

On démontre qu'on se trouve en présence d'une « arithmétique antérieure » et que, par cela, les arithmétiques fermées sont à théorème fondamental.

La théorie exhaustive de Emmy Noether n'est pas valable pour tous les anneaux commutatifs, mais seulement pour les domaines d'intégrité. Aussi introduit-on ce qu'on pourrait appeler

l'axiome de semi-intégrité α_0.

L'ensemble O a une puissance supérieure à $(O-E)$.

On peut même affaiblir α_0 jusqu'à α'_0. L'anneau O possède un algorithme d'Euclide mod E.

Ce qui signifie que pour tout $a \subset O$, $\varepsilon \in E$ il y a un $b \to O$, $\eta \to E$ avec $a = b\,\varepsilon + \eta$.

Dans le cadre de l'axiome préalable α_0 resp. α'_0 on peut affaiblir $\overline{\alpha}_1$ jusqu'à l'énoncé α_1 déduit de $\overline{\alpha}_1$ en limitant les éléments η à ceux contenus par le groupe multiplicatif (E) engendré par E en H; c'est-à-dire, en mettant (E) pour Z dans la définition ci-dessus.

On démontre que, dans le cadre $\alpha'_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, le théorème fondamental est encore vrai.

On convient de dire qu'une décomposition de l'idéal $A < O$ en produit d'idéaux premiers est *quasi unique*, lorsque la dimension reste la même pour toutes ces décompositions de A.

Les décompositions sont dites *de type Noether*, lorsque pour $A \supset B$ il y a un idéal C tel que les décompositions de A, B, C réduisent

$$A = BC$$

à une identité.

Dès lors, on peut démontrer ce théorème exhaustif:

Dans le cadre α_0 *(ou bien* α_0'*) et pour un semi-groupe* E *complet:* $E = (E) \cap O$ *les arithmétiques fermées et les arithmétiques à théorème fondamental de type Noether, à quasi unicité, sont identiques.*

Il s'ensuit *a posteriori* que les décompositions sont permutables et la quasi-unicité est en dernier lieu une unicité.

On s'aperçoit qu'on se trouve en présence d'une véritable transposition dans le non-commutatif de la théorie classique d'Emmy Noether.

En revenant aux arithmétiques $\bar{\alpha}_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et en prenant O commutatif, on arrive au théorème fondamental pour les anneaux à diviseurs de zéro, énoncé sans démonstration par Van der Waerden (M. Alg., II, p. 100). *Mais le théorème ci-dessus montre en même temps quelles sont les hypothèses et, les modifications requises pour rendre la théorie des idéaux, dans de tels anneaux, exhaustive.*

Dans le paragraphe 3, on introduit les arithmétiques complètes.

Soit $H \supset O$ une inclusion de deux anneaux à élément-unité. On suppose le semi-groupe caractéristique E formé d'unités sous-permutables à O

$$O\,\varepsilon \subset \varepsilon\, O, \qquad \varepsilon \in E$$

et l'on définit les arithmétiques complètes par trois axiomes, en stricte analogie avec les axiomes de la théorie classique des idéaux:

1. La condition maximale pour les idéaux droits enchaînés qui contient des éléments $\varepsilon \to E$.
2. L'implication « premier → non-divisible ».
3. La maximalité de l'ordre O en H.

On démontre, en suivant la ligne générale des raisonnements d'Artin dans son Arithmétique des nombres hypercomplexes, que les arithmétiques complètes sont des arithmétiques primitives. (On reconnait même *a posteriori* qu'elles coïncident avec les arithmétiques primitives à semi-groupe E, dont les unités sont sous-permutables à O). Il s'ensuit que les arithmétiques complètes possèdent un théorème fondamental.

On montre en plus que, avec une condition $\tilde{1}$ plus faible, exprimée seulement pour les idéaux, et sans la condition 3 de l'ordre maximal, mais avec un axiome α de « fermeture entière »:

α. Si $x \to H$ avec $x^i \to O$ ε^{-1}, $\varepsilon \to E$, pour tous les entiers i positifs, $x \to O$; le théorème fondamental est encore vrai.

On ne peut pourtant pas affirmer que le dernier théorème soit inversible. Mais, dans le 5e paragraphe, on établit, dans un certain cadre, cette propriété pour les arithmétiques complètes.

Le 4e paragraphe est consacré aux constructions des axiomes 1 et 2 des arithmétiques complètes.

L'Auteur propose une construction de l'axiome 1, en généralisant un résultat très caché, dû à H. Grell et formulé par lui pour les extensions inséparables, de degré fini, d'un corps. L'Auteur l'étend aux anneaux non-commutatifs, de la manière suivante:

Soit H une algèbre à élément-unité et à champ k, corps de quotiens d'un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$ où règne une théorie classique des idéaux. On prend $E = (\mathcal{C} - 0)$.

Dès lors tout anneau O *de* H *avec* $O \cap k = \mathcal{C}$ *est à condition maximale pour les idéaux droits qui contiennent des éléments* $c \to (C - 0)$, *c'est-à-dire qu'il satisfait à* 1.

On obtient la construction de l'axiome 2 comme application du théorème de Brauer-Hopkins, sur les anneaux à condition minimale pour les idéaux droits enchaînés, et du théorème de structure de Wedderburn.

On trouve (pour un semi-groupe E arbitraire):

Tout anneau O dont les idéaux premiers P sont à condition minimale pour leurs diviseurs droits réalise 2.

De cette construction générale, on en déduit deux, plus utiles, en imposant ce cadre:

1. O est $\mathcal{C}$-module fini droit, par rapport à un anneau $\mathcal{C}$ à unité principale dont les éléments sont sous-permutables à O

$$cO \subset Oc \qquad c \in \mathcal{C}$$

2. Le semi-groupe caractéristique E est contenu dans $\mathcal{C}$.

3. La notion d'idéal premier est restrictive. P est premier si pour $P \supset A\,B$ avec A, B, *idéaux bilatères*, il s'ensuit $P \supset A$ ou $P \supset B$.

Dans ce cadre on trouve:

Si l'anneau $\mathcal{C}$ satisfait à 2 pour tous les idéaux premiers ordinaires qui contiennent des unités $\varepsilon \to E$, alors O réalise 2.

Si l'anneau $\mathcal{C}$ est sous-commutatif et à condition minimale pour les idéaux droits diviseurs d'un idéal premier ordinaire, qui contient un $\varepsilon \to E$, O réalise 2.

En considérant les constructions ci-dessus pour les axiomes 1 et 2, on parvient à construire deux catégories assez larges d'arithmétiques complètes:

*Soit H une algèbre à élément-unité relative au corps k des quotients d'un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$ à théorie classique des idéaux. Nous avons dans chaque ordre maximal *) O de H avec $O \cap k = \mathcal{C}$ à condition minimale pour les diviseurs droits des idéaux premiers une arithmétique complète pour tout semi-groupe caractéristique $E \subset (\mathcal{C} - 0)$.*

On s'aperçoit que cette proposition généralise le théorème de Grelle qu'on retrouve pour $H =$ algèbre à division, commutative.

*Toute inclusion $H \supset \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est sous-commutatif et à double condition pour les idéaux droits (à marge non nulle), induit dans les ordres maximaux **) O permutables aux éléments de $\mathcal{C}$, une arithmétique complète. Le semi-groupe caractéristique E doit être pris à $\mathcal{C}$.*

Le 5e paragraphe contient l'inversion du théorème fondamental pour les arithmétiques complètes.

Il est nécessaire de postuler deux conditions préalables, dont la première apparaît également chez Chevalley, mais, comme on le voit, elle est inutile à l'établissement du théorème fondamental et, comme on le verra, elle n'est indispensable qu'à son inversion; à savoir:

I. Les ordres $M \supset O$ relatifs à O, de H sont de la forme

$$M = \eta A$$

où A est idéal de O et η une unité à gauche de H.

II. Si $A \supset B$ sont deux idéaux droits qui contiennent des $\varepsilon \to E$, alors $AO = BO$ implique $A = B$.

Dans le cadre I + II et pour un semi-groupe E aux unités sous-permutables $O\varepsilon \subset \varepsilon O$ à O, on démontre:

---

*) Maximal dans son anneau des quotients mod E.

**) Modules finis à droite par rapport à $\mathcal{C}$.

Les arithmétiques complètes et les arithmétiques qui possèdent un théorème fondamental de type Noether, à quasi-unicité, coïncident.

Si E est un semi-groupe formé par des non-diviseurs de zéro pris au centre de O, et H l'anneau des quotients mod E, on montre que la condition I est identiquement remplie. Si, de plus, O est $\mathcal{C}$-module fini droit relativement à un sous-anneau $\mathcal{C}$ à condition maximale pour les idéaux enchaînés, la condition II n'est plus requise.

On établit enfin encore un théorème exhaustif « par translation », assez caché, qui montre en effet la nécessité de toutes ces considérations intermédiaires, faites en somme pour y aboutir:

Soit $H \supset k$ une algèbre à élément-unité relative au corps k des quotients d'un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$. La condition nécessaire et suffisante pour avoir une arithmétique complète dans les ordres maximaux) de H avec $O \cap k = \mathcal{C}$ à base minimale, est que $\mathcal{C}$ soit à théorie classique des idéaux.*

Ou bien:

Si $H \supset k$ est une algèbre à élément-unité relative au corps k des quotients d'un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$, pour que dans un ordre O de H avec $O \supset \mathcal{C}$ et à base minimale, on ait un théorème fondamental de type Noether à quasi-unicité, il faut qu'une théorie classique des idéaux règne dans $\mathcal{C}$.

Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est à théorie classiques des idéaux, alors tout ordre maximal O de H, avec $O \cap k = \mathcal{C}$, admet un théorème fondamental.

On en déduit l'inversion d'un théorème bien connu d'Emmy Noether, généralisé par Van der Waerden (Moderne Algebra, II, p. 94):

La condition nécessaire et suffisante d'une théorie classique des idéaux dans l'anneau de tous les entiers Ω d'une extension séparable finie du corps des quotients k relativement à un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$, à unité principale, ou bien *d'une extension inséparable finie du corps des quotients k relativement à un domaine d'intégrité $\mathcal{C}$ (caractéristique p), en même temps module fini par rapport à « l'anneau des racines » $\mathcal{C}^{\frac{1}{p}}$, est que* dans l'anneau initial $\mathcal{C}$ une telle théorie règne. La nécessité requiert en outre que Ω ait une base minimale par rapport à $\mathcal{C}$, ce qui a toujours lieu si $\mathcal{C}$ est anneau à idéal quasi-principal (notion qu'on définit dans le texte).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie des Quaternionen.* J. Springer, Berlin, 1919.
2. H. Brandt, Verhandlung des Schweizer Naturforschenden Gesellschaft, Freiburg, 1926, p. 155—156.
3. A. Speiser, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, 1926, t. 71, p. 70—115.
4. E. Artin, Hamburger Abhandlungen, 1927, t. V, p. 261—289.
5. H. Hasse, Math. Annalen, 1931, t. 104, p. 150.
6. R. Dedekind, *Gesammelte Mathematische Werke (Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen).* Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1931, t. 3.
7. E. Noether, Math. Annalen, 1926, t. 96, p. 26—61.

*) Ordres maximaux, dans leurs anneaux de quotients mod E avec $E < (\mathcal{C} - 0)$ qui, d'après un résultat d'Artin, coïncident avec H.

8. Ch. Chevalley, *L'arithmétique dans les algèbres des matrices*. Actualités scientifiques, Herman, Paris, 1936.
9. Van der Waerden, *Moderne Algebra*. J. Springer, Berlin, 1931, t. II.
10. H. Grell, Math. Zeitschr., 1936, t. 40, p. 503—505.
11. D. Barbilian, *Teoria numerelor* (curs litografiat). Fac. Mat. și Fiz., București, 1951.
12. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Hirzel, Leipzig, 1927, t. 3.
13. L. E. Dickson, *Algebra and their arithmetics*. Chicago, 1923.
14. R. Fricke, *Lehrbuch der Algebra*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1928, t. 3.
15. F. K. Schmidt, Math. Zeitschr., 1936, t. 41, p. 443—450.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

SOLUŢII APROAPE-PERIODICE ALE ECUAŢIEI RICCATI

DE

A. HALANAY

In lucrarea de faţă se dau anumite condiţii care asigură existenţa soluţiilor aproape-periodice pentru ecuaţia Riccati

$$y' + y^2 + p(t) = 0 \tag{1}$$

în cazul când $p(t)$ este o funcţie aproape-periodică continuă şi se indică unele proprietăţi ale acestor soluţii.

In cazul când ecuaţia Riccati considerată are două soluţii aproape-periodice, ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea care i se asociază

$$x'' + p(t)\, x = 0 \tag{2}$$

admite două soluţii liniar independente de forma

$$x_1 = e^{\mu t}\, \Phi_1(t) \quad , \quad x_2 = e^{-\mu t}\, \Phi_2(t),$$

unde $\Phi_1(t)$ şi $\Phi_2(t)$, dacă sunt mărginite, sunt aproape-periodice. Aceasta este o extindere la cazul aproape-periodic a cunoscutei teoreme a lui Floquet relativă la ecuaţiile liniare cu coeficienţi periodici.

Din această formă a soluţiilor rezultă în particular că ecuaţia (2) este regulată în sensul lui Liapunov.

1. In cele ce urmează vom avea nevoie de următoarele definiţii şi rezultate aparţinând lui R. C a n e r o n [1].

D e f i n i ţ i a 1. *Funcţia $f(t)$ se numeşte seminormală dacă din orice şir de numere reale $\{h_i\}$ se poate alege un subşir $\{h_{n_i}\}$ astfel ca* $\lim_{i \to \infty} f(t + h_{n_i})$ *să existe uniform în orice interval finit de* variaţie a lui t.

D e f i n i ţ i a 2. *Funcţia $g(t) = \lim f(t+h_i)$ se numeşte translaţie a funcţiei $f(t)$. Dacă $\{h_i\}$ este astfel încât* $\lim_{i \to \infty} \lambda h_i$ *există (mod 2π) pentru orice λ aparţinând unui modul M, atunci $g(t)$ se numeşte M — translaţie a funcţiei $f(t)$.*

L e m a 1. *Dacă*

$$g(t) = \lim_{i \to \infty} f(t + h_i), \quad p(t) = \lim_{i \to \infty} g(t + k_i),$$

atunci

$$p(t) = \lim_{i\to\infty} f(t + l_i),$$

iar dacă $\lim \lambda h_i$ *(mod* 2π*) există, se poate alege* $\{l_i\}$ *astfel ca* $\lim \lambda (h_i + k_i - 1_i) = 0$ *(mod* 2π*).*

Definiţia 3. *Funcţia* $f(t)$ se *numeşte staţionară în raport cu un modul* M *dacă pentru orice* t *avem* $\lim_{i\to\infty} f(t+h_i) = f(t)$ *pentru orice şir* $\{h_i\}$ *cu proprietatea* $\lim_{i\to\infty} \lambda h_i = 0 \pmod{2\pi}$, $\lambda \in M$.

Lema 2. *Funcţia* $f(t)$ *este staţionară în raport cu* M *atunci şi numai atunci când din orice şir* $\{h_i\}$, *cu proprietatea* $\lim_{i\to\infty} \lambda h_i = 0$ (mod. 2π), *se poate extrage un subşir* $h_1', \ldots h_n', \ldots$ *astfel* $\lim_{i\to\infty} f(t+h_i') = f(t)$.

Teoremă (R. Cameron). *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie* $f(t)$ *să fie aproape-periodică cu modulul conţinut într'un modul* M *este ca ea să aibă următoarele proprietăţi:*

1) $f(t)$ *să fie continuă*
2) $f(t)$ *să fie seminormală*
3) $f(t)$ *şi toate* M *— translaţiile ei să fie staţionare în raport cu* M.

2. Această teoremă a lui Cameron ne va permite să formulăm unele rezultate relative la existenţa soluţiilor aproape-periodice ale ecuaţiei (1), în cazul când $p(t)$ este o funcţie aproape-periodică.

Observăm întâi următoarea proprietate a ecuaţiei (1) cu $p(t)$ aproape-periodică: dacă $p(t) \leqslant 0$, ecuaţia admite două soluţii $u(t)$ şi $v(t)$ astfel ca $\inf_{-\infty<t<\infty} [v(t) - u(t)] > 0$.

Intr'adevăr, se ştie [2] că în acest caz există pentru ecuaţia considerată o cea mai de sus soluţie prelungibilă pe toată axa, $v(t)$, şi o cea mai de jos soluţie prelungibilă pe toată axa, $u(t)$, şi că avem $v(t) \geqslant 0$, $u(t) \leqslant 0$.

Dacă $\inf_{-\infty<t<\infty} [v-u] = 0$, ar exista un şir $\{h_i\}$, astfel că $\lim_{i\to\infty} v(h_i) = \lim_{i\to\infty} u(h_i)$.

Soluţiile ecuaţiei $y' + y^2 + p(t+h_i) = 0$ care pentru $t = 0$ iau valorile $v(h_i)$ şi $u(h_i)$ sunt $v(t+h_i)$şi $u(t+h_i)$; rezultă că $\lim_{i\to\infty} v(t+h_i)$ şi $\lim_{i\to\infty} u(t+h_i)$ sunt soluţiile ecuaţiei $y' + y^2 + \lim_{i\to\infty} p(t+h_i) = 0$, care pentru $t = 0$ iau valorile $\lim_{i\to\infty} v(h_i)$ şi $\lim_{i\to\infty} u(h_i)$, [$\lim_{i\to\infty} p(t+h_i)$ există uniform în raport cu t pe toată axa, trecând eventual la un subşir $\{h_{n_i}\}$, deoarece p (t) este aproape periodică; de aici rezultă că $\lim_{i\to\infty} v(t+h_i)$ şi $\lim_{i\to\infty} u(t+h_i)$ există uniform pe orice interval finit de variaţie al lui t].

Rezultă de aici că

$$\lim_{i\to\infty} v(t + h_i) = \lim_{i\to\infty} u(t + h_i).$$

Cum $v(t) \geqslant 0$, $u(t) \leqslant 0$, rezultă că

$$\lim_{i\to\infty} v(t + h_i) = \lim_{i\to\infty} u(t + h_i) = 0.$$

Prin urmare, ecuația $y' + y^2 + \lim_{i\to\infty} p(t+h_i) = 0$ ar admite o soluție identic nulă, deci $\lim_{i\to\infty} p(t+h_i) = 0$.

Dar acest lucru atrage $p(t) = 0$, ceea ce presupunem că nu are loc.

Observația precedentă arată că este justificabilă condiția următoarei teoreme principale.

T e o r e m ă. *Dacă ecuația Riccati* (1) *cu* $p(t)$ *funcție aproape-periodică are două soluții prelungibile pe toată axa,* $u(t)$ *și* $v(t)$, *astfel ca* $\inf_{-\infty<t<\infty}[v(t) - u(t)] > 0$, *atunci aceste soluții sunt aproape-periodice.*

Demonstrație. Fie

$$p^*(t) = \lim_{i\to\infty} p(t+h_i), \quad u^*(t) = \lim_{i\to\infty} u(t+h_i), \quad v^*(t) = \lim_{i\to\infty} v(t+h_i).$$

Presupunem că

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[v^*(t) - u^*(t)] = 0,$$

deci există un șir $\{t_j\}$ astfel că

$$\lim_{j\to\infty} v^*(t_j) = \lim_{j\to\infty} u^*(t_j).$$

Atunci însă, ca mai sus, rezultă

$$\lim_{j\to\infty} v^*(t+t_j) = \lim_{j\to\infty} u^*(t+t_j).$$

Conform lemei 1 a lui Cameron există un șir $\{l_i\}$ astfel ca

$$\lim_{j\to\infty} v^*(t+t_j) = \lim_{i\to\infty} v(t+l_i), \quad \lim_{j\to\infty} u^*(t+t_j) = \lim_{t\to\infty} u(t+l_i).$$

De aici

$$\lim_{t\to\infty} v(t+l_i) = \lim_{t\to\infty} u(t+l_i),$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} v(l_i) = \lim_{t\to\infty} u(l_i),$$

ceea ce contrazice ipoteza din enunț.

Prin absurd este deci demonstrat că

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[v^*(t) - u^*(t)] > 0.$$

Conform rezultatelor lui I. M. S o b o l [2], acest lucru este posibil numai dacă $v^*(t)$ și $u^*(t)$ sunt soluții frontieră (cea mai de sus și cea mai de jos soluție prelungibilă pe toată axa).

Am demonstrat așa dar că dacă $u(t)$ și $v(t)$ sunt soluțiile frontieră ale ecuației date, atunci $u^*(t)$ și $v^*(t)$ sunt soluțiile frontieră ale ecuației $y' + y^2 + p^\alpha(t) = 0$.

Dacă în particular

$$\lim_{t\to\infty} p(t+k_i) = p(t),$$

rezultă că

$$\lim_{i\to\infty} u(t+k_i) = u(t)$$

$$\lim_{i\to\infty} v(t+k_i) = v(t),$$

deci soluțiile frontieră sunt funcții staționare în raport cu M (modulul funcției aproape-periodice $p(t)$. Cum orice translație a unei soluții frontieră este în condițiile teoremei tot soluție frontieră, rezultă că toate M — translațiile funcțiilor $u(t)$ și $v(t)$ sunt staționare în raport cu M și deci, conform teoremei lui Cameron, $u(t)$ și $v(t)$ sunt aproape-periodice. Din această teoremă rezultă în particular că dacă $p(t) \leqslant 0$, ecuația (1), în cazul când $p(t)$ este aproape-periodică, are două soluții aproape-periodice.

Oarecum reciprocă teoremei demonstrate este următoarea

T e o r e m ă. *Dacă ecuația* (1) *cu* $p(t)$ *aproape-periodică are două soluții aproape-periodice* $u(t)$ *și* $v(t)$, *aceste soluții verifică relația* $\inf_{-\infty<t<\infty} [v(t) - u(t)] > 0$.

Demonstrație. Presupunem că $\lim_{i\to\infty} [v(k_i) - u(k_i)] = 0$.

Atunci

$$\lim_{i\to\infty} [v(t+k_i) - u(t+k_i)] \equiv 0.$$

Fie

$$w(t) = v(t) - u(t).$$

Funcția $w(t)$ este aproape-periodică și

$$\lim_{i\to\infty} w(t+k_i) \equiv 0.$$

De aici rezultă $w(t) \equiv 0$ deci $v(t) \equiv u(t)$, ceea ce este contradictoriu.

Dacă ecuația Riccati (1) are două soluții aproape-periodice, aceste soluții au valori medii egale și de semne contrarii. Într'adevăr, din

$$v' + v^2 + p(t) = 0, \quad u' + u^2 + p(t) = 0$$

rezultă

$$v' - u' + (v+u)(v-u) = 0$$

sau

$$\frac{v'-u'}{v-u} + (v+u) = 0$$

De aici rezultă

$$\log(v-u) + \int_{t_0}^{t} (v+u)\,dt = \text{const.}$$

Dar $v - u > k > 0$ și u, v sunt mărginite, deci $\log(v-u)$ este mărginită. Aceasta înseamnă că

$$\left| \int_{t_0}^{t} (v+u)\,dt \right| < M.$$

Fie

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt = a(t-t_0) + \varphi(t)\ , \quad \int_{t_0}^{t} u\,dt = b(t-t_0) + \Psi(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0}\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0}\Psi(t) = 0.$$

Rezultă

$$|(a+b)(t-t_0) + \varphi(t) + \Psi(t)| < M,$$

deci

$$\left| a+b+\frac{\varphi(t)}{t-t_0}+\frac{\Psi(t)}{t-t_0}\right| < \frac{M}{t-t_0}.$$

Trecând la limită pentru $t\to\infty$ rezultă $a+b=0$. Acest ultim rezultat permite stabilirea unei proprietăți interesante a ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul al doilea cu coeficient aproape-periodic și anume, că aceste ecuații sunt regulate în sensul lui A. M. Liapunov [3]. Importanța sistemelor regulate constă, după cum se știe, în faptul că pentru aceste sisteme este valabilă teorema de stabilitate după prima aproximație a lui A. M. Liapunov [3].

Ecuația (1) se transformă prin schimbarea de funcție $y = \frac{\dot{x}}{x}$ în ecuația (2). Soluțiilor frontieră $u = \mu + \alpha_1(t)$, $v = \mu + \alpha_2(t)$ le corespund soluțiile liniar independente

$$x_1(t) = e^{\nu t}\,\Phi_1(t)\ , \quad x_2(t) = e^{-\mu t}\,\Phi_2(t),$$

unde

$$\Phi_k(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \alpha_k(t)\,dt}.$$

Din această reprezentare rezultă că μ și $-\mu$ sunt numerele caracteristice [3] ale ecuației (2), ceea ce arată imediat că ecuația este regulată.

Pentru a stabili un nou criteriu, care să asigure existența soluțiilor aproape-periodice pentru ecuația Riccati și în cazul când funcția $p(t)$ poate schimba semnul, vom folosi noțiunea de funcție asimptotic aproape-periodică introdusă de M. Fréchet [4].

Definiție. *Funcția continuă $f(t)$ definită pe semi-dreapta $t \geqslant \alpha$ se numește asimptotic aproape-periodică dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $l > 0$ și $\beta > 0$ astfel că, în orice interval de lungime l, să existe un număr τ cu proprietatea*

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{dacă} \quad t > \beta,\ t+\tau > \beta.$$

Importante pentru noi sunt următoarele proprietăți fundamentale ale funcțiilor asimptotic aproape-periodice:

1° Dacă $f(t)$ este o funcție asimptotic aproape-periodică, atunci $f(t) = p(t) + \omega(t)$, unde $p(t)$ este o funcție aproape-periodică continuă, iar $\omega(t)$ o funcție continuă care tinde către zero (evident, această descompunere este unică).

2° Dacă $f(t) = p(t) + \omega(t)$ este o funcție asimptotic aproape-periodică, iar derivata ei $f'(t)$ este de asemenea asimptotic aproape-periodică, atunci $f'(t) = p'(t) + \omega'(t)$.

Cu ajutorul acestor proprietăţi demonstrăm următoarea

L e m ă. *Dacă ecuaţia Riccati* (1) *cu* $p(t)$ *aproape-periodică are o soluţie prelungibilă* $u(t)$, *astfel ca pentru* $t > t_0$, $u(t) > a > 0$, *atunci ea are o soluţie aproape-periodică.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $\tau(\varepsilon)$ o $a\varepsilon$ — aproape-periodică a funcţiei $p(t)$; atunci $|p(t+\tau) - p(t)| < a\varepsilon$.

Din

$$u'(t) + u^2(t) + p(t) = 0$$

$$u'(t+\tau) + u^2(t+\tau) + p(t+\tau) = 0,$$

rezultă

$$u'(t+\tau) - u'(t) + u^2(t+\tau) - u^2(t) + p(t+\tau) - p(t) = 0.$$

Fie

$$V(t) = u(t+\tau) - u(t), \quad \eta(t) = p(t+\tau) - p(t), \quad |\eta(t)| < a\varepsilon.$$

Atunci

$$V'(t) + [u(t+\tau) + u(t)]\, V(t) + \eta(t) = 0.$$

Notăm

$$u(t+\tau) + u(t) = f(t).$$

Pentru $t \geqslant t_0$ şi $t + \tau \geqslant t_0$ avem $f(t) > 2a$.

Din

$$V'(t) + f(t)\, V(t) + \eta(t) = 0$$

obţinem

$$V(t) = V(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} \int_{t_0}^{t} \eta(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt.$$

De aici rezultă

$$|V(t)| \leqslant |V(t_0)|\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + a\varepsilon\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt.$$

Dar, din $f(t) > 2a$ rezultă

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt > 2a \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt.$$

Prin urmare

$$|V(t)| \leqslant |V(t_0)|\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + \frac{\varepsilon}{2}\, e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} \int_{t_0}^{t} f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt,$$

sau, ţinând seama că

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\, dt = e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} - 1,$$

rezultă

$$|V(t)| \leqslant |V(t_0)|\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} \left[e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} - 1 \right].$$

In definitiv

$$|V(t)| \leqslant |V(t_0)|\, e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}$$

$$|V(t)| \leqslant \left\{ |V(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} \right\} e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă că există $t_1 > t_0$ astfel ca $|V(t)| < \varepsilon$ pentru $t > t_1$.

Prin urmare, există t_1 astfel ca pentru $t > t_1$ să avem

$$|u(t+\tau) - u(t)| < \varepsilon,$$

iar mulțimea numerelor τ este relativ densă (numerele τ sunt aproape periodice pentru funcția $p(t)$.

Aceasta înseamnă că $u(t)$ este o funcție asimptotic aproape-periodică.

Atunci

$$u(t) = \alpha(t) + \omega(t)$$

unde $\alpha(t)$ este aproape-periodică, iar $\omega(t)$ tinde către zero când $t \to \infty$.

Din ecuația (1) rezultă că $u'(t)$ este și ea asimptotic aproape-periodică și deci

$$u'(t) = \alpha'(t) + \omega'(t)$$

unde $\alpha'(t)$ este aproape-periodică, iar $\omega'(t)$ tinde către zero când $t \to \infty$.

Inlocuind în ecuație, obținem

$$\alpha' + \omega' + \alpha^2 + 2\alpha\omega + \omega^2 + p(t) \equiv 0.$$

Aici $\alpha' + \alpha^2 + p(t)$ este funcție aproape-periodică iar $\omega' + 2\alpha\omega + \omega^2$ tinde către zero când $t \to \infty$. Rezultă că $\alpha' + \alpha^2 + p(t) = 0$ și $\omega' + 2\alpha\omega + \omega^2 = 0$.

Dar aceasta înseamnă că funcția aproape-periodică $\alpha(t)$ este o soluție a ecuației, deci lema este demonstrată.

Observație. Lema rămâne valabilă dacă cerem ca soluția $u(t)$ să fie astfel încât

$$\int_{t_0}^{t} u(t)\,dt = a(t - t_0) + \varphi(t), \quad a > 0, \quad |\varphi| < M.$$

Intr'adevăr, în acest caz

$$\int_{t_0}^{t} u(t+\tau)\,dt = \int_{t_0+\tau}^{t+\tau} u(s)\,ds = -\int_{t_0}^{t_0+\tau} u(s)\,ds + \int_{t_0}^{t+\tau} u(s)\,ds =$$

$$= a(t + \tau - t_0) + \varphi(t+\tau) - a\tau - \varphi(t_0 + \tau)$$

$$\int_{t_0}^{t} u(t+\tau)\,dt = a(t - t_0) + \varphi(t+\tau) - \varphi(t_0 + \tau).$$

Deci

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = 2a(t - t_0) + \Psi(t), \qquad |\Psi| < 3M.$$

De aici rezultă că $e^{-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt}\,dt$ este mărginită şi deci $u(t)$ este asimptotic aproape-periodică.

Demonstrăm acum o teoremă care dă un criteriu de existenţă a soluţiilor aproape-periodice în cazul când $p(t)$ schimbă semnul.

Teoremă. *Ecuaţia* $y' + y^2 - \lambda - q(t) = 0$, *unde* $\lambda > 0$ şi $Q(t) = \int q(t)\,dt$ *este o funcţie aproape-periodică, iar*

$$\sqrt{\lambda} > \sup_{-\infty<t<\infty} Q(t) - \inf_{-\infty<t<\infty} Q(t)$$

are două soluţii aproape-periodice.

Demonstraţie. Există $a > 0$ astfel că $Q(t) - \inf_{-\infty<t<\infty} Q(t) + a \leqslant \sqrt{\lambda}$.
Considerăm funcţia

$$F(t) = Q(t) - \inf_{-\infty<t<\infty} Q(t) + a$$

Avem

$$a \leqslant F(t) \leqslant \sqrt{\lambda} \quad , \quad F'(t) = q(t)$$

$$F'(t) + F^2(t) - \lambda - q(t) = F^2(t) - \lambda \leqslant 0.$$

Prin urmare, toate curbele integrale ale ecuaţiei Riccati pot intersecta curba $y = F(t)$ numai de jos în sus. De aici rezultă că orice curbă integrală, care începe deasupra curbei $y = F(t)$, rămâne tot timpul deasupra acestei curbe. Prin urmare există soluţii pentru care sunt verificate condiţiile din lema precedentă. Conform acestei leme, conchidem că ecuaţia are o soluţie aproape-periodică, situată în semiplanul superior (chiar deasupra dreptei $y = a$).

Facem acum schimbările de variabilă $y = -z$, $t = -s$. Obţinem ecuaţia

$$z' + z^2 - \lambda - q(-s) = 0.$$

Considerăm funcţia

$$Q^*(s) = \int q(-s)\,ds = -Q(-s).$$

Atunci

$$F^*(s) = Q^*(s) - \inf_{-\infty<s<\infty} Q^*(s) + a$$

satisface condiţiile $a \leqslant F^*(s) \leqslant \sqrt{\lambda}$, deci curba $z = F^*(s)$ va fi intersectată de curbele integrale de jos în sus.

De aici, ca mai sus, rezultă existenţa unei soluţii aproape-periodice a ecuaţiei $z' + z^2 - \lambda - q(-s) = 0$ situată în semiplanul $z > 0$ şi deci existenţa unei soluţii aproape-periodice a ecuaţiei date, situate în semiplanul $y < 0$.

Teorema este deci demonstrată.

Observaţii: 1° Criteriul de existenţă al soluţiilor neoscilatorii pentru ecuaţia liniară de ordinul al doilea, implicat de această teoremă, aparţine în fond lui A. Wintner [5].

2° Expresia $Q(t) - \inf_{-\infty<t<\infty} Q(t)$, care apare în enunţul teoremei, nu depinde de alegerea primitivei $Q(t)$.

3° Prin exemple simple se poate arăta că cererea $\sqrt{\lambda} > \sup_{-\infty<t<\infty} Q(t) - \inf_{-\infty<t<\infty} Q(t)$ este mai slabă decât $\lambda+q(t)>0$.

Astfel, dacă $q(t)=\sin \alpha t$, atunci $Q(t)=-\frac{1}{\alpha}\cos \alpha t$ şi condiţiile teoremei sunt verificate dacă $\lambda > \frac{4}{\alpha^2}$. Evident, pentru valori suficient de mari ale lui α, funcţia $\lambda+\sin \alpha t$, poate să schimbe semnul pentru $1>\lambda>\frac{4}{\alpha^2}$.

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе исследуется уравнение Риккати $y'+y^2+p(t)=0(1)$, где $p(t)$ почти-периодическая функция. Доказываются следующие предложения:

1. Если уравнение (1) имеет два решения $u(t)$ и $v(t)$, продолжаемых на всей оси t, для которых $\inf_{-\infty<t<\infty}[v(t)-u(t)]>0$, то $u(t)$ и $v(t)$ — почти-периодические функции.

2. Если уравнение (1) имеет два почти-периодических решения $u(t)$ и $v(t)$, то эти решения удовлетворяют условию

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[v(t)-u(t)]>0.$$

3. Если уравнение (1) имеет два почти-периодических решения $u(t)$ и $v(t)$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt=-\lim_{T\to\infty}\int_0^T v(t)\,dt.$$

Как следствие из этих предложений получаем:

1. Если $p(t)\leqq 0$, то уравнение (1) имеет два почти-периодических решения.

2. Если уравнение (1) имеет два почти-периодических решения, то уравнение $x''+p(t)x=0(2)$ имеет два линейно-независимых решения вида:

$$x_1=e^{\mu t}\Phi_1(t),\quad x_2=e^{-\mu t}\Phi_2(t),\ \text{где}\ \Phi_k(t)=e^{\int_{t_0}^{t}\alpha_k(t)\,dt},\ k=1,2,$$

а $\alpha_k(t)$ — почти-периодические функции, средние значения которых равны нулю.

Так как μ и $-\mu$ суть характеристические числа уравнения, можно заключить, что уравнение правильно по Ляпунову.

Далее, используя понятие асимптотически почти-периодической функции, введенной Фрешэ, доказываем следующую теорему: уравнение $y'+y^2-\lambda-q(t)=0$, при $\lambda>0$, $\sqrt{\lambda}>\sup Q(t)-\inf Q(t)$, где $Q(t)=\int q(t)\,dt$, а $q(t)$ — почти-периодичсекая функция, имеет два почти-периодических решения.

SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE RICCATI

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie l'équation de Riccati $y'+y^2+p(t)=0$ (1) où $p(t)$ est une fonction presque-périodique. On démontre les propositions suivantes:

1. Si l'équation (1) a deux solutions, $u(t)$ et $v(t)$ prolongeables sur tout l'axe (t) pour lesquelles $\inf_{-\infty<t<\infty}[v(t)-u(t)]>0$, $u(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions presque-périodiques.

2. Si l'équation (1) a deux solutions presque-périodiques $u(t)$ et $v(t)$, ces solutions satisfont à la condition:

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[v(t)-u(t)]>0.$$

3. Si l'équation (1) a deux solutions presque-périodiques $u(t)$ et $v(t)$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt.$$

On obtient comme conséquences de ces propositions:

1. Si $p(t)\leqslant 0$, l'équation (1) a deux solutions presque-périodiques.

2. Si l'équation (1) a deux solutions presque-périodiques, l'équation $x''+p(t)x=0$ (2) a deux solutions linéaires indépendantes, de la forme

$$x_1=e^{\mu t}\,\Phi_1(t),\ x_2=e^{-\mu t}\,\Phi_2(t),\ \Phi_k(t)=e^{\int_{t_0}^{t}\alpha_k(t)\,dt},\ k=1,2$$

et $\alpha_k(t)$ sont des fonctions presque-périodiques à valeurs moyennes nulles.

Etant donné que μ et $-\mu$ sont les nombres caractéristiques de l'équation, on peut conclure que l'équation (2) est régulière au sens de Liapounov.

En utilisant la notion de fonction asymptotiquement presque-périodique introduite par Fréchet, on démontre le théorème: l'équation $y'+y^2-\lambda-q(t)=0$, avec $\lambda>0$, $\sqrt{\lambda}>\sup_{-\infty<t<\infty}Q(t)-\inf_{-\infty<t<\infty}Q(t)$, où $Q(t)=\int q(t)\,dt$ et $q(t)$ est presque-périodique, a deux solutions presque-périodiques.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cameron, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts, Institute of Technology, 1936, v. XV, Nr. 1.
2. I. M. Sobol, Uceonie zapiski MGU, Matematika, 1952, t. V.
3. A. M. Liapunov, *Obşceaia zadacea ob ustoicivosti dvijenia*. Moscova-Leningrad, 1950.
4. M. Fréchet, Revue Scientifique, 1941.
5. A. Wintner, American Journal of Mathematics, 1951, t. 73, p. 368–380.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

ASUPRA UNOR ASPECTE ALE TEORIEI ECUAŢIILOR CU DIFERENŢE FINITE

DE

G. MARINESCU

INTRODUCERE

In teoria ecuaţiilor cu diferenţe finite, un rol deosebit îl au funcţiile periodice. Vom considera două puncte de vedere, dintre care unul se pare că este nou. In primul rând ne apare aspectul pur algebric al problemei, ca o consecinţă a analogiei dintre ecuaţiile cu diferenţe şi ecuaţiile diferenţiale. Se ştie, din teoria ecuaţiilor diferenţiale, că soluţia generală a unei ecuaţii liniare omogene este o combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi a unui sistem fundamental de soluţii. Acelaşi lucru se întâmplă, cu anumite modificări, şi în cazul ecuaţiilor cu diferenţe. Constantele sunt, în acest caz, funcţiile periodice. Din câte ştim însă, substratul comun al acestor teorii nu a fost pus în evidenţă. In lucrarea de faţă se construeşte o teorie generală, pur algebrică, luându-se ca bază un inel în care este definit un operator ce generalizează operaţia de derivare din inelele diferenţiale. Constantele sunt, în general, elementele pe care acest operator le transformă în elementul nul.

Al doilea punct de vedere este următorul: se consideră o funcţie de variabilă reală, definită pe semiaxa $[0, \infty]$, ca un şir de funcţii definite pe un interval finit. Funcţiile periodice, având perioada egală cu lungimea acestui interval, apar astfel ca şiruri constante, iar comportarea asimptotică a funcţiilor apare ca o problemă de convergenţă pentru şiruri. Aceste consideraţii ne conduc la o generalizare naturală şi necesară a teoremei lui Poincaré din teoria ecuaţiilor cu diferenţe finite.

Ecuaţii funcţionale liniare într'un inel comutativ

1. Fie $\mathfrak{F}$ un inel comutativ, cu element unitate (pe care îl vom nota cu 1) şi A un operator aditiv definit pe $\mathfrak{F}$ (şi cu valori tot în $\mathfrak{F}$), adică

$$A(x = y) + A(x) + A(y). \qquad x,\ y \in \mathfrak{F} \tag{1}$$

Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea elementelor din $\mathfrak{F}$ care sunt transformate în elementul 0 de operatorul A,

$$\mathcal{C} = A^{-1}(0). \tag{2}$$

Mai presupunem că operatorul A verifică relația

$$A(x\,y) = x\,A(y) + A(x)\,T(y), \tag{3}$$

unde T este un operator care transformă orice element inversabil într'un element inversabil.

Propoziția 1. *In condițiile enunțate, mulțimea* $\mathfrak{C}$ *este un subinel al inelului* $\mathfrak{F}$.

Demonstrație. Din condiția (1) rezultă că mulțimea $\mathfrak{C}$ este un subgrup al lui $\mathfrak{F}$ față de adunare, adică

$$x \in \mathfrak{C},\ y \in \mathfrak{C} \rightarrow A(x) = A(y) = 0 \rightarrow$$

$$A(x + y) = A(x) + A(y) = 0.$$

Stabilitatea față de înmulțire rezultă din condiția (3)

$$A(x) = A(y) = 0 \rightarrow A(x\,y) = 0.$$

2. In cele ce urmează vom presupune că mulțimea $\mathfrak{C}$ conține corpul K, care poate fi sau corpul numerelor reale, sau corpul numerelor complexe și că operatorul T este distributiv față de produs

$$T(x\,y) = T(x)\,T(y). \tag{4}$$

Atunci, inelul $\mathfrak{F}$ este, evident, un spațiu vectorial cu scalari în corpul K și putem enunța

Propoziția 2. *Operatorul* A *este liniar în spațiul vectorial* $\mathfrak{F}$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că A este omogen. Aceasta rezultă din (3)

$$A(\alpha\,x) = \alpha\,A(x) + A(\alpha)\,T(x) = \alpha\,A(x)\quad \alpha \in K,\ x \in \mathfrak{F}. \tag{5}$$

De asemenea, inelul $\mathfrak{F}$ este un modul peste inelul $\mathfrak{C}$ și avem

Propoziția 3. *Operatorul* A *este liniar în modulul* $\mathfrak{F}$.

Demonstrație. La fel ca pentru propoziția 2.

3. Proprietatea exprimată în propoziția 3 este aceea care joacă rolul esențial în teoria noastră.

In modulul $\mathfrak{F}$, mulțimea $\mathfrak{C}$ are rolul corpului de scalari al unui spațiu vectorial. Prin analogie cu spațiile vectoriale formate din funcții, unde scalarii sunt funcțiile constante, vom numi mulțimea $\mathfrak{C}$, mulțimea constantelor. Când vom vorbi de constante se înțelege că va fi vorba de elemente din mulțimea $\mathfrak{C}$ și nu numai din corpul K.

Dependența liniară a elementelor din $\mathfrak{F}$ va fi în legătură tot cu elementele din $\mathfrak{C}$, conform următoarelor definiții:

Spunem că elementele $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt liniar independente, dacă nu există între ele nicio relație de forma

$$a_1 x_1, + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0, \tag{6}$$

în care coeficienții $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathfrak{C}$, nu sunt toți nuli, și strict liniar independente dacă nicio expresie de forma

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ ($a_i \in \mathfrak{C}$, $a_i \neq 0$ cel puțin pentru un i) nu este un divizor al lui zero.

Dacă există o relație (6) cel puțin cu un coeficient a_i nesingular, elementele $x_1, x_2, \ldots x_n$ se numesc liniar dependente.

4. In studiul dependenței liniare intervine un determinant care generalizează wronskianul.

Intrebuințăm notația

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ A(x_1) & A(x_2) & \ldots & A(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{n-1}(x_1) & A^{n-1}(x_2) & \ldots & A^{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

Teorema 1. *Dacă elementele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt liniar dependente, atunci*

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A) = 0.$$

Demonstrație. Fie

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad (a_i \in \mathcal{C},\ i = 1, \ldots, n),$$

cu a_1 nesingular.

Printr'o transformare evidentă obținem relația

$$a_1 D(x_1, x_2, \ldots x_n; A) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & x_2 & \ldots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i A(x_i) & A(x_2) & \ldots & A(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i A^{n-1}(x_i) & A^{n-1}(x_2) & \ldots & A^{n-1}(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & x_2 & \ldots & x_n \\ A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) & A(x_2) & \ldots & A(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) & A^{n-1}(x_2) & \ldots & A^{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

de unde deducem

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A) = 0.$$

Teorema 2. *Dacă* $D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A)$ *este un element inversabil în* $\mathcal{F}$ *și* $D(x, x_1, \ldots, x_n; A) = 0$, *atunci elementele* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt liniar dependente și* x *este combinație liniară de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Demonstrație. Dacă în $D(x, x_1, \ldots, x_n; A)$ înlocuim, succesiv, ultima linie prin fiecare din celelalte linii, obținem n determinanți nuli. Desvoltarea acestor determinanți după elementele ultimei linii folosește aceiași minori ca și desvoltarea lui

$$D(x, x_1, \ldots, x_n, A).$$

Ținând seama și de condiția teoremei,

$$D(x, x_1, \ldots, x_n; A) = 0,$$

obţinem în definitiv $n + 1$ relaţii

$$bx + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = 0$$
$$bA(x) + b_1 A(x_1) + \ldots + b_n A(x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$bA^n(x) + b_1 A^n(x_1) + \ldots + b_n A^n(x_n) = 0,$$

unde $b = D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A)$ este un element inversabil.

Putem împărţi cu b şi avem

$$x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$
$$A(x) = c_1 A(x_1) + \ldots + c_n A(x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A^n(x) = c_1 A^n(x_1) + \ldots + c_n A^n(x_n).$$

Aplicăm acum operatorul A primelor n relaţii

$$A(x) = A(c_1) T(x_1) + c_1 A(x_1) + \ldots + A(c_n) T(x_n) + c_n A(x_n)$$
$$A^2(x) = A(c_1) TA(x_1) + c_1 A^2(x_1) + \ldots + A(c_n) TA(x_n) + c_n A^2(x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A^n(x) = A(c_1) TA^{n-1}(x_1) + c_1 A^{n-1}(x_1) + \ldots + A(c_n) TA^{n-1}(x_n) + c_n A^{n-1}(x_n)$$

şi scădem, respectiv, ultimele n relaţii

$$0 = A(c_1) T(x_1) + \ldots + A(c_n) T(x_n)$$
$$0 = A(c_1) TA(x_1) + \ldots + A(c_n) TA(x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = A(c_1) TA^{n-1}(x_1) + \ldots + A(c_n) TA^{n-1}(x_n).$$

Am obţinut un sistem omogen de n ecuaţii în necunoscutele $A(c_1), \ldots A(c_n)$. Determinantul acestui sistem

$$T(D(x_1, \ldots, x_n; A))$$

este inversabil, deci

$$A(c_1) = A(c_2) = \ldots = A(c_n) = 0.$$

Aceasta înseamnă că elementele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ aparţin mulţimii $\mathcal{C}_n$, deci, cu denumirea adoptată, sunt constante. Am obţinut astfel rezultatul teoremei

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (c_i \in \mathcal{C},\ i = 1, \ldots, n).$$

5. Teoremele precedente se aplică soluţiilor ecuaţiei

$$A^n(x) + a_1 A^{n-1}(x) + \ldots + a_n x_n = 0, \tag{7}$$

în care coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt elemente din $\mathcal{F}$.

Teorema 3. *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezintă un sistem de soluţii ale ecuaţiei (7), astfel încât $D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A)$ este un element inversabil în $\mathcal{F}$ atunci orice soluţie x a ecuaţiei (7) este de forma*

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \tag{8}$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sunt elemente din $\mathcal{F}$.

Demonstrație. Condiția ca x, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să fie soluții ale ecuației (7) ne dă un sistem omogen de $n+1$ ecuații în necunoscutele $1, a_1, \ldots, a_n$

$$A^n(x) + a_1 A^{n-1}(x) + \ldots + a_n x = 0$$

$$A^n(x_1) + a_1 A^{n-1}(x_1) + \ldots + a_n x_1 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^n(x_n) + a_1 A^{n-1}(x_n) + \ldots + a_n x_n = 0,$$

al cărui determinant este

$$\begin{vmatrix} A^n(x) & A^{n-1}(x) & \ldots\ldots & x \\ A^n(x_1) & A^{n-1}(x_1) & \ldots\ldots & x_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A^n(x_n) & A^{n-1}(x_n) & \ldots\ldots & x_n \end{vmatrix} = D(x, x_1, \ldots x_n; A).$$

Cum sistemul admite o soluție cu un element nesingular (elementul 1), determinantul său este nul. Putem aplica atunci teorema 2 și afirmația teoremei noastre rezultă.

6. Se știe că în cazul ecuațiilor diferențiale obișnuite, condiția ca wronskianul să fie inversabil se reduce la condiția ca el să nu fie identic nul. Aceasta se datorește faptului că wronskianul unui sistem de soluții al ecuației corespunzătoare verifică o anumită ecuație diferențială.

Ultima proprietate se poate extinde în cazul operatorilor A, supuși încă unei restricții, după cum se vede din

T e o r e m a 4. *Dacă operatorul T din formula (3) este identitatea și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt soluții ale ecuației (7), atunci determinantul $D = D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A)$ verifică ecuația*

$$A(D) = -a_1 D.$$

Demonstrație. Dacă T este identitatea, atunci

$$A(xy) = x A(y) + y A(x)$$

și $A(D)$ va fi, ca și în cazul derivatei obișnuite, o sumă de n determinanți obținuți prin aplicarea operației A fiecărei linii din D. Dintre acești determinanți numai ultimul nu este nul, deci

$$A(D) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ A(x_1) & A(x_2) & \ldots\ldots & A(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A^{n-2}(x_1) & A^{n-2}(x_2) & \ldots\ldots & A^{n-2}(x_n) \\ A^n(x_1) & A^n(x_2) & \ldots\ldots & A^n(x_n) \end{vmatrix}$$

Inlocuind în ultima linie elementele $A^n(x_i)$ prin expresiile lor scoase din ecuaţia (7), ajungem la concluzia teoremei.

7. Consideraţiile asupra ecuaţiei (7) rămân valabile dacă coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt luaţi dintr'un inel $\mathfrak{F}^*$ al cărui subinel este $\mathfrak{F}$.

Pentru cazul $T = I$, adică al inelelor diferenţiale, rezultate analoage cu cele expuse aici, privind însă sistemele de ordinul întâi, se găsesc în lucrările lui P. Hebroni [1], care porneşte dela un punct de vedere deosebit şi întrebuinţează metode mai puţin elementare.

8. Considerăm ca inel $\mathfrak{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor complexe de variabilă reală şi ca operator A, diferenţa de pas egal cu unitatea adică

$$A(x(t)) = x(t+1) - x(t). \tag{9}$$

Mulţimea $\mathfrak{C}$ este formată din toate funcţiile periodice de perioadă 1.

Relaţiile (3) şi (4) sunt satisfăcute dacă se ia ca operator T translaţia de pas 1

$$T(x(t)) = x(t+1).$$

Proprietatea (3) a operatorului A rezultă aici din relaţia simplă dintre A şi T

$$A = T - I \tag{10}$$

şi din (4).

Intr'adevăr, din (4) şi (10) deducem

$$A(xy) = (T-I)(xy) = T(xy) - xy =$$

$$= T(x)\,T(y) - xy = T(x)\,T(y) - xy + xT(y) - x\,T(y) =$$

$$= x(T(y) - y) + (T(x) - x)\,T(y) = xA(y) + A(x)\,T(y).$$

Tot datorită relaţiei (10), determinantul $D(x_1, \ldots, x_n; A)$ se reduce la $D(x_1, \ldots, x_n; T)$. Acest fapt ne explică de ce în raţionamentele clasice asupra ecuaţiilor cu diferenţe finite apare direct determinantul $D(x_1, \ldots, x_n; T)$, astfel încât analogia cu ecuaţiile diferenţiale nu este perfectă.

Funcţiile de variabilă reală considerate ca şiruri de funcţii periodice

1. O funcţie $x(t)$, cu valori complexe, definită pe toată semiaxa reală $[0, +\infty)$, poate fi considerată ca un şir de funcţii $\{x_n(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$, definite pe intervalul $[0, 1)$, unde

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= x(t+1) \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad 0 \leqslant t < 1 \\ x_n(t) &= x(t+n) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Şirurile constante, pentru care $x_n(t) = x_0(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ corespund funcţiilor periodice de perioadă 1.

Astfel, mulțimea tuturor funcțiilor complexe, definite pe semiaxa $[0, +\infty)$, adică a tuturor șirurilor $\{x_n(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$, definite pe intervalul $[0, 1)$, apare ca un modul peste inelul funcțiilor periodice, adică al șirurilor constante.

Acest punct de vedere clarifică unele probleme din calculul cu diferențe finite, dându-ne în același timp alte interpretări, importante ca atare, ale unor rezultate cunoscute.

Vom examina aici câteva din aceste chestiuni.

2. *O ecuație liniară omogenă* se scrie de obicei sub forma

$$x(t+k) + a_1(t)\, x(t+k-1) + \ldots + a_k(t)\, x(t) = 0, \tag{12}$$

unde $a_i(t)$ $(i=1, \ldots, k)$ sunt funcții definite pe semiaxa $[0, +\infty)$ și $x(t)$ funcția necunoscută, cu același domeniu de definiție.

Dacă se consideră în loc de $x(t)$ șirul $\{x_n(t)\}$ definit de formulele (11) și în loc de coeficienții $a_i(t)$ șirurile $\{a_i^{(n)}(t)\}$, unde

$$a_i^{(n)}(t) = a_i(t+n) \qquad 0 \leqslant t < 1\,; \quad n = 0, 1, \ldots$$

ecuația (12) se transformă în sistemul

$$x_{n+k}(t) + a_1^{(n)}(t)\, x_{n+k-1}(t) + \ldots + a_k^{(n)}\, x_n(t) \tag{13}$$
$$0 \leqslant t < 1\,; \quad n = 0, 1, \ldots).$$

Soluția generală a acestui sistem depinde, evident, de k funcții arbitrare, definite pe intervalul $[0, 1)$. O soluție oarecare, considerată ca șir $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t < 1)$ se obține astfel: se dau cele k funcții inițiale $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t)$ și apoi

$$x_k(t) = -[a_1^{(0)}(t)\, x_{k-1}(t) + \ldots + a_k^{(0)}(t)\, x_0(t)]$$

$$\begin{aligned} x_{1+k}(t) &= -[a_1^{(1)}(t)\, x_k(t) + \ldots + a_k^{(1)}\, x_1(t)] = \\ &= a_1^{(1)}(t)\,[a_1^{(0)}(t)\, x_{k-1}(t) + \ldots + a_k^{(0)}(t)\, x_0(t)] - \\ &- a_2^{(1)}(t)\, x_{k-1}(t) - \ldots - a_k^{(1)}(t)\, x_1(t) = \\ &= [a_1^{(1)}(t)\, a_1^{(0)}(t) - a_2^{(1)}(t)]\, x_{k-1}(t) + \\ &+ [a_1^{(1)}(t)\, a_2^{(0)}(t) - a_3^{(1)}(t)]\, x_{k-2}(t) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [a_1^{(1)}(t)\, a_{k-1}^{(0)}(t) - a_k^{(1)}(t)]\, x_1(t) + \\ &+ a_1^{(1)}(t)\, a_k^{(0)}(t)\, x_0(t) \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

Dacă funcțiile inițiale $x_0(t), \ldots, x_{k-1}(t)$ sunt luate arbitrar, aceste formule ne dau soluția generală a ecuației (12), echivalentă cu relația de recurență (13).

3. *Comportarea asimptotică a unei funcții* $y(t)$, definită pe toată semiaxa $[0, +\infty)$, se transformă într'o problemă de convergență uniformă pe intervalul $[0, 1)$, datorită următoarei propoziții:

Propoziţia 4. *Fie* $y(t)$ *o funcţie definită pe semiaxa* $[0, +\infty)$ *şi* $\{y_n(t)\}$ *şirul de funcţii definite pe intervalul* $[0, 1)$ *conform formulelor* (11). *Condiţia*

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \alpha \tag{14}$$

este echivalentă cu condiţia

$$\lim_{n \to \infty} y_n(t') = \alpha \text{ uniform pentru } t' \in [0,1). \tag{15}$$

Demonstraţie. a) Presupunem că este îndeplinită prima condiţie. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N > 0$, astfel încât $t > N$ implică

$$| y(t) - \alpha | < \varepsilon.$$

Dacă $t' \in [0, 1)$ şi $n > N$, atunci

$$| y_n(t') - \alpha | < \varepsilon.$$

b) Presupunem îndeplinită a doua condiţie. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N, astfel încât $n > N$ implică

$$| y_n(t') - \alpha | < \varepsilon \text{ oricare ar fi } t' \in [0, 1).$$

Cum orice $t > N$ este de forma $t' + n$ cu $t' \in [0, 1)$ şi $n \geqslant N$, se verifică şi prima condiţie.

Analog se demonstrează şi

Propoziţia 5. *Pentru ca funcţia* $y(t)$ *să fie asimptotic periodică, adică*

$$\lim_{t \to \infty} | y(t) - \alpha(t) | = 0,$$

unde $\alpha(t)$ *este o funcţie periodică de perioadă* 1, *este necesar şi suficient ca*

$$\lim_{n \to \infty} | y_n(t') - \alpha(t') | = 0 \quad \text{uniform pentru } t' \in [0, 1).$$

4. Teorema lui Poincaré [2] *) se interpretează astfel în felul următor:

Fie $\{a_1^{(n)}(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}, \ldots, \{a_k^{(n)}(t)\}_{0 \leqslant n < \infty}$

k şiruri de funcţii definite pe intervalul $[0, 1)$ *şi*

$$\lim_{n \to \infty} a_i^{(n)}(t) = \alpha_i \text{ uniform pentru } t \in [0,1).$$

Dacă $\{x_n(t)\}$ *este un şir de funcţii definit de relaţia de recurenţă* (13), *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}(t)}{x_n(t)} = \lambda,$$

unde λ *este una din rădăcinile ecuaţiei*

$$\lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k = 0,$$

presupunând că această ecuaţie are rădăcinile diferite în modul ($|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ *pentru* $i \neq j$).

*) p. 415.

Pentru cazul $k = 2$, se obține convergența uniformă a expresiilor de forma

$$a^{(n)}(t) + \cfrac{b^{(n)}(t)}{a^{(n-1)}(t) + \cfrac{b^{(n-1)}(t)}{a^{(n-2)}(t) + \ddots + b_0(t)\dfrac{x_0(t)}{x_1(t)}}}$$

expresii ce se pot generaliza ușor pentru orice k.

Generalizarea teoremei lui Poincaré

1. Analiza făcută mai înainte ne arată că, în teorema lui Poincaré, faptul că ecuația caracteristică are coeficienți constanți (în sens clasic) nu este esențial, pentrucă față de comportarea asimptotică a funcțiilor, rolul constantelor îl joacă funcțiile periodice (șirurile constante). Acest fapt ne sugerează următoarea generalizare a teoremei lui Poincaré:

Teorema 5. *Considerăm ecuația*

$$x(t+k) + a_1(t)\,x(t+k-1) + \ldots + a_k(t)\,x(t) = 0 \tag{16}$$

și presupunem că

$$\lim_{t\to\infty} |\,a_i(t) - \alpha_i(t)\,| = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{17}$$

$\alpha_i(t)$ fiind funcții periodice de perioadă 1.

Fie

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$$

rădăcinile ecuației

$$\lambda^k + \alpha_1(t)\,\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k(t) = 0. \tag{18}$$

Presupunem că sunt verificate relațiile

$$0 < \lambda_0 < |\,\lambda_k(t)\,| < |\,\lambda_{k-1}(t)\,| < \ldots < |\,\lambda_1(t)\,| < M \tag{19}$$

și

$$\sup_{t\in[0,1)} \frac{|\,\lambda_i(t)\,|}{|\,\lambda_j(t)\,|} = \rho_{ij} < 1 \qquad (i > j). \tag{20}$$

Atunci, oricare ar fi soluția $x(t)$ a ecuației (16), ea verifică relația

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{x(t+1)}{x(t)} - \lambda_i(t) \right| = 0, \tag{21}$$

unde $\lambda_j(t)$ este una din rădăcinile ecuației (18).

Demonstrație. Adaptăm demonstrația dată în [2] *), insistând mai mult asupra punctelor care necesită modificări.

*) p. 416–428.

Se consideră funcţiile $u_1(t), \ldots, u_k(t)$, definite de sistemul de ecuaţii

$$x(t) = u_1(t) + \ldots + u_k(t)$$

$$x(t+1) = \lambda_1(t)\, u_1(t) + \ldots + \lambda_k(t)\, u_k(t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x(t+k-1) = [\lambda_1(t)]^{k-1} u_1(t) + \ldots + [\lambda_k(t)]^{k-1} u_k(t).$$

Dacă

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

atunci

$$u_i(t)\, \varphi'_\lambda(\lambda_i(t)) = x(t+k-1) + \sum_{p=0}^{k-2} x(t+p)\, q_{i,p-1}(t),$$

unde $q_{i,p-1}$ sunt coeficienţii polinomului $\dfrac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$ [2] *).

Putem schimba t cu $t+1$, pentrucă λ_i şi coeficienţii $q_{i,p-1}$ sunt funcţii periodice, deci

$$u_i(t+1)\, \varphi'(\lambda_i) = x(t+k) + \sum_{p=1}^{k-1} q_{i,p-1}\, x(t+p). \tag{22}$$

Notăm

$$a_i(t) = \alpha_i(t) + \eta_i(t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

unde $|\eta_i(t)| \to 0$ când $t \to 0$.

Atunci, ecuaţia (16) se scrie

$$x(t+k) = -\sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p(t)\, x(t+p) - \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(t)\, x(t+p). \tag{23}$$

Din relaţiile (22) şi (23) deducem

$$u_i(t+1)\, \varphi'(\lambda_i) = -\sum_{p=0}^{k-1} \alpha_p\, x(t+p) + \sum_{p=1}^{k-1} q_{i,p-1}\, x(t+p) -$$

$$- \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(t)\, x(t+p)$$

sau, luând $q_{i,-1} = 0$,

$$u_i(t+1)\, \varphi'(\lambda_i) = \sum_{p=0}^{k-1} (q_{i,p-1} - \alpha_p)\, x(t+p) - \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(t)\, x(t+p).$$

Insă

$$q_{i,p-1} - \alpha_p = \lambda_i\, q_{i,p},$$

deci

$$u_i(t+1)\, \varphi'(\lambda_i) = \lambda_i \sum_{p=0}^{k-1} q_{i,p}\, x(t+p) - \sum_{p=0}^{k-1} \eta_p(t)\, x(t+p).$$

*) p. 416—419.

Folosind iar formula (22) și eliminând pe $x(t+p)$, se obține, în definitiv

$$u_i(t+1) = \lambda_i(t)\, u_i(t) + \sum_{p=0}^{k-1} \varepsilon_{ip}(t)\, u_p(t), \tag{24}$$

unde $\varepsilon_{ip}(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$, oricare ar fi i și p (această relație este asigurată de faptul că toți factorii periodici care intervin în formule sunt mărginiți).

Considerăm acum din nou funcțiile

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_n(t) \tag{25}$$

și fixăm pe $t = s$. Pentru fiecare s, printre numerele (25) există un prim număr de modul maxim.

Indicele acestui număr îl notăm cu j_s și se bucură de proprietățile

$$\left.\begin{aligned} &|u_{j_s}(s)| > 0 \\ &|u_{j_s}(s)| > |u_i(s)| \text{ pentru } i < j_s \\ &|u_{j_s}(s)| \geqslant |u_i(s)| \text{ pentru } i > j_s. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Vom arăta că există un N astfel încât $s > N$ implică

$$j_s \geqslant j_{s+1}. \tag{27}$$

Dacă notăm

$$\rho_i(t) = |\lambda_i(t)| \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

avem, pentru $i > j$,

$$\frac{\rho_i(t)}{\rho_j(t)} \leqslant \rho_{ij} < 1,\ \rho_{ij} \text{ fiind independent de } t.$$

Putem lua un număr $\delta > 0$ astfel încât

$$\frac{\rho_i(t) + \delta}{\rho_j(t) - \delta} \leqslant \rho'_{ij} < 1.$$

Fie N astfel încât pentru $s > N$,

$$|\varepsilon_{jp}(s) < \frac{\delta}{k} \qquad (p = 0, \ldots, k-1;\ j = 1, \ldots, k).$$

Dacă în relația (24) punem $i = j_s$, obținem

$$\begin{aligned} |u_{j_s}(s+1)| &\geqslant \rho_{j_s}(s)\,|u_{j_s}(s)| - \left|\sum_{p=0}^{k-1} \varepsilon_{j_s p}\ u_p\ (s)\right| \geqslant \\ &\geqslant \rho_{j_s}(s)\,|u_{j_s}(s)| - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\delta}{k}\,|u_p(s)| \geqslant \\ &\geqslant \rho_{j_s}(s)\,|u_{j_s}(s)| - k\,\frac{\delta}{k}\,|u_{j_s}(s)| \geqslant \\ &\geqslant |u_{j_s}(s)|\,(\rho_{j_s}(s) - \delta). \end{aligned} \tag{28}$$

Analog se obţine

$$u_{j_{s+1}}(s+1) \leqslant (\rho_{j_{s+1}}(s) + \delta) \mid u_{j_s}(s) \mid, \tag{29}$$

de unde,

$$\left| \frac{u_{j_{s+1}}(s+1)}{u_{j_s}(s+1)} \right| \leqslant \frac{\rho_{j_{s+1}}(s) + \delta}{\rho_{j_s}(s) - \delta}.$$

Dacă $j_s < j_{s+1}$, avem

$$\frac{u_{j_{s+1}}(s)}{u_{j_s}(s)} \leqslant 1$$

şi

$$\frac{\rho_{j_{s+1}}(s) + \delta}{\rho_{j_s}(s) - \delta} \leqslant \rho_{j_{s+1} j_s} < 1;$$

deducem deci

$$\mid u_{j_{s+1}}(s+1) \mid < \mid u_{j_s}(s+1) \mid,$$

ceea ce contrazice definiţia indicelui j_s.

Am arătat astfel că $j_s \geqslant j_{s+1}$ pentru orice $s > N$. Aceasta înseamnă că există un j, astfel încât

$$\mid u_i(t) \mid \leqslant \mid u_j(t) \mid \quad (i = 1, \ldots, k),$$

pentru toţi $t > t_0$, deci că printre funcţiile $u_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, există una cu cea mai rapidă creştere.

Vom arăta acum că raportul $\dfrac{u_i(t)}{u_j(t)}$ tinde către 0 când $t \to \infty$, oricare ar fi $i \neq j$.

Presupunem întâi $i < j$. Dacă afirmaţia noastră nu este adevărată, există

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mid u_i(t) \mid}{\mid u_j(t) \mid} = \alpha > 0$$

şi un şir $\{t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots\}$, t_p astfel încât

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mid u_i(t_p) \mid}{\mid u_j(t_p) \mid} = \alpha.$$

Utilizând relaţia (24) şi proprietăţile (26), valabile pentru indicele j, obţinem

$$\mid u_i(t+1) \mid \geqslant \rho_i(t) \mid u_i(t) \mid - \delta \mid u_j(t) \mid$$

$$\mid u_j(t+1) \mid \leqslant \rho_j(t) \mid u_j(t) \mid + \delta \mid u_j(t) \mid,$$

de unde

$$\frac{|u_i(t+1)|}{|u_j(t+1)|} \geqslant \frac{\rho_i(t)\,|u_i(t)| - \delta\,|u_j(t)|}{\rho_j(t)\,|u_j(t)| + \delta\,|u_j(t)|} = \frac{\dfrac{\rho_i(t)}{\rho_j(t)} \cdot \dfrac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} - \dfrac{\delta}{\rho_j(t)}}{1 + \dfrac{\delta}{\rho_j(t)}}, \tag{30}$$

deci

$$\frac{|u_i(t+1)|}{|u_j(t+1)|} \geqslant \frac{\dfrac{\rho_i(t)}{\rho_j(t)} \cdot \dfrac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} - \dfrac{\delta}{\lambda_0}}{1 + \dfrac{\delta}{\lambda_0}} \geqslant \frac{\dfrac{1}{\rho_{ji}} \cdot \dfrac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} - \dfrac{\delta}{\lambda_0}}{1 + \dfrac{\delta}{\lambda_0}},$$

unde

$$\rho_{ji} = \sup \frac{\rho_j(t)}{\rho_i(t)} < 1 \text{ (pentrucă } i < j).$$

Inlocuind pe t prin t_p şi trecând la limită pentru $p \to \infty$, obţinem

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{|u_i(t_p+1)|}{|u_j(t_p+1)|} \geqslant \frac{\dfrac{\alpha}{\rho_{ji}} - \dfrac{\delta}{\lambda_0}}{1 + \dfrac{\delta}{\lambda_0}}$$

şi, cum δ poate fi oricât de mic,

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{|u_i(t_p+1)|}{|u_j(t_p+1)|} \geqslant \frac{\alpha}{\rho_{ji}} > \alpha.$$

Insă de altă parte

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{|u_i(t_p+1)|}{|u_j(t_p+1)|} \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} = \alpha.$$

Această contradicţie ne dovedeşte că într'adevăr, dacă $i < j$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} = 0.$$

Presupunem acum că $i > j$. In acest caz este valabilă inegalitatea

$$\frac{|u_i(t+1)|}{|u_j(t+1)|} \leqslant \frac{\rho_i(t)\dfrac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} + \delta}{\rho_j(t) - \delta}. \tag{31}$$

Fie

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|u_i(t)|}{|u_j(t)|} = \alpha > 0.$$

Alegem un şir $\{t_p\}$, $t_p \to \infty$ astfel încât

$$\lim_{p\to\infty} \frac{|u_i(t_p+1)|}{|u_j(t_p+1)|} = \alpha$$

şi notăm

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{|u_i(t_p)|}{|u_j(t_p)|} = \beta \leqslant \alpha.$$

Inlocuind pe t prin t_p în egalitatea (31), obţinem

$$\frac{|u_i(t_p+1)|}{|u_j(t_p+1)|} \leqslant \frac{\frac{\rho_i(t_p)}{\rho_j(t_p)} \cdot \frac{|u_i(t_p)|}{|u_j(t_p)|} \frac{\delta}{\rho_j(t_p)}}{1-\frac{\delta}{\rho_j(t_p)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{\rho_i(t_p)}{\rho_j(t_p)} \cdot \frac{|u_i(t_p)|}{|u_j(t_p)|} + \frac{\delta}{\lambda_0}}{1-\frac{\delta}{\lambda_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_{ij} \frac{|u_i(t_p)|}{|u_j(t_p)|} + \frac{\delta}{\lambda_0}}{1-\frac{\delta}{\lambda_0}},$$

şi, trecând la limită pentru $p \to \infty$,

$$\alpha \leqslant \frac{\rho_{ij}\beta + \frac{\delta}{\lambda_0}}{1-\frac{\delta}{\lambda_0}}.$$

Cum δ poate fi oricât de mic,

$$\alpha \leqslant \rho_{ij}\beta < \beta,$$

ceea ce contrazice definiţia lui β.

Rezultă de aici că $\alpha = 0$ şi în cazul $i < j$.

Revenim acum la expresia lui $x(t)$ şi a lui $x(t+1)$ în funcţie de $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ şi considerăm rapoartele

$$\frac{x(t)}{u_j(t)} = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \frac{u_i(t)}{u_j(t)}$$

şi

$$\frac{x(t+1)}{u_j(t)} = \lambda_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i(t)\, u_i(t)}{u_j(t)}.$$

In baza celor stabilite mai sus,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{u_j(t)} = 1,$$

şi

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{x(t+1)}{u_j(t)} - \lambda_j(t) \right| = 0.$$

De aici deducem

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{x(t+1)}{x(t)} - \lambda_j(t) \right| =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left| \left(\frac{x(t+1)}{u_j(t)} - \lambda_j(t) \right) \frac{u_j(t)}{x(t)} + \lambda_j(t) \left(\frac{u_j(t)}{x(t)} - 1 \right) \right| = 0,$$

şi teorema este astfel complet demonstrată.

О НЕКОТОРЫХ ЧЕРТАХ ТЕОРИИ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части устанавливается алгебраическая теория, объединяющая теорию линейных дифференциальных уравнений и теорию конечноразностных уравнений. Речь идет об уравнении формы (7), в коммутативном кольце $\mathcal{F}$, A будучи оператором в $\mathcal{F}$ удовлетворяющим условиям (1), (3), (4).

В этой теории периодические функции являются постоянными оператора A, то есть элементами x, для которых $A(x) = 0$.

Во второй части функции действительной переменной считаются рядами функций, определенных на $[0, 1]$. Периодические функции являются тогда постоянными рядами и асимптотическое поведение функций является задачей сходимости рядов. Эта точка зрения приводит нас к нижеследующему обобщению теоремы Пуанкарэ.

Теорема 5. Пусть дано уравнение

$$x(t+k) + a_1(t)\, x(t+k-1) + \ldots + a_k(t)\, x(t) = 0, \tag{16}$$

где

$$\lim_{t \to \infty} \left| a_i(t) - \alpha_i(t) \right| = 0, \tag{17}$$

где $\alpha_i(t)$ — периодические функции.

Если $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$ корни уравнения

$$\lambda^k + \alpha_1(t)\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k(t) = 0, \tag{18}$$

предположим, что

$$0 < \lambda_0 < |\lambda_k(t)| < |\lambda_{k-1}(t)| < \ldots < |\lambda_1(t)| < M \tag{19}$$

и

$$\sup_{t\in[0,1)} \frac{|\lambda_i(t)|}{|\lambda_j(t)|} = \rho_{ij} < 1 \ (i > j) \tag{20}$$

В этих условиях всякое решение $x(t)$ уравнения (16) удовлетворяет соотношению вида

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{x(t+1)}{x(t)} - \lambda_j(t) \right| = 0, \tag{21}$$

где $\lambda_j(t)$ корень уравнения (18).

Доказательство приспособлено по (1), стр. 416—428.

CERTAINS ASPECTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS À DIFFÉRENCES FINIES

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de cette Note, on établit une théorie algébrique comprenant en même temps la théorie des équations différentielles linéaires et celle des équations à différences finies. Il s'agit d'une équation de la forme (7), dans un anneau commutatif $\mathcal{F}$, A étant un opérateur dans $\mathcal{F}$, satisfaisant aux conditions (1), (3), (4).

Dans cette théorie, les fonctions périodiques sont les constantes de l'opérateur A, c'est-à-dire les éléments x pour lesquels $A(x) = 0$.

Dans la deuxième partie, les fonctions d'une variable réelle sont considérées comme des suites de fonctions définies sur $[0,1)$. Les fonctions périodiques sont alors les suites constantes et le comportement asymptotique des fonctions est un problème de convergence des suites. Ce point de vue conduit à la généralisation suivante du théorème de Poincaré:

Théorème 5. *Soit l'équation*

$$x(t+k) + a_1(t)\,x(t+k-1) + \ldots + a_k(t)\,x(t) = 0 \tag{16}$$

où

$$\lim_{t\to\infty} |a_i(t) - \alpha_i(t)| = 0, \tag{17}$$

$\alpha_i(t)$ étant des fonctions périodiques.
Si $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$ sont les racines de l'équation

$$\lambda^k + \alpha_1(t)\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k(t) = 0, \tag{18}$$

supposons avoir

$$0 < \lambda_0 < |\lambda_k(t)| < |\lambda_{k-1}(t)| < \ldots < |\lambda_1(t)| < M \tag{19}$$

et

$$\sup_{t\in[0,1)} \frac{|\lambda_i(t)|}{|\lambda_j(t)|} = \rho_{ij} < 1 \quad (i > j). \tag{20}$$

Dans ces conditions, toute solution $x(t)$ *de l'équation* (16) *vérifie une relation de la forme*

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{x(t+1)}{x(t)} = \lambda_j(t) \right| = 0 \tag{21}$$

où $\lambda_j(t)$ *est une racine de l'équation* (18).

La demonstration est une adaptation de [1], p. 416 — 428.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Hebroni, Compositio Mathematica, 1938, v. 5, p. 403—429; v 6, p. 258—284; 1939, v. 7, p. 229—252.
2. A. O. Ghelfond, *Iscislenie konecinth raznostei*, Moscova-Leningrad, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

ASUPRA UNEI NOI ECUAŢII A TELEGRAFIŞTILOR

DE

SERGIU VASILACHE

1. Se ştie că în liniile de transmisie a energiei electrice intensitatea de curent electric $i(z, t)$ şi tensiunea $V(z, t)$, la distanţa z de un punct 0 luat ca origine, sunt date de sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{aligned} L\,i_t + Ri &= V_z\ ^*), \\ CV_t + GV &= -\,i_z, \end{aligned} \tag{1}$$

unde L, C, R, G sunt constantele de repartiţie ale liniei de transmisie (inductanţa, capacitatea, rezistenţa şi perdintanţa pe unitatea de lungime a liniei respective).

Eliminarea în sistemul (1) a uneia din funcţiile necunoscute $i(z, t)$ sau $V(z, t)$ conduce la o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea, cunoscută sub numele de ecuaţia telegrafiştilor.

Intr'o lucrare apărută în 1948 [1], matematicianul sovietic M. I. Rozovski a propus o nouă ecuaţie a telegrafiştilor, în care se ţine seama de fenomenele de ereditate magnetică şi dielectrică, ceea ce face ca formulele clasice

$$B = \mu H \quad \text{şi} \quad D = \varepsilon E$$

ale inducţiei magnetice şi inducţiei electrice să fie înlocuite prin relaţiile mai puţin simple

$$B = \mu H + \int_{-\infty}^{t} \mu_1 (t-s)\, H(s)\, ds, \quad D = \varepsilon E + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_1 (t-s)\, E(s)\, ds. \tag{2}$$

In aceste condiţii, M. I. Rozovski înlocueşte sistemul (1) prin sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale

$$\begin{aligned} Ri + Li_t + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)\, i_s(z, s)\, ds &= -\,V_z, \\ GV + V_t + \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\, V_s(z, s)\, ds &= i_{tz} \end{aligned} \tag{3}$$

*) Pentru simplificarea notaţiilor vom scrie derivatele parţiale sub forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_t, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = V_z, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = V_{zz}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} = V_{zt}, \text{ etc.}$$

pe care, neglijând fenomenele de ereditate pentru $t < 0$, îl înlocueşte apoi prin sistemul relativ mai simplu

$$\begin{aligned} Ri + L_t i + \int_0^t h(t-s)\, i_s(z,s)\, ds &= -V_s, \\ GV + CV_t + \int_0^t G(t-s)\, V_s(t,s)\, ds &= -i_s. \end{aligned} \tag{4}$$

Eliminând în (4) pe $i(z,t)$, autorul ajunge la o ecuaţie integro-diferenţială de ordinul al doilea. Căutând o soluţie de forma

$$V(z,t) = \sum_0^\infty{}_k\, T_k(t) \sin\frac{k\pi z}{b},$$

obţine pentru funcţiile $T_k(t)$ ecuaţii integro-diferenţiale cu coeficienţi constanţi şi nuclee de forma $K_k(t-s)$.

2. Intr'o lucrare anterioară [2], noi am propus de asemenea o nouă ecuaţie a telegrafiştilor, în care am presupus că parametrii liniei de transmisie L (inductanţa) şi C (capacitatea) sunt funcţii periodice de variabila timp t, ceea ce ne-a condus la sistemul

$$\begin{aligned} (Li)_t + Ri &= -V_z, \\ (CV)_t + GV &= -i_z. \end{aligned} \tag{5}$$

In lucrarea de faţă reluăm această problemă şi considerăm cazul mai general al unei linii de transmisie cu parametrii L şi C funcţii periodice de variabila t şi unde, în plus, ţinem seama de asemenea şi de fenomenele de ereditate magnetică şi dielectrică. In aceste condiţii sistemul (5) este înlocuit prin sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale

$$\begin{aligned} (Li)_t + R_i + \int_{-\infty}^t \varphi(t-\tau)\, i_\tau(z,\tau)\, d\tau &= -V_z, \\ (CV)_t + GV + \int_{-\infty}^t \Psi(t-s)\, V_\tau(z,\tau)\, d\tau &= -i_z. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă presupunem linia în repaus pentru $t < 0$, putem lua în (6) integralele numai dela 0 la t şi obţinem astfel sistemul

$$\begin{aligned} (L_t + R)\, i + Li_t + \int_0^t \varphi(t-\tau)\, i_\tau(z,\tau)\, d\tau &= V_z(z,t), \\ (C_t + G)\, V + CV_t + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, V_\tau(z,\tau)\, d\tau &= -i_z(z,t). \end{aligned} \tag{7}$$

Derivând prima ecuaţie din (7) în raport cu z şi a doua în raport cu t, obţinem

$$\begin{aligned} (L_t + R)\, i_z + Li_{zt} + \int_0^t \varphi(t-\tau)\, i_z(z,\tau)\, d\tau &= -V_{zz}, \\ C_{tt}\, V + [2C_t + G + \varphi(0)]\, V_t + CV_{tt} + \int_0^t \Psi(t-\tau)\, V_\tau(z,\tau)\, d\tau &= -i_{zt}. \end{aligned} \tag{8}$$

Inlocuind în prima ecuație din (8) pe i_z prin expresia dată de a doua ecuație (7), iar pe i_{zt} prin expresia dată de a doua ecuație (8), obținem ecuația integro-diferențială de ordinul al doilea

$$V_{zz} = [(L_t + R)(C_t + G) + C_{tt}]\, V + [(L_t + R)\, C + L\,(2\,C_t + G + \Psi(0))]\, V_t + L\,C\,V_{tt} +$$
$$+ \int_0^t [\Psi(t-\tau) + (2\,C_\tau + G + \Psi(0)]\, \varphi(t-\tau)\, V_\tau(z,\tau)\, d\tau + \tag{9}$$
$$+ \int_0^t \varphi(t-\tau)\, d\tau \int_0^\tau \Psi(\tau - s)\, V_s(z,s)\, ds + \int_0^t \varphi(t-\tau)\,(C_{tt}\, V + C\, V_{\tau\tau})\, d\tau.$$

Dar după formula lui Dirichlet avem

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)\, d\tau \int_0^\tau \Psi(\tau - s)\, V_s(z,s)\, ds = \int_0^t V_\tau(z,\tau)\, d\tau \int_\tau^t \varphi(t-s)\, \Psi(s-\tau)\, ds$$

și ecuația (9) ia forma

$$V_{zz} - a(t)\, V_{tt} + b(t)\, V_t + C(t)\, V = \int_0^t [K_{00}(t,\tau) + K_{01}(t,\tau)\, V_\tau(z,\tau) + \tag{10}$$
$$+ K_{02}(z,\tau)\, V_{\tau\tau}(z,\tau)]\, d\tau,$$

unde

$$a(t) = L(t)\, C(t); \quad -b(t) = (L_t + R)\, C + L\,(2\,C_t + G + \Psi(0)); \tag{11}$$
$$-C(t) = (L_t + R)\,(C_t + G) + C_{tt}$$

și

$$K_{00}(t,\tau) = \varphi(t-\tau)\, C_{\tau\tau},$$
$$K_{01}(t,\tau) = \psi(t-\tau) + [2\,C_\tau + G + \psi(0)]\, \varphi(t-\tau) + \int_\tau^t \varphi(t-s)\, \psi(s-\tau)\, ds, \tag{12}$$
$$K_{02}(t,\tau) = \varphi(t-\tau)\, C(\tau).$$

3. Soluțiile ecuației (10) care interesează aplicațiile sunt cele care verifică următoarele condiții la limită și condiții inițiale:

a) *Linie semiinfinită, în repaus pentru* $t < 0$, *și căreia i se aplică în momentul* $t = 0$ *o forță electromotoare* $E(t)$.

Vom avea deci

$$i(z,0) = 0, \qquad V(z,0) = 0,$$
$$i_t(z,0) = 0, \qquad V_t(z,0) = 0, \tag{13}$$
$$V(0,t) = E(t) \text{ pentru } t \geqslant 0.$$

b) *Linie de lungime* l, *închisă pe o impedanță* Z_0; *de unde condițiile*

$$i(z,0) = 0, \qquad V(z,0) = 0,$$
$$i_t(z,0) = 0, \qquad V_t(z,0) = 0, \tag{14}$$
$$V(0,t) = E(t) \text{ pentru } t \geqslant 0,$$
$$V(l,t) = Z_0\, i(l,t).$$

c) *Linie de lungime l, deschisă la extremitatea receptoare (adică* $Z_0 = \infty$*) şi deci*

$$\begin{aligned} &i(z, 0) = 0, && i_t(z, 0) = 0, \\ &i(0, t) = f(t), && i(l, t) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

d) *Linie de lungime l, în scurt circuit la extremitatea receptoare, ceea ce conduce la condiţiile*

$$\begin{aligned} &i(z, 0) = 0, && V(z, 0) = 0, \\ &i_t(z, 0) = 0, && V_t(z, 0) = 0, \\ & && V(0, t) = E(t) \text{ pentru } t \geqslant 0, \\ & && V(l, t) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

In toate cazurile trebue să avem $E(0) = E'(0) = 0$.

4. Luând ca şi în lucrarea noastră anterioară [2]

$$L = L_0(1 + m\cos\Omega t), \qquad C = C_0(1 + n\cos\Omega t) \tag{17}$$

obţinem [2] *)

$$LC = (\alpha + \beta\cos\Omega t)^2$$

cu

$$2\alpha = \sqrt{L_0C_0}\,(\sqrt{1 + m + n} + \sqrt{1 - m - n}),$$

$$2\beta = \sqrt{L_0C_0}\,(\sqrt{1 + m + n} - \sqrt{1 - m - n}).$$

Inlocuind în (11) pe L şi C prin expresiile lor (17) putem scrie

$$\begin{aligned} &a(t) = (\alpha + \beta\cos\Omega t)^2, \\ &-b(t) = a_1 + b_1\cos\Omega t + c_1\sin\Omega t + \psi_0, \\ &c(t) = p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t, \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$a_1 = GL_0 + RC_0; \quad b_1 = GL_0 + RC_0n; \quad c_1 = -L_0C_0\Omega(m + 2) \tag{19}$$

şi

$$\begin{aligned} p &= RG + L_0C_0mn\Omega^2, \\ q &= -L_0C_0n\Omega^2, \\ r &= -(L_0Gm + RC_0)n\Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

Pe de altă parte, relaţiile (12) ne dau

$$\begin{aligned} K_{00}(t, \tau) &= -\varphi(t - \tau)C_0n\Omega^2\cos\Omega t, \\ K_{01}(t, \tau) &= \psi(t - \tau) + \varphi(t - \tau)[\psi(0) + G - 2C_0n\Omega\sin\Omega t] + \\ &\quad + \int_\tau^t \varphi(t - s)\psi(s - \tau)\,ds, \\ K_{02}(t, \tau) &= \varphi(t - \tau)C_0(1 + n\cos\Omega t). \end{aligned} \tag{21}$$

*) p. 297—299.

Ținând seama de (18), (19), (20) și (21), ecuația (10) se mai poate scrie

$$V_{zz} - (\alpha + \beta \cos \Omega t)^2 V_{tt} - (a_1 + b_1 \cos \Omega t + c_1 \sin \Omega t) V_t + \\ + (p + q \cos \Omega t + r \sin \Omega t) V = \int_0^t [K_{00}(t, \tau) V(z, \tau) + \\ + K_{01}(t, \tau) V_\tau(z, \tau) + K_{02}(t, \tau) V_{\tau\tau}(z, \tau)] d\tau. \tag{22}$$

Notând prin $F(z, t)$ membrul al doilea al ecuației (22) și ținând seama de condițiile inițiale

$$V(z, 0) = V_t(z, 0) = 0, \qquad V(0, t) = E(t),$$

obținem, după integrări prin părți,

$$F(z, t) = K_{01}(t, t) V(z, t) - \underset{\tau}{K'_{02}}(t, \tau)_{\tau=t} V(z, t) + K_{02}(t, t) V_t(z, t) + \\ + \int_0^t [\underset{\tau^2}{K''_{02}}(t, \tau) - \underset{\tau}{K'_{01}}(t, \tau)] V(z, \tau) d\tau.$$

Inlocuind în ecuația (22) membrul al doilea prin expresia de mai sus, obținem ecuația integro-diferențială

$$V_{zz} - (\alpha + \beta \cos \Omega t)^2 V_{tt} - [(a_1 + b_1 \cos \Omega t + c_1 \sin \Omega t + K_{02}(t, t)] Vt + \\ + [p + q \cos \Omega t + r \sin \Omega t - K_{01}(t, t) + \underset{\tau}{K'_{02}}(t, \tau)_{\tau=t}] V = \\ = \int_0^t [\underset{\tau^2}{K''_{02}}(t, \tau) - \underset{\tau}{K'_{01}}(t, \tau)] V(z, \tau) d\tau, \tag{23}$$

unde K_{01} și K_{02} sunt date de relațiile (21).

5. Vom aduce acum ecuația (23) la forma canonică, urmând același procedeu ca și în lucrarea noastră anterioară [2] *).

Caracteristicile ecuației (23) sunt date de ecuațiile diferențiale

$$dt = \pm (\alpha + \beta \cos \Omega t \, dz), \tag{24}$$

ale căror soluții sunt

$$z - \frac{2}{\Omega (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \frac{\Omega t}{2} \right) = x(z, t), \\ z + \frac{2}{\Omega (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \frac{\Omega t}{2} \right) = y(z, t), \tag{25}$$

de unde deducem

$$z = \frac{x + y}{2}, \qquad t = t(x, y) \tag{26}$$

*) p. 298—300.

şi

$$\cos \Omega t = \frac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)},$$
$$\sin \Omega t = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{\sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)}, \tag{27}$$

cu

$$a_0 = \frac{\Omega}{2} (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

In aceste condiţii, punând $V(z, t) = U(x, y)$ avem

$$V_z = U_x + U_y,$$
$$V_t = (U_y - U_x) \frac{1}{\alpha + \dfrac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)}},$$
$$V_{zz} = U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy}$$

şi

$$(\alpha + \beta \cos \Omega t)^2 V_{tt} = U_{xx} + U_{yy} - 2U_{xy} +$$
$$+ (U_x - U_y) \beta \Omega \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)},$$

de unde, pentru operatorul diferenţial $D(U)$ din membrul întâi al ecuaţiei (23),

$$D(U) = 4U_{xy} - \left[a_1 + b_1 \frac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} + c_1 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} + \right.$$
$$\left. + \varphi(0) C_0 \left(1 + n \frac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} \right) \right] \frac{U_y - U_x}{\alpha + \beta \dfrac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)}} +$$
$$+ \left\{ p + q \frac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} + r \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} - \right.$$
$$- \left[\Psi(0) + \varphi(0) \left[\Psi(0) + G - 2C_0 n \Omega \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} \right] \right] +$$
$$\left. + C_0 \varphi'(0) \left(1 + n \frac{\alpha \cos a_0 (x-y) - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} \right) - \varphi(0) \frac{C_0 n \Omega \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin a_0 (x-y)}{\alpha - \beta \cos a_0 (x-y)} \right\} U.$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$u = x - y, \tag{28}$$
$$x = x$$

avem

$$U_{(x, y)} = W_{(x, u)} \tag{29}$$

și

$$U_x = W_x, \quad U_y = -W_u, \quad U_{xy} = -W_{xu}, \tag{30}$$

iar operatorul diferențial de mai sus este de forma

$$D(W) = 4W_{xu} + 4p(u)[W_x + W_u] + 4q(u)W.$$

Să considerăm acum membrul al doilea al ecuației (23).

Avem

$$K''_{02\,\mathfrak{G}^2} = \varphi''(t-\mathfrak{G})C_0(1+n\cos\Omega t) - 2\varphi'(t-\mathfrak{G})C_0 n\Omega\sin\Omega t - \varphi(t-\mathfrak{G})C_0 n\Omega^2\cos\Omega t$$

și

$$K''_{01\,\mathfrak{G}} = -\Psi'(t-\mathfrak{G})\varphi'(t-\mathfrak{G}) + [\Psi(0) + G - 2C_0 n\Omega\sin\Omega t +$$

$$+ \varphi(t-\mathfrak{G})[-2C_0 n\Omega^2\cos\Omega t] + \Psi(0)\varphi(t-\mathfrak{G}) + \int_{\mathfrak{G}}^{t}\varphi(t-s)\Psi'(s-\mathfrak{G})\,ds.$$

Punând

$$t = \frac{1}{\Omega}\arccos\frac{\alpha\cos a_0 u - \beta}{\alpha - \beta\cos a_0 u} = r(u)$$

și $\mathfrak{G} = r(v)$,

obținem

$$K'_{01\,\mathfrak{G}} = -\Psi'[r(u)-r(v)] - \varphi'[r(u)-r(v)]$$

$$\left[\Psi(0) + G - 2C_0 n\Omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,\frac{\sin a_0 u}{\alpha - \beta\cos a_0 u}\right] + \tag{31}$$

$$+ \varphi[r(u)-r(v)]\left[-2C_0 n\Omega^2\frac{\alpha\cos a_0 u - \beta}{\alpha - \beta\cos a_0 u}\right] +$$

$$+ \Psi(0)\varphi[r(u)-r(v)] + \int_v^u \varphi[r(u)-r(s)]\Psi'[r(s)-r(v)]\,ds$$

și

$$K''_{02\,\mathfrak{G}^2} = \varphi''[r(u)-r(v)]C_0\left(1 + n\frac{\alpha\cos a_0 u - \beta}{\alpha - \beta\cos a_0 u}\right) -$$

$$- 2\varphi'[r(u)-r(v)]C_0 n\Omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,\frac{\sin a_0 u}{\alpha - \beta\cos a_0 u} - \tag{32}$$

$$- \varphi[r(u)-r(v)]C_0 n\Omega^2\frac{\alpha\cos a_0 u - \beta}{\alpha - \beta\cos a_0 u},$$

unde derivatele sunt luate în raport cu argumentul

$$w = r(u) - r(v).$$

Cum $t = 0 \to u = 0$, ținând seama de (31) și (32), putem scrie

$$K''_{02\,\mathfrak{G}^2}(t, \mathfrak{G}) - K'_{01\,\mathfrak{G}}(t, \mathfrak{G}) = P(u, v)$$

şi

$$\int_0^t [K''_{02\,\overline{\sigma}^2}(t, \overline{\sigma}) - K'_{01\,\overline{\sigma}}(t, \overline{\sigma})]\, V(z, \overline{\sigma})\, d\overline{\sigma} = \int_0^u P(u, v)\, r'(v)\, W(x, v)\, dv =$$

$$= \int_0^u 4\, K(u, v)\, W(x, v)\, dv.$$

In aceste condiţii ecuaţia (23) se transformă în ecuaţia integro-diferenţială

$$W_{xu} + p(u)[W_x + W_u] + q(u)\, W = \int_0^u K(u, v)\, W(x, v)\, dv. \qquad (33)$$

6. Ne propunem acum să calculăm soluţia ecuaţiei (33) în cazul problemei *a)* de la punctul 3, adică pentru o linie semiinfinită, în repaus pentru $t < 0$, căreia i se aplică, în momentul $t = 0$, o forţă electromotoare $E(t)$, şi care trebue să verifice condiţiile

$$V(z, 0) = 0, \quad V_t(z, 0) = 0, \quad V(0, t) = E(t) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0. \qquad (13)$$

Pentru $t = 0$ avem $x = y$, deci $u = 0$ şi $[V(z, 0) = 0] \rightarrow [W(x, 0) = 0]$.
Pe de altă parte,

$$[V_t(z, 0) = 0] \rightarrow [(U_y) = 0 \text{ şi } (U_x) = 0].$$

Deci

$$[V_t(z, 0) = 0] \rightarrow [W_u(x, 0) = 0 \text{ şi } W_x(x, 0) = 0].$$

Dar $W_x(x, 0) = 0$ este o consecinţă a relaţiei $W(x, 0) = 0$.
Intr'adevăr,

$$[W(x, 0) = 0] \rightarrow [W(x, u) = u\,\theta(x, u)],$$

de unde

$$W_x(x, u) = u, \quad \theta'(x, u) \quad \text{şi} \quad W_x(x, 0) = 0.$$

Dar

$$V(0, t) = E(t) = A(u)$$

şi

$$V(0, t) = U(x, -x) = U(-y, y) \quad \text{deci} \quad [y = x] \rightarrow [u = 2x]$$

iar

$$[V(0, t) = E(t)] \rightarrow [W(x, 2x) = A(2x)].$$

In concluzie, trebue să determinăm soluţia ecuaţiei (33) pentru care
1°. *Cunoaştem valoarea funcţiei* $W(x, u)$ *pe caracteristica* $u = 0$ *şi anume* $W(x, 0) = 0$.
2°. *Se dau valorile funcţiei necunoscute pe curba* $u = 2x$ *şi anume*

$$W(x, u) = A(u) = W\left(\frac{u}{2}, u\right). \qquad (34)$$

Pentru aceasta vom scrie ecuaţia (33) sub forma

$$W_{xu} = \lambda \left\{ p(u)[W_x + W_u] + q(u)\, W + \int_0^u K(u, v)\, W(x, v)\, dv. \right. \qquad (35)$$

Dacă în această ecuaţie notăm membrul al doilea prin $\Phi(x, u)$ şi presupunem că $\Phi(x, u)$ este o funcţie cunoscută, soluţia ecuaţiei

$$W_{xu} = \Phi(x, u), \qquad (36)$$

care satisface condițiile 1° și 2° de mai sus, [3] *) este dată de

$$W(x, u) = A(u) + \lambda \iint_{(D)} \Phi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{37}$$

unde domeniul de integrare (D) este dreptunghiul $MPQN$ din figura 1.

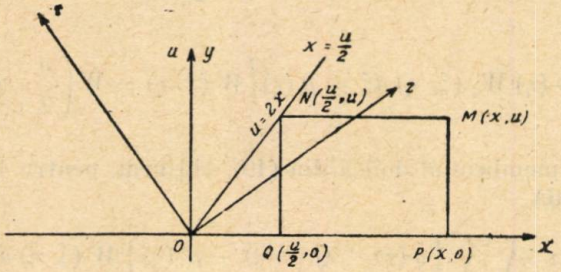


Fig. 1

Soluția (37) *fiind o funcțională aditivă și omogenă de* $\Phi(x, u)$, după o teoremă pe care am demonstrat-o într'o Comunicare precedentă [4], soluția ecuației (35) va fi dată de soluția ecuației integro-diferențială obținută înlocuind în membrul al doilea din (37), funcția $\Phi(\xi, \eta)$ prin membrul al doilea din (35), ceea ce dă

$$W(x, u) - A(u) + \lambda \iint_{(D)} \Big[p(\eta)\,(W_\xi + W_\eta) + q(\eta)\, W + \int_0^b K(\eta, v)\, W(\xi, v)\, dv \Big] d\xi\, d\eta \tag{38}$$

sau încă, explicitând limitele domeniului (D),

$$W(x, u) = A(u) + \lambda \int_{\frac{u}{2}}^{x} d\xi \int_0^u \Big[p(\eta)\,(W_\xi + W_\eta) + q(\eta)\, W + \int_0^\eta K(\eta, v)\, W(\xi, v)\, dv \Big] d\eta. \tag{39}$$

Dar

$$\int_0^t d\eta \int_0^\eta K(z, v)\, W(\xi, v)\, dv = \int_0^u W(\xi, v)\, dv \int_v^u K(\eta, v)\, d\eta = \int_0^u Q(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\eta$$

și deci ecuația (39) se scrie sub forma

$$W(x, u) = A(u) + \lambda \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_0^u \Big\{ p(\eta)\,(W_\xi + W_\eta) + [q(\eta) + Q(u, \eta)]\, W \Big\} d\xi\, d\eta. \tag{40}$$

*) p. 119–120.

Ţinând seama de condiţiile iniţiale pe care le verifică $W(x, u)$, avem

$$\int_0^u p(\eta)\, W_\eta(\eta, y)\, d\eta = [W(\xi, \eta)\, p(\eta)]_0^u - \int_0^u p'(\eta)\, W(\xi, \eta)\, d\eta =$$

$$= p(u)\, W(\xi, u) - \int_0^u p'(\eta)\, W(\xi, \eta)\, d\eta$$

şi

$$\int_{\frac{u}{2}}^x p(\eta)\, W_\xi(\xi, \eta)\, d\xi = p(\eta)\left(W(x, \eta) - W\left(\frac{u}{2}, \eta\right)\right).$$

Inlocuind în membrul al doilea din (40), obţinem, pentru $W(x, u)$, ecuaţia integro-funcţională

$$W(x, u) = A(u) + \lambda \int_{\frac{u}{2}}^x \int_0^u \left\{ q(\eta) + Q(u, \eta) - p'(\eta) \right\} W(\xi\ \eta)\, d\xi\, d\eta + \tag{41}$$

$$+ \lambda \int_{\frac{u}{2}}^x p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi + \lambda \int_0^u p(\eta) \left[W(x, \eta) - W\left(\frac{u}{2}, \eta\right) \right] d\eta.$$

Punând

$$q(\eta) + Q(u, \eta) - p'(\eta) = R(u, \eta)$$

şi

$$F(x, u) = A(u) + \lambda \int_{\frac{u}{2}}^x \int_0^u R(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \lambda \int_{\frac{u}{2}}^x p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi, \tag{42}$$

ecuaţia (41) se mai scrie

$$W(x, u) = F(x, u) + \lambda \int_0^u p(\eta) \left[W(x, \eta) - W\left(\frac{u}{2}, \eta\right) \right] d\eta. \tag{43}$$

Dacă în această ecuaţie integro-funcţională considerăm pe $F(x, u)$ ca o funcţie cunoscută şi căutăm o soluţie prin aproximaţii succesive de forma

$$W(x, u) = \sum_0^\infty {}_n \lambda^n W_n(x, u),$$

obţinem

$$W_0(x, u) = F(x, u)$$

$$W_1(x, u) = \int_0^u p(\eta) \left[F(x, \eta) - F\left(\frac{u}{2}, \eta\right) \right] d\eta,$$

$$W_2(x, u) = \int_0^u p(\eta) \left[W_1(x, \eta) - W_1\left(\frac{u}{2}, \eta\right) \right] d\eta,$$

. . . . . .

$$W_n(x, u) = \int_0^u p(\eta) \left[W_{n-1}(x, \eta) - W_{n-1}\left(\frac{u}{2}, \eta\right) \right] d\eta,$$

. . . . . .

Dar

$$W_2(x,u)=\int_0^u p(\eta)\left(\int_0^\eta p(\eta_1)\left[F(x,\eta_1)-F\left(\frac{\eta}{2},\eta_1\right)\right]d\eta_1-\right.$$

$$\left.-\int_0^\eta p(\eta_1)\left[F\left(\frac{u}{2},\eta_1\right)-F\left(\frac{\eta}{2},\eta_1\right)\right]d\eta_1\right)d\eta=$$

$$=\int_0^u p(\eta)\left(\int_0^\eta p(\eta_1)\left[F(x,\eta_1)-F\left(\frac{u}{2},\eta_1\right)\right]d\eta_1\right)d\eta=$$

$$=\int_0^u\left[F(x,\eta_1)-F\left(\frac{u}{2},\eta_1\right)\right]d\eta_1\int_{\eta_1}^u p(\eta)\,p(\eta_1)\,d\eta=$$

$$=\int_0^u p^{(2)}(u,\eta)\left[F(x,\eta)-F\left(\frac{u}{2},\eta\right)\right]d\eta,$$

unde $p^2(u,\eta)$ este nucleul iterat de ordinul doi

$$p^2(u,\eta)=\int_\eta^u p(\eta)\,p(\eta_1)\,d\eta_1.$$

Prin operații analoage vom găsi pentru termenul de ordinul n

$$W_n(x,u)=\int_0^u p^{(n)}(u,\eta)\left[F(x,\eta)-F\left(\frac{u}{2},\eta\right)\right]d\eta,$$

unde nucleul iterat $p^{(n)}(u,\eta)$ este de forma

$$p^{(n)}(u,\eta)=p(\eta)\int_\eta^u p(\eta_1)\,d\eta_1\int_\eta^{\eta_1} p(\eta_2)\,d\eta_2\cdots\int_\eta^{\eta_{n-1}} p(\eta_{n-1})\,d\eta_{n-1}.$$

Nucleele iterate fiind de forma lui Volterra, nucleul rezolvant $\Gamma(u,\eta,\lambda)$ este o funcție întreagă de λ, iar soluția ecuației (43) este dată de expresia

$$W(x,u)=F(x,u)+\lambda\int_0^u\Gamma(u,\eta,\lambda)\left[F(x,\eta)-F\left(\frac{u}{2},\eta\right)\right]d\eta. \qquad (44)$$

Ținând seama de valoarea (42) a funcției $F(x,u)$, avem

$$F(x,\eta)-F\left(\frac{u}{2},\eta\right)=\lambda\int_{\frac{u}{2}}^x\int_0^\eta R(\eta,\eta_1)W(\xi,\eta_1)\,d\xi\,d\eta_1+\lambda\int_{\frac{\eta}{2}}^x p(\eta)W(\xi,\eta)\,d\xi-$$

$$-\lambda\int_{\frac{\eta}{2}}^{\frac{u}{2}}\int_0^\eta R(\eta,\eta_1)\,W(\xi,\eta_1)\,d\xi\,d\eta_1-\lambda\int_{\frac{\eta}{2}}^{\frac{u}{2}} p(\eta)\,W(\xi,\eta)\,d\xi=$$

$$=\lambda\int_{\frac{u}{2}}^x\int_0^\eta R(\eta,\eta_1)\,W(\xi,\eta_1)\,d\xi\,d\eta_1+\lambda\int_{\frac{u}{2}}^x p(\eta)\,W(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Făcând peste tot $\lambda = 1$, ecuaţia (44) se mai scrie sub forma

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} R(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{u} \Gamma(u, \eta) \left[\int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{\eta} R(\eta, \eta_1)\, W(\xi, \eta_1)\, d\xi\, d\eta_1 + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(\eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi \right] d\eta,$$

sau

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{\eta} [R(u, \eta) + \Gamma(u, \eta)\, p(\eta)]\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi + \int_{0}^{u} \Gamma(u, \eta)\, d\eta \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} R(\eta, \eta_1)\, W(\xi, \eta_1)\, d\xi_d \eta_1 .$$

Dar

$$\int_{0}^{u} \Gamma(u, \eta)\, d\eta \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} R(\eta, \eta_1)\, W(\xi, \eta_1)\, d\xi\, d\eta_1 =$$

$$= \int_{\frac{u}{2}}^{x} d\xi \int_{0}^{u} W(\xi, \eta_1)\, d\eta_1 \int_{\eta_1}^{\eta} \Gamma(u, \eta_1)\, R(\eta, \eta_1)\, d\eta$$

şi deci

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} \left[R(u, \eta_1) + \Gamma(u, \eta_1)\, p(\eta_1) + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta_1}^{u} \Gamma(u, \eta)\, R(\eta, \eta_1)\, d\eta \right] W(\xi, \eta_1)\, d\xi\, d\eta_1 + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi$$

sau încă, punând

$$S(u, \eta) = R(u, \eta) + \Gamma(u, \eta) + \int_{\eta}^{u} \Gamma(u, \eta_1)\, R(\eta_1, \eta)\, d\eta_1,$$

avem

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi. \qquad (45)$$

Punând din nou

$$\Psi(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (46)$$

ecuaţia (45) devine, introducând un parametru μ,

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi. \qquad (47)$$

Considerând, în (47), pe $\Psi(x, u)$ ca o funcție cunoscută și căutând o soluție prin aproximații succesive, obținem

$$W_0 = \Psi(x, u), \quad W_1 = \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\Psi(\xi, u)\, d\xi, \ldots W_n = \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W_{n-1}(\xi, u)\, d\xi.$$

Dar

$$W_2 = \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\left(\int_{\frac{u}{2}}^{\xi} p(u)\Psi(\xi_1, u)\, d\xi_1\right) d\xi = \int_{\frac{u}{2}}^{x} p^2(u)\Psi(\xi, u)\, d\xi \int_{\xi_1}^{x} d\xi =$$

$$= \int_{\frac{u}{2}}^{x} p^2(u)(x - \xi)\Psi(\xi, u)\, d\xi.$$

De unde, pentru termenul de ordinul n,

$$W_n = \int_{\frac{u}{2}}^{x} p^n(u)\frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}\Psi(\xi, u)\, d\xi,$$

iar pentru $W(x, u)$, expresia

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu\int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\left[1 + \mu p(u)(x - \xi) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \mu^{n-1} p^{n-1}(u)\frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right] d\xi$$

sau, făcând $\mu = 1$,

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, e^{(x-\xi)}\, d\xi. \tag{48}$$

Inlocuind în (48) pe $\Psi(x, u)$ prin expresia (46), obținem

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_{\frac{u}{2}}^{x} e^{(x-\xi)p(u)}(p(u)\left[A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi_1\, d\eta\right] d\xi.$$

Dar

$$\int_{\frac{u}{2}}^{x} e^{(x-\xi)p(u)}\, d\xi \int_{\frac{u}{2}}^{x} d\xi_1 \int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\eta =$$

$$= \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi_1)\, d\eta \int_{\xi_1}^{x} e^{(x-\xi)p(u)}\, d\xi$$

$$p(u)\int_{\xi_1}^{x} e^{(x-\xi)p(u)}\, d\xi = \left[-e^{(x-\xi)p(u)}\right]_{\xi_1}^{x} = -1 + e^{(x-\xi_1)p(u)}$$

şi

$$\int_{\frac{u}{2}}^{x} e^{(x-\xi)\,p\,(u)}\,p\,(u)\,A\,(u)\,d\xi = A\,(u)\left[-\,e^{\,(x-\xi)\,p\,(u)}\right]_{\frac{u}{2}}^{x} = A\,(u)\left[-1+e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p\,(u)}\right].$$

De unde, ecuaţia integrală

$$W\,(x,\,u) = A\,(u)\,e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p\,(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S\,(u,\,\eta)\,e^{(u-\xi)\,p\,(u)}\,W\,(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{49}$$

Punând

$$W\,(x,\,u)\,e^{-xp\,(u)} = Y\,(x,\,u) \quad \text{şi} \quad A\,(u)\,e^{-\frac{u}{2}p\,(u)} = B\,(u), \tag{50}$$

ecuaţia (49) se mai poate scrie (introducând un parametru μ)

$$Y\,(x,\,u) = B\,(u) + \mu\int_{\frac{u}{2}}^{x}\int^{u} K\,(u,\,\xi,\,\eta)\,Y\,(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{51}$$

unde

$$K\,(u,\,\xi,\,\eta) = S\,(u,\,\eta)\,e^{-\xi p\,(u)+\xi p\,(\eta)}.$$

Căutând o soluţie a ecuaţiei (51) prin aproximaţii succesive de forma

$$Y\,(x,\,u) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,\mu^{n}\,Y_{n}\,(x,\,u),$$

obţinem

$$Y_{0}\,(x,\,u) = B\,(u),$$

$$Y_{1}\,(x,\,u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} K\,(u,\,\xi,\,\eta)\,B\,(\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$Y_{2}\,(u,\,u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} K\,(u,\,\xi,\,\eta)\,Y_{1}\,(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{n}\,(x,\,u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} K\,(u,\,\xi,\,\eta)\,Y_{n-1}\,(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dar

$$Y_{2}\,(x,\,u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} K\,(u,\,\xi,\,\eta)\left(\int_{\frac{\eta}{2}}^{x}\int_{0}^{\eta} K\,(\eta,\,\xi_{1},\,\eta_{1})\,B\,(\eta_{1})\,d\xi_{1}\,d\eta_{1}\right)d\xi\,d\eta$$

$$= \int_{\frac{u}{2}}^{x} d\xi\int_{0}^{u} B\,(\eta_{1})\,d\eta_{1}\int_{\eta_{1}}^{u}\left(K\,(u,\,\xi,\,\eta)\int_{\frac{\eta}{2}}^{\xi} K\,(\eta,\,\xi_{1},\,\eta_{1})\,d\xi_{1}\right)d\eta$$

$$= \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} B\,(\eta)\,K^{(2)}\,(u,\,\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

unde

$$K^{(2)}(u, \xi, \eta) = \int_{\eta}^{u} \left(K(u, \xi_1, \eta_1) \int_{\frac{\eta_1}{2}}^{\xi} K(\eta_1, \xi_1, \eta)\, d\xi_1 \right) d\eta_1 .$$

Prin operații analoage găsim de asemenea

$$Y_3(x, u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} B(\eta)\, K^{(3)}(u, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

cu

$$K^{(3)}(u, \xi, \eta) = \int_{\eta}^{u} K(u, \xi, \eta_1) \int_{\frac{\eta_1}{2}}^{\xi} \left(K(\eta_1, \xi_1, \eta)\, d\xi_1 \right) d\eta_1 ,$$

și deci, din aproape în aproape,

$$Y_n(x, u) = \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} B(\eta)\, K^{(n)}(u, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

unde

$$K^{(n)}(u, \xi, \eta) = \int_{\eta}^{u} \left(K(u, \xi, \eta_1) \int_{\frac{\eta_1}{2}}^{\xi} K^{(n-1)}(\eta_1, \xi_1, \eta)\, d\xi_1 \right) d\eta_1 .$$

Punând

$$\begin{aligned} \Gamma_1(u, \xi, \eta, \mu) &= K(u, \xi, \eta) + \mu K^{(2)}(u, \xi, \eta) + \dots \\ &\dots + \mu^{n-1} K^{(n)}(u, \xi, \eta) + \dots, \end{aligned} \tag{52}$$

soluția ecuației (51) este dată de

$$Y(x, u) = B(u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} \Gamma_1(u, \xi, \eta, \mu)\, B(\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{53}$$

Vom arăta acuma că nucleul rezolvant $\Gamma_1(u, \xi, \eta, \mu)$ este o funcție întreagă de μ.

Într'adevăr, cum $u > 0$ și $\frac{u}{2} < x$, punând

$$| K(u, \xi, \eta) | \leqslant M,$$

obținem

$$| K^{(2)} | \leqslant \int_{\eta}^{u} M \int_{\frac{\eta_1}{2}}^{\xi} M\, d\xi_1\, d\eta_1 < M^2 \int_{\eta}^{u} d\eta_1 \int_{0}^{\xi} d\xi_1 = M^2 (u - \eta)\, \xi.$$

De asemenea

$$| K^{(3)} | < M^3 \left| \int_{\eta}^{u} (\eta - \eta_1)\, d\eta_1 \int_{0}^{\xi} d\xi_1 \right| = M^3 \frac{(u-\eta)^2}{2!} \cdot \frac{\xi^2}{2!} .$$

Repetând aceleaşi operaţii, găsim pentru termenul de ordinul n

$$|K^{(n)}| < M \frac{(u-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\xi^{n-1}}{n-1)!},$$

de unde se vede că nucleul rezolvant este o funcţie întreagă de parametrul μ şi, prin urmare, putem face $\mu = 1$ în ecuaţia (51), a cărei soluţie, scriind $\Gamma_1(u, \xi, \eta, 1) = \Gamma_1(u, \xi, \eta)$, este dată de expresia

$$Y(x, u) = B(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} \Gamma_1(u, \xi, \eta)\, B(\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{54}$$

Ţinând seama de relaţiile (50), obţinem pentru $W(x, u)$,

$$W(x, u) = A(u)\, e^{\left(x - \frac{u}{2}\right) p(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} \Gamma_1(u, \xi, \eta)\, A(\eta)\, e^{xp(u)}\, e^{-\frac{\eta}{2} p(\eta)}\, d\eta. \tag{55}$$

Celelalte probleme menţionate la Nr. 3, *b)*, *c)*, *d)* vor fi tratate într'o lucrare ulterioară.

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕЛЕГРАФИСТА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1—2. Продолжая предыдущее исследование [2], автор рассматривает в этом сообщении случай уравнения телеграфиста, полученного, если учитывать явления магнитной и диэлектрической наследственности, а также факт, что линейные постоянные L и C являются периодическими функциями времени t.

Полагая линию связи недействующей для $t < 0$, приходят к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(L_t + R)\, i + L i_t + \int_0^t \varphi(t - \tau\, i_\tau(z, \tau\, d\tau = V_z(z, t) \\ &(C_t + G)\, V + c V_t + \int_0^t \Psi(t - \tau)\, V_\tau(z, \tau)\, d_\tau = -\, i_z(z, t), \end{aligned} \tag{7}$$

которые, исключением $i(z, t)$, приводят к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} V_{zz} - a(t)\, V_{tt} + b(t)\, V_t + c(t)\, V = \int_0^t K_{00}(t, \tau) + \\ + K_{01}(t, \tau)\, V_\tau(z, \tau) + K_{02}(z, \tau)\, V_{\tau\tau}(z, \tau)]\, d\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $K_{00}(t, \tau)$, $K_{01}(t, \tau)$ и $K_{02}(t, \tau)$ даны (11) и (12).

3—5. Автор ставит задачу найти решение уравнения (12), которое удовлетворяло бы граничным условиям, отмеченным в *a)*, *b)*, *c)* *d)* в No, 3. С этой целью автор приводит уравнение (12) к форме (23),

откуда методом, аналогичным методу, использованному (2), приводит (23) к форме

$$W_{xu} + p(u)[W_x + W_u] + q(u)W = \int_0^u K(u, v)\, W(x, v)\, dv, \qquad (33)$$

где $p(u)$, $q(u)$ и $K(u, v)$ являются периодическими функциями переменной u.

6. Автор ищет решение уравнения (33), соответствующее случаю a) №. 3, то есть для полубесконечной линии, не действующей при $t < 0$, и к которой присоединяется в момент $t = 0$ э. д. с. $E(t)$. Условия, которым должно удовлетворять решение $V(z, t)$, являются

$$\begin{aligned} i(z, 0) &= 0 \qquad V(z, 0) = 0 \\ i_t(z, 0) &= 0 \qquad V_t(z, 0) = 0 \\ V(0, t &= E(t) \text{ для } (t \geqslant 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

откуда следуют для решения $W(x, u)$ уравнения (33) условия

$$1^\circ\ W(x, 0) = 0 \qquad \text{и } 2^\circ\ W\left(\frac{u}{2}, u\right) = A(u).$$

Для определения этого решения, автор переводит уравнение (33) в форму (35), где обозначает вторую часть через $\Phi(x, u)$. Полагая $\Phi(x, u)$ известной функцией находим, что решение $W(x, u)$, удовлетворяющее вышеуказанным условиям 1° и 2° является решением интегро-дифференциального уравнения

$$W(x, u) = A(u) + \lambda \iint_{(D)} [p(\eta)(W_\xi + W_\eta) + q(\eta) W + \int_0^\eta K(\eta, v)\, W(\xi, v)\, dv]\, d\xi\, d_\eta \qquad (38)$$

которое записывается еще в форме (40), и после интегрирования по частям члена, содержащего $W_\xi + W_\eta$, и учитывая условия 1° и 2° приводит к интегро-функциональному уравнению (41). Для решения этого уравнения автор записывает его в форме (43), гдго $F(x, u)$ предполагается известной функцией, и ищет решения этого уравнения методом последовательных приближений, что приводит к уравнению (44), где $\Gamma(u, \eta, \lambda)$ резольвентное ядро, является целой функцией параметра λ, полученное при помощи интегрированных ядер, ядра $p(z)$.

Учитывая выражение $F(x, u)$, , уравнение (44) принимает форму

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_0^u S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi, \qquad (45)$$

где поставлено

$$S(u, \eta) = R(u, \eta) + \Gamma(u, \eta) + \int_{\eta}^{u} \Gamma(u, \eta_1) R(\eta_1 \eta)\, d\eta_1 .$$

Полагая снова

$$\Psi(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} S(u\eta) W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{46}$$

и вводя параметр μ, получаем уравнение

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u) W(\xi_1 u)\, d\xi. \tag{47}$$

Считая $\Psi(x, u)$ известной функцией и отыскивая решение при помощи последовательных приближений, получаем в качестве решения

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u) W(\xi, u)\, e^{(x-\xi)} d\xi. \tag{48}$$

Подставляя в (48) вместо $\Psi(x, u)$ ее выражение (46) получаем наконец интегральное уравнение

$$W(x, u) = A(u)\, e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} S(u, \eta)\, e^{(x-\xi)(pu)} W(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{49}$$

решение которого, при помощи последовательных приближений, дано

$$W(x, u) = A(u)\, e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x} \int_{0}^{u} \Gamma_1(x, \xi, \eta)\, A(\eta)\, e^{xp(u) - \frac{\eta}{2} p(n)} d\eta, \tag{55}$$

где $\Gamma_1, (u, \xi, \eta)$ есть резольвентное ядро, полученное из итерированных ядер ядра

$$K(u, \xi, \eta) = S(u\ \eta)\, e^{-\xi p(u) + \xi p(\eta)}.$$

Другие задачи, отмеченные в № 3, *b)*, *c)*, *d)* будут исследованы в следующем сообщении.

SUR UNE NOUVELLE ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

(RÉSUMÉ)

1—2. Faisant suite à une étude antérieure [2], l'Auteur considère dans ce travail le cas d'une équation des Télégraphistes obtenue en tenant compte des phénomènes d'hérédité magnétique et diélectrique ainsi que du fait que les constantes linéiques L et C sont des fonctions périodiques du temps t.

En supposant la ligne de transmission au repos pour $t < 0$, on est ramené au système d'équations intégro-différentielles

$$\begin{aligned}(L_t + R)\, i + L i_t + \int_0^t \varphi\,(t - \tau)\, i_\tau\,(z, \tau)\, d\tau &= V_z\,(z, t)\\ (C_t + G)\, V + C V_t + \int_0^t \Psi\,(t - \tau)\, V_\tau\,(z, \tau)\, d\tau &= - i_z\,(z, t).\end{aligned} \tag{7}$$

qui, par élimination de $i\,(z, t)$, conduit à l'équation intégro-différentielle.

$$\begin{aligned}V_{zz} - a\,(t)\, V_{tt} + b\,(t)\, V_t + C\,(t)\, V = \int_0^t [K_{00}(t, \tau) +\\ + (K_{01}\,(t, \tau)\, V_\tau\,(z, \tau) + K_{02}\,(z, \tau)\, V_{\tau\tau}\,(z, \tau)]\, d\tau,\end{aligned} \tag{10}$$

avec $a\,(t)$, $b\,(t)$, $c\,(t)$, $K_{00}\,(t, \tau)$, $K_{01}\,(t, \tau)$ et $K_{02}\,(t, \tau)$ données par (11) et (12).

3—5. L'Auteur se propose de chercher la solution de l'équation (12) qui vérifie les conditions aux limites spécifiées dans *a)*, *b)*, *c)* et *d)* du N° 3. A cet effet, il ramène l'équation (12) à la forme (23), et de là, par une méthode analogue à celle qu'il a utilisée dans [2], il ramène (23) à la forme

$$W_{xu} + p\,(u)\,[W_x + W_u] + q\,(u)\, W = \int_0^u K\,(u, v)\, W\,(x, v)\, dv \tag{33}$$

où $p\,(u)$, $q\,(u)$ et $K\,(u, v)$ sont des fonctions périodiques de la variable u.

6. L'Auteur cherche la solution de l'équation (33) qui correspond au cas *a)* du N° 3, c.à.d. d'une ligne semi-infinie, au repos, pour $t < 0$, et à laquelle on applique au moment $t = 0$ une f.e.m. $E\,(t)$. Les conditions auxquelles doit satisfaire la solution $V\,(z, t)$ étant

$$\begin{aligned}i\,(z, 0) &= 0 \qquad V\,(z, 0) = 0\\ i_t\,(z, 0) &= 0 \qquad V_t\,(z, 0) = 0\\ V\,(0, t) &= E\,(t) \text{ pour } t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{13}$$

il en résulte pour la solution $W\,(x, u)$ de l'équation (33) les conditions:

$$1°\ W\,(x, 0) = 0 \text{ et } 2°\ W\left(\frac{u}{2},\ u\right) = A\,(u).$$

Pour déterminer une telle solution, l'Auteur met l'équation (33) sous la forme (35), dont il désigne le second manche par $\Phi\,(x, u)$. *En supposant* $\Phi\,(x, u)$ *comme une fonction connue*, il trouve que la solution $W\,(x, u)$, qui vérifie les conditions 1° et 2° ci-dessus, est solution de l'équation intégro-différentielle

$$\begin{aligned}W\,(x, u) = A\,(u) + \lambda \iint_{(D)} \Big[p\,(\eta)\,(W_\xi + W_\eta) + q\,(\eta)\, W +\\ + \int_0^\eta K\,(\eta, v)\, W\,(\xi, v)\, dv\Big]\, d\xi\, d\eta\end{aligned} \tag{38}$$

que l'on écrit encore sous la forme (40), qui, après intégration par parties du terme que contient $W_\xi + W_\eta$, et compte tenu des conditions 1° et 2°, conduit à l'équation intégro-fonctionnelle (41). Pour résoudre cette équation, l'Auteur la met sous la forme (43), *où l'on suppose* $F(x, u)$ *comme une fonction connue*, et cherche une solution de celle-ci par approximations successives, ce qui le conduit à l'équation (44) où $\Gamma(u, \eta, \lambda)$ est le noyau résolvant, fonction entière du paramètre λ, formé avec les noyaux itérés du noyau $p(z)$.

Compte tenu de l'expression de $F(x, u)$, l'équation (44) prend la forme

$$W(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ + \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi \tag{45}$$

où l'on a mis

$$S(u, \eta) = R(u, \eta) + \Gamma(u, \eta) + \int_{\eta}^{u} \Gamma(u, \eta_1)\, R(\eta_1, \eta)\, d\eta_1$$

En posant à nouveau

$$\Psi(x, u) = A(u) + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{46}$$

et en introduisant un paramètre μ, on obtient l'équation

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, d\xi. \tag{47}$$

En considerant $\Psi(x,u)$ *comme une fonction connue* et en cherchant une solution par approximations successives, on obtient pour solution

$$W(x, u) = \Psi(x, u) + \mu \int_{\frac{u}{2}}^{x} p(u)\, W(\xi, u)\, e^{(x-\xi)}\, d\xi. \tag{48}$$

En remplaçant, dans (48), $\Psi^2(x, u)$ par son expression (46), on obtient finalement l'équation intégrale

$$W(x, u) = A\ u)\, e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} S(u, \eta)\, e^{(x-\xi)\,p(u)}\, W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{49}$$

dont la solution, par approximations successives, est donnée par

$$W(x, u) = A(u)\, e^{\left(x-\frac{u}{2}\right)p(u)} + \int_{\frac{u}{2}}^{x}\int_{0}^{u} \Gamma_1(u, \xi, \eta)\, A(\eta)^{xp(u)}\, e^{-\frac{\eta}{2}p(\eta)}\, d\eta. \tag{55}$$

où $\Gamma_1(u, \xi, \eta)$ est le noyau résolvant formé avec les noyaux itérés de

$$K(u, \xi, \eta) = S(u, \eta)\, e^{-\xi p(u) + \xi p(\eta)}.$$

Les autres problèmes mentionnés au N° 3, *b)*, *c)*, *d)* seront traités dans un travail à venir.

BIBLIOGRAFIE

1. M. I. Razovski, *Sur l'équation des Télégraphistes*. Dokladî. Akad. Nauk SSSR. 1948, t. II, Nr. 59, p. 1265—1268.
2. S. Vasilache, Studii și Cercetări Matematice, t. III, Nr. 3—4, 1952, p. 295.
3. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, 1942, Gauthiers Villars, Paris, t. III.
4. S. Vasilache, Comunicările Acad. R.P.R., 1951, t. I, Nr. 5 p. 399.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

CLASIFICAREA GRUPURILOR LUI LIE REALE CU PATRU PARAMETRI

DE

ANDREI DOBRESCU

INTRODUCERE

Grupurile continue finite cu doi, trei şi patru parametri au fost clasificate de S. Lie [1] încă din 1874.

Pentru grupurile G_3 reale, problema este considerată de asemenea de L. Bianchi [2] în 1918, care obţine în plus două tipuri de grup G_3 faţă de tipurile obţinute de S. Lie, care nu face distincţie între real şi imaginar. Problema este reconsiderată în 1947 de Gh. Vrănceanu [3] prin metoda tensorială şi de H. C. Lee [4], clasificările date de Gh. Vrănceanu şi H. C. Lee fiind echivalente cu aceea dată de L. Bianchi [5].

Urmând sugestia dată de Gh. Vrănceanu, în lucrarea de faţă reluăm problema clasificării grupurilor lui S. Lie reale cu patru parametri, prin metoda tensorială. Vom arăta că, şi în cazul grupurilor G_4, se obţin în plus câteva tipuri de grupuri faţă de cele date de S. Lie.

Ecuaţiile de structură ale grupului G_r le putem scrie sub forma dată de S. Lie

$$(X_k X_l) = c_{kl}^h X_h \text{ *)}, \tag{1}$$

unde $X_h = \xi_h^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ sunt operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului, $(X_k X_l)$ sunt parantezele lui Poisson ale operatorilor X_h, iar c_{kl}^h sunt constantele de structură ale grupului.

Prin transformarea centroafină

$$\overline{a}^h = c_k^h a^k \tag{2}$$

în spaţiul parametrilor $a^1, a^2, \ldots, a^r$ ai grupului, operatorii X_h se transformă după formulele

$$X_h = c_h^k \overline{X}_k \tag{2'}$$

iar constantele de structură după formulele

$$\overline{c}_{\alpha\beta}^h c_k^\alpha c_l^\beta = c_{kl}^\gamma c_\gamma^h, \tag{3}$$

*) Se adoptă convenţia că, dacă un indice se repetă într'un monom, trebue să se sumeze în raport cu acel indice.

astfel încât c_{kl}^{h} sunt, în raport cu transformările (2), componentele unui tensor, dublu covariant şi simplu contravariant, *tensorul fundamental de structură* al grupului G_r.

Componentele tensorului c_{kl}^{h}, strâmb simetrice în indicii de covarianţă, verifică *identităţile lui Lie*

$$(\alpha h k l) = c_{h\beta}^{\alpha} c_{kl}^{\beta} + c_{k\beta}^{\alpha} c_{lh}^{\beta} + c_{l\beta}^{\alpha} c_{hk}^{\beta} = 0. \tag{4}$$

Aceste identităţi, în număr de $r^2(r-1)(r-2)/6$, constitue un sistem de ecuaţii în componentele lui c_{kl}^{h}, care admite un anumit număr de soluţii reale distincte, considerând distincte două soluţii nereductibile una la alta prin formulele de transformare (3). Fiecărei astfel de soluţii îi corespunde un *tip* de grup G_r, ale cărui ecuaţii de structură sunt de forma (1).

Problema clasificării grupurilor lui Lie, cu un anumit număr de parametri, revine astfel la utilizarea transformărilor (2), astfel încât să se obţină forme canonice — cât mai simple — pentru tensorii c_{kl}^{h}, ale căror componente constitue soluţii distincte ale sistemului de ecuaţii (4).

G h. V r ă n c e a n u asociază grupului G_r încă doi tensori, deduşi prin contracţii şi multiplicări din tensorul c_{kl}^{h}, anume vectorul de structură $c_h = c_{\alpha h}^{\alpha}$ şi tensorul simetric $c_{hk} = c_{h\beta}^{\alpha} c_{k\alpha}^{\beta}$ [3] *). Prin reducerea acestora la anumite forme canonice, pe de o parte se obţin alte relaţii — în afara relaţiilor (4) — între componentele lui c_{kl}^{h}, pe de altă parte, unele din aceste componente rezultă nule.

In afara vectorului c_k şi tensorului c_{hk}, vom asocia grupului G_r tensorul triplu covariant $c_{hkl} = c_{h\beta}^{\alpha} c_{k\gamma}^{\beta} c_{l\alpha}^{\gamma}$, ceea ce ne va permite să dăm altă formă unei anumite teoreme a lui Cartan, privitoare la grupurile integrabile.

In capitolul I stabilim unele relaţii şi proprietăţi privitoare la tensorii c_h, c_{hk}, c_{hkl} ai grupului G_r; în capitolul II determinăm structurile grupurilor G_4 cu vector de structură diferit de zero; în capitolul III determinăm structurile grupurilor G_4 cu vector de structură egal cu zero, iar în capitolul IV confruntăm tipurile de grup obţinute în capitolele II şi III cu cele date de S. L i e, de unde va rezulta că am obţinut în plus patru tipuri de grup G_4.

CAPITOLUL I

RELAŢII ÎNTRE TENSORII ASOCIAŢI UNUI GRUP **)

1. Prin analogie cu cei doi tensori asociaţi unui grup G_r de G h. V r ă n c e a n u, vectorul de structură $c_h = c_{\alpha h}^{\alpha}$ şi tensorul simetric $c_{hk} = c_{h\beta}^{\alpha} c_{k\alpha}^{\beta}$, care, prin grupul (2), se transformă după formulele

$$\bar{c}_h c_k^h = c_k,$$

$$\bar{c}_{hk} c_p^h c_q^k = c_{pq},$$

*) p. 99 şi 101.

**) O parte din rezultate au fost date într'o Comunicare ţinută în prima Sesiune ştiinţifică a Universităţii « C. I. Parhon » [6].

vom introduce tensorul

$$c_{h_1 h_2 \cdots h_{s-1} h_s} = c^{\alpha_1}_{h_1 \alpha_2} c^{\alpha_2}_{h_2 \alpha_3} \cdots c^{\alpha_{s-1}}_{h_{s-1} \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_s \alpha_1},$$

de s ori covariant, invariant la o permutare ciclică a indicilor $h_1, \ldots, h_s$.

Vom demonstra

Teorema 1. *Componentele tensorului de structură* c^h_{kl} *şi componentele tensorilor* $c_{h_1 \cdots h_{s-1}}$, $c_{h_1 \cdots h_{s-1} h_s}$ *sunt legate prin relaţiile*

$$c_{h_1 \cdots h_{s-2} \alpha} c^{\alpha}_{h_{s-1} h_s} = c_{h_1 \cdots h_{s-2} h_{s-1} h_s} - c_{h_1 \cdots h_{s-2} h_s h_{s-1}}. \tag{5}$$

Pentru demonstraţie, observăm că membrii II ai acestor relaţii se scriu

$$c^{\alpha_1}_{h_1 \alpha_2} \cdots c^{\alpha_{s-2}}_{h_{s-2} \alpha_{s-1}} c^{\alpha_{s-1}}_{h_{s-1} \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_s \alpha_1} - c^{\alpha_1}_{h_1 \alpha_2} \cdots c^{\alpha_{s-2}}_{h_{s-2}} c^{\alpha_{s-1}}_{h_s \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_{s-1} \alpha_1} =$$

$$= c^{\alpha_1}_{h_1 \alpha_2} \cdots c^{\alpha_{s-2}}_{h_{s-2} \alpha_{s-1}} \left(c^{\alpha_{s-1}}_{h_{s-1} \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_s \alpha_1} - c^{\alpha_{s-1}}_{h_s \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_{s-1} \alpha_1} \right).$$

Insă, potrivit identităţilor (4) ale lui Lie, avem

$$c^{\alpha_{s-1}}_{h_{s-1} \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_s \alpha_1} - c^{\alpha_{s-1}}_{h_s \alpha_s} c^{\alpha_s}_{h_{s-1} \alpha_1} = c^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s \alpha_1} c^{\alpha_s}_{h_{s-1} h_s},$$

astfel încât membrii II ai relaţiilor (5) devin

$$c^{\alpha_1}_{h_1 \alpha_2} \cdots c^{\alpha_{s-2}}_{h_{s-2} \alpha_{s-1}} c^{\alpha_{s-1}}_{\alpha_s \alpha_1} c^{\alpha_s}_{h_{s-1} h_s},$$

adică tocmai membrii I.

2. Considerând $s = 2$ în (5), ceea ce înseamnă că tensorii $c_{h_1 \cdots h_{s-1}}$ şi $c_{h_1 \cdots h_{s-1} h_s}$ sunt respectiv vectorul de structură c_h şi tensorul simetric c_{hk}, relaţiile (5) se scriu

$$c_\alpha c^{\alpha}_{hk} = c_{hk} - c_{kh}.$$

Insă $c_{hk} = c_{kh}$, astfel încât avem

Teorema 2. *Componentele tensorului de structură* c^h_{kl} *şi componentele vectorului de structură* c_h *sunt legate prin relaţiile*

$$c_\alpha c^{\alpha}_{hk} = 0 \text{ *}). \tag{6}$$

Presupunând că vectorul c_h este diferit de zero, relaţiile (6) ne arată că rangul matricei $\| c^1_{kl}\ c^2_{kl} \ldots c^r_{kl} \|$ este mai mic decât r. Urmează că putem enunţa

Teorema 3. *Dacă vectorul de structură* c_h *al unui grup* G_r *este diferit de zero, grupul derivat al lui* G_r *are cel mult* $r-1$ *parametri, deci grupul* G_r *nu este simplu* **).

Se ştie [3]***) că, printr'o transformare (2), vectorul c_h poate fi redus la forma canonică $c_h = \delta^p_h$, unde δ^p_h este simbolul lui Kronecker, iar p — fix — are una din valorile 1, 2, ..., r.

---

*) Aceste relaţii se pot stabili şi direct, printr'o contractare de indici în identităţile (4) ale lui Lie, astfel cum a procedat F. Engel (Leipziger Berichte, 1886, p. 89). Demonstraţia lui F. Engel este reprodusă de W. Killing [7].

**) In concordanţă cu o teoremă dată de S. Lie [1], p. 693 : *Un grup* G_r *nu poate fi propriul său grup derivat, decât dacă expresiile* $\sum_s c_{kss}$ *sunt toate nule.*

***) p. 99.

Presupunând $p = r$, rezultă

Teorema 4. *Dacă vectorul de structură* c_h, *diferit de zero, este redus la forma canonică*

$$c_h = \delta_h^r, \tag{7}$$

avem

$$c_{kl}^r = 0. \tag{8}$$

Forma canonică (7) a vectorului c_h, deci şi (8), sunt păstrate numai de grupul de transformări

$$\begin{aligned} \overline{a}^h &= c_k^h a^k + c_r^h a^r \quad (h,k = 1,2,\ldots,r-1), \\ \overline{a}^r &= a^r. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Să considerăm acum $s = 3$ în (5), ceea ce înseamnă că tensorii $c_{h_1\ldots h_{s-1}}$ şi $c_{h_1\ldots h_{s-1}h_s}$ sunt respectiv tensorul simetric c_{hk} şi tensorul triplu covariant $c_{hkl} = c_{h\beta}^{\alpha}\, c_{k\gamma}^{\beta}\, c_{l\alpha}^{\gamma}$.

In acest caz, relaţiile (5) se scriu

$$c_{h\alpha}\, c_{kl}^{\alpha} = c_{hkl} - c_{hlk}. \tag{10}$$

Făcând în (10) o permutare ciclică a indicilor h,k,l, obţinem relaţiile

$$c_{k\alpha}\, c_{lh}^{\alpha} = c_{klh} - c_{khl}. \tag{10'}$$

Insă, potrivit invarianţei componentelor lui c_{hkl} la o permutare ciclică a indicilor, avem

$$c_{hlk} = c_{lkh} = c_{khl},$$

astfel încât, scăzând (10') din (10) şi ţinând seama că $c_{hl}^{\alpha} = -c_{lh}^{\alpha}$, deducem relaţiile

$$c_{h\alpha}\, c_{kl}^{\alpha} + c_{k\alpha}\, c_{hl}^{\alpha} = 0\ ^{*}). \tag{11}$$

Putem deci enunţa

Teorema 5. *Componentele tensorilor* c_{kl}^h, c_{hk}, c_{hkl} *sunt legate prin relaţiile* (10), (11).

4. Să asociem acum grupului G_r forma pătratică $\varphi = c_{hk}\, a^h a^k$, invariantă prin transformările (2). Presupunând că, prin transformări (2), am redus pe φ la o sumă de pătrate

$$\varphi = \varepsilon_h\, (a^h)^2, \tag{12}$$

unde ε_h sunt constante pozitive, negative sau nule, rezultă

$$c_{hk} = \varepsilon_h\, \delta_k^h, \tag{13}$$

adică *putem reduce la zero, prin transformări* (2), *toate componentele tensorului simetric* c_{hk}, *înafară de componentele principale. Prin această reducere, pot să rezulte nule şi unele din componentele principale. Cât priveşte componentele nenule,*

*) Relaţiile (11), scrise sub altă formă (în care nu apare tensorul c_{hk}), au fost stabilite pe o cale diferită şi de W. Killing [7].

al căror număr este egal cu rangul tensorului c_{hk} (rangul matricei $||c_{hk}||$), valorile lor absolute pot fi alese, în mod convenabil, dinainte.

Formele canonice (12) şi (13) sunt păstrate de transformările (2), ai căror coeficienţi verifică relaţiile

$$\varepsilon_h \, c^h_k \, c^h_l = \varepsilon_k \, \delta^k_l .$$

Ţinând seama de (13) în (11), rezultă imediat

T e o r e m a 6. *Dacă tensorul c_{hk} este redus la forma canonică* (13), *componentele tensorului c^h_{kl} verifică relaţiile*

$$\varepsilon_h \, c^h_{kl} + \varepsilon_k \, c^k_{hl} = 0. \tag{14}$$

Observaţie. Dacă, în (14), numerele ε_h sunt toate egale cu 1, teorema 6 este echivalentă cu o teoremă dată de G h. V r ă n c e a n u [3] *), demonstrată prin consideraţii grupale.

5. Să presupunem că rangul tensorului c_{hk} este r, astfel încât numerele ε_h, în (12), (13) şi (14), sunt toate diferite de zero.

Pentru simplificarea scrierii, în calculul ce urmează, să presupunem $\varepsilon_h = \pm 1$.

Făcând $h = k$ în (13), avem

$$c^\alpha_{h\beta} \, c^\beta_{k\alpha} = \varepsilon_h \tag{13'}$$

(h fiind un indice fix).

Ţinând seama de (14), deducem

$$c^\alpha_{h\beta} = - \, \varepsilon_\alpha \, \varepsilon_h \, c^h_{\alpha\beta} ,$$

$$c^\beta_{h\alpha} = - \, \varepsilon_\beta \, \varepsilon_h \, c^h_{\beta\alpha} = \varepsilon_\beta \, \varepsilon_h \, c^h_{\alpha\beta} ,$$

astfel încât (13') devine

$$\varepsilon_\alpha \, \varepsilon_\beta \left(c^h_{\alpha\beta}\right)^2 + \varepsilon_h = 0 \qquad (h \text{ fix}).$$

Putem deci enunţa

T e o r e m a 7. *Dacă tensorul simetric c_{hk}, al grupului G_r de structură reală, este redus la forma canonică* (13), *numerele ε_h (componentele principale ale lui c_{hk}) nu pot fi toate pozitive.*

Altfel spus

Dacă structura grupului G_r este reală, forma $\varphi = c_{hk} \, a^h a^k$, asociată grupului G_r, nu poate fi definită pozitiv.

Presupunând acum $h = k$ în (14), deducem $\varepsilon_h \, c^h_{hl} = 0$ şi deci (c_{hk} fiind presupus şi de astă dată de rangul r) $c^h_{hl} = 0$, h fiind un indice fix. Insă componentele c^h_{hl} ale tensorului c^h_{kl} fiind nule, rezultă că vectorul c_h este nul şi acest fapt constitue o proprietate invariantă faţă de grupul (2).

De asemenea, se vede că, c_{hk} fiind de rangul r, putem considera tensorul contravariant asociat c^{hk}, definit de condiţiile

$$c_{hk} \, c^{kl} = \delta^l_h ,$$

*) p. 105.

astfel încât, în acest caz, formulele (10) se scriu

$$c^h_{kl} = c^{h\alpha}\,(c_{\alpha kl} - c_{\alpha lk}). \qquad (10'')$$

Pentru ca c^h_{kl}, astfel obținute, să poată fi considerate drept constantele de structură ale unui grup G_r, trebue să fie verificate identitățile (4) ale lui Lie, care, ținând seama de (10''), se scriu

$$\begin{aligned}[(c_{\alpha h\lambda} - c_{\alpha\lambda h})\,(c_{\mu kl} - c_{\mu lk}) + (c_{\alpha k\lambda} - c_{\alpha\lambda k})\,(c_{\mu lh} - c_{\mu hl}) + \\ + (c_{\alpha l\lambda} - c_{\alpha\lambda l})\,(c_{\mu hk} - c_{\mu kh})]\,c^{\lambda\mu} = 0.\end{aligned} \qquad (4')$$

Așa dar, avem

Teorema 8. *Dacă tensorul c_{hk} este de rangul r, vectorul de structură c_h este nul și structura grupului este determinată de tensorii covarianți c_{hk}, c_{hkl}, dacă aceștia verifică relațiile (4'). Dacă c_{hk} este redus la forma canonică (13), componentele cu doi indici egali ale tensorului c^h_{kl} sunt nule.*

De aici urmează că putem enunța încă

Teorema 9. *Dacă vectorul de structură c_h este diferit de zero, rangul tensorului c_{hk} este mai mic decât r și deci forma pătratică $\varphi = c_{hk}\,a^h a^k$ este degenerată.*

6. In cazul când vectorul c_h este diferit de zero și redus la forma canonică (7), în general nu putem reduce forma φ la o sumă de pătrate și deci tensorul c_{hk} la forma canonică (13). Putem realiza, totuși, o reducere a lui c_{hk} la o formă canonică *parțială*.

Intr'adevăr, vectorul c_h — nenul — fiind redus la forma canonică (7), observăm că φ se poate scrie

$$\varphi = c_{hk}\,a^h a^k + 2\,c_{hr}\,a^h a^r + c_{rr}\,(a^r)^2 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r-1)$$

și, prin transformările

$$\begin{aligned}\bar{a}^h &= c^h_k\,a^k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r-1),\\ \bar{a}^r &= a^r,\end{aligned} \qquad (9')$$

subgrup al transformărilor (9), care păstrează forma canonică (7) a lui c_h, prima grupă de termeni $c_{hk}\,a^h a^k$ a formei φ se comportă ca o formă pătratică ψ în primii $r-1$ parametri a^h, invariantă față de primele transformări (9'). Putem deci reduce pe ψ, cu ajutorul primelor transformări (9'), la o sumă de pătrate, astfel încât φ devine

$$\varphi = \varepsilon_h\,(a^h)^2 + 2c_{hr}\,a^h a^r + c_{rr}\,(a^r)^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r-1).$$

In ceea ce privește tensorul c_{hk}, avem deci forma canonică (relativă la componentele cu indici diferiți de r)

$$c_{hk} = \varepsilon_h\,\delta^h_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r-1). \qquad (15)$$

Putem spune astfel că

Dacă vectorul c_h, nenul, este redus la forma canonică (7), putem reduce la zero toate componentele tensorului c_{hk} cu indici diferiți de r, înafară de componentele principale. Prin această reducere, pot să rezulte nule și unele din componentele principale (cu indici diferiți de r); cât privește componentele (principale

cu indici diferiţi de r) nenule, valorile lor absolute pot fi alese, în mod convenabil, dinainte.

Vectorul nenul c_h şi tensorul c_{hk} fiind reduşi respectiv la formele (7) şi (15), este uşor de văzut, ţinând seama de (8), că relaţiile (14) — unde h, k iau valorile 1, 2,..., $r-1$ — sunt verificate.

Făcând acum în (14) $h = k$ şi $l = r$, deducem $\varepsilon_h c^h_{hr} = 0$, de unde rezultă că cel puţin unul din numerele ε_h ($h = 1, 2, \ldots, r-1$) este nul. Intr'adevăr, dacă toate aceste numere ar fi diferite de zero, componentele c^h_{hr} ale tensorului c^h_{kl} ar fi toate nule, în contradicţie cu relaţia $c_r = c^h_{hr} = 1$, care este una din relaţiile (7).

Putem deci enunţa

T e o r e m a 10. *Dacă vectorul nenul c_h şi tensorul c_{hk} sunt reduşi la formele canonice (7) şi (15), cel puţin unul din numerele ε_h este nul.*

7. E. C a r t a n a demonstrat [8] că *relaţiile*

$$c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{k\gamma} c^\gamma_{l\alpha} = c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{l\gamma} c^\gamma_{k\alpha} \tag{16}$$

exprimă condiţii necesare şi suficiente pentru ca un grup G_r să fie integrabil *).

Observând însă că

$$c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{k\gamma} c^\gamma_{l\alpha} = c_{hkl}, \quad c^\alpha_{h\beta} c^\beta_{l\gamma} c^\gamma_{k\alpha} = c_{hlk},$$

şi având în vedere invarianţa componentelor tensorului c_{hkl} la o permutare ciclică a indicilor, propoziţia dată de E. C a r t a n mai poate fi enunţată astfel:

Pentru ca un grup să fie integrabil, este necesar şi suficient ca tensorul c_{hkl} să fie simetric în raport cu oricare pereche de indici.

Ţinând apoi seama de (10), deducem

T e o r e m a 11. *Pentru ca un grup să fie integrabil, este necesar şi suficient ca tensorii c_{hk} şi c^h_{kl} să verifice relaţiile*

$$c_{h\alpha} c^h_{kl} = 0. \tag{17}$$

Observaţie. Dacă tensorul c_{hk} este redus la forma (13), relaţiile (17) devin

$$\varepsilon_h c^h_{kl} = 0, \tag{18}$$

h fiind un indice fix.

8. Relaţiile (17) şi (18), valabile pentru un grup integrabil, ne permit să stabilim unele teoreme.

---

*) E. C a r t a n demonstrează această propoziţie prin consideraţii care folosesc coeficienţii $\psi_i(e)$ ai ecuaţiei caracteristice. Se poate arăta însă, pe o cale simplă, că relaţiile (16) exprimă condiţii necesare pentru ca un grup să fie integrabil. Pentru aceasta să presupunem că transformările infinitezimale X_h ale grupului G_r sunt alese astfel încât să avem $c^h_{kl} = 0$, unde $h <$ cel mai mare din indicii k, l [9]. De asemenea, în (16) putem presupune $k \leqslant l$. Aşa fiind, în membrul I numai acele produse sunt eventual nenule, în care $\alpha \geqslant \beta$, $\beta \geqslant \gamma$, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant l$, adică $\alpha = \beta = \gamma \geqslant l$. Urmează că membrul I se reduce la expresia $c^\alpha_{h\alpha} c^\alpha_{k\alpha} c^\alpha_{l\alpha}$ (indicele de sumare α variind dela 1 la r), la care găsim, în mod asemănător, că se reduce şi membrul II.

Teorema 12. *Dacă grupul G_r este integrabil, rangul tensorului simetric c_{hk} este cel mult $r-2$ şi deci, dacă rangul tensorului c_{hk} este r sau $r-1$, grupul este neintegrabil.*

Intr'adevăr, rangul lui c_{hk} nu poate fi r, deoarece din (17) ar rezulta $c^h_{kl} = 0$, deci şi $c_{hk} = 0$.

Să admitem că rangul lui c_{hk} este $r-1$. Reducând pe c_{hk} la forma (13), putem presupune $\varepsilon_h \neq 0$ $(h = 1, 2, \ldots, r-1)$, $\varepsilon_r = 0$. In această ipoteză, din (18) rezultă $c^h_{kl} = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, r-1;\ k, l = 1, 2, \ldots, r)$, astfel încât (13) devine

$$c^r_{hr}\, c^r_{kr} = \varepsilon_h\, \delta^h_k, \quad (h, k = 1, 2, \ldots, r-1).$$

De aici însă, presupunând $h = k$, deducem $(c^r_{hr})^2 = \varepsilon_h$, în contradicţie cu relaţiile $c^r_{hr} = 0$, care se obţin dacă $h \neq k$.

Teorema 13. *Dacă rangul tensorului nenul c_{hk} — al grupului integrabil G_r — este $p \leqslant r-2$, grupul derivat al lui G_r are cel mult $r-p$ parametri.*

Rangul lui c_{hk} fiind p, reducând pe c_{hk} la forma (13), putem presupune $\varepsilon_h \neq 0$ pentru $h = 1, 2, \ldots, p$ şi $\varepsilon_h = 0$ pentru $h = p+1, p+2, \ldots, r$. Aşa fiind, din (18) deducem $c^h_{kl} = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, p;\ k, l = 1, 2, \ldots, r)$, astfel încât, în matricea $\| c^1_{kl}\, c^2_{kl} \ldots c^r_{kl} \|$ $(k, l = 1, 2, \ldots, r)$, elementele primelor p coloane sunt nule, deci rangul acestei matrici, egal cu ordinul grupului derivat al lui G_r, este cel mult $r-p$.

Teorema 14. *Dacă rangul tensorului c_{hk}* este 0 *sau* 1, *grupul G_r este integrabil.*

In cazul când rangul lui c_{hk} este 0, proprietatea este evidentă, relaţiile (17) fiind identic satisfăcute. Presupunând rangul lui c_{hk} egal cu 1 şi reducând pe c_{hk} la forma $c_{hk} = \pm\, \delta^1_h\, \delta^1_k$, din relaţiile (13) obţinem $c^1_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2, \ldots, r)$, astfel încât relaţiile (17) sunt şi de astă dată verificate.

9. Am văzut (teorema 9) că, dacă vectorul c_h este diferit de zero, forma $\varphi = c_{hk}\, a^h a^k$ este degenerată.

Pentru grupurile G_4, vom arăta că proprietatea se menţine şi în cazul când vectorul c_h este nul.

Intr'adevăr, să presupunem că forma φ este nedegenerată.

In acest caz, presupunând pe c_{hk} redus la forma

$$c_{hk} = \varepsilon_h\, \delta^h_k \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_h \neq 0) \tag{19}$$

şi, ţinând seama de teorema 8, deducem că toate componentele cu doi indici egali ale tensorului c^h_{kl} sunt nule. Cum însă cel puţin una din componentele cu indici diferiţi este nenulă, fie de exemplu $c^2_{34} \neq 0$, relaţiile

$$\varepsilon_h\, c^h_{kl} + \varepsilon_k\, c^k_{hl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, 3, 4) \tag{20}$$

ne arată că avem încă $c^3_{24} \neq 0$, $c^4_{23} \neq 0$. Aşa fiind, formulele (19) — corespunzătoare valorilor $h = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$ — ne dau relaţiile incompatibile

$$c^2_{13}\, c^3_{12} + c^2_{14}\, c^4_{12} + c^3_{14}\, c^4_{13} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

$$c^3_{14}\, c^4_{23} = 0, \quad c^2_{14}\, c^4_{32} = 0, \quad c^2_{13}\, c^3_{42} = 0.$$

Putem deci enunța

T e o r e m a 15. *Pentru grupurile* G_4, *de structură reală, forma* $\varphi = c_{hk}\, a^h a^k$ *este degenerată.*

10. Presupunând vectorul c_h — nenul — și tensorul c_{hk} reduși la formele canonice

$$c_h = \delta_h^4 \quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{21}$$

$$c_{hk} = \varepsilon_h\, \delta_k^h \quad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{22}$$

potrivit teoremei 10, cel puțin unul din numerele ε_h este nul.

Vom arăta că, *pentru grupurile* G_4, *cel puțin două din numerele* ε_h *sunt nule.*

Intr'adevăr, să presupunem în (22) $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 = 0$. Dacă în relațiile (20) — valabile și dacă c_{hk} este redus la forma (22) — facem $h = k = 1,\ 2$, deducem $c_{hl}^h = 0$ $(h = 1,\ 2;\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Ținând seama de (21), avem încă $c_{31}^3 = c_{32}^3 = 0$, astfel încât relațiile (22), care nu sunt identic satisfăcute, devin

$$2c_{13}^2\, c_{12}^3 = \varepsilon_1, \quad 2c_{12}^3\, c_{23}^1 = -\varepsilon_2, \quad c_{23}^1\, c_{13}^2 = 0,$$

iar acestea sunt evident incompatibile.

Putem acum demonstra

T e o r e m a 16. *Grupurile* G_4 *cu vector de structură* c_h *nenul sunt integrabile.*

Vectorul c_h și tensorul c_{hk} fiind reduși la formele (21), (22), să presupunem întâi $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Cum avem și $c_{kl}^4 = 0$, din (20) deducem $c_{kl}^1 = 0$ și, ținând seama de (21), rezultă încă $c_{32}^3 = c_{23}^2 = 0$. Găsim de asemenea $c_{24} = c_{34} = 0$ și constatăm că (17) sunt verificate.

Să presupunem acum, în (21), $\varepsilon_h = 0$ $(h = 1,\ 2,\ 3)$. In acest caz, rangul tensorului c_{hk} este 1 sau 0, astfel încât teorema 14 se aplică.

CAPITOLUL II

CLASIFICAREA GRUPURILOR G_4 REALE CU VECTOR DE STRUCTURĂ DIFERIT DE ZERO *)

11. Trecând la problema clasificării grupurilor G_4 reale, vom presupune întâi că vectorul de structură c_h este diferit de zero.

In acest caz, ținând seama de teorema 4 (cap. I), considerăm că avem inițial situația

$$\begin{aligned} c_h &= \delta_h^4 \quad (h = 1,2,3,4), \\ c_{kl}^4 &= 0 \quad (k,l = 1,2,3,4). \end{aligned} \tag{23}$$

In ceea ce privește tensorul simetric c_{hk}, admitem (cap. I, 10) că avem

$$c_{hk} = \varepsilon \delta_h^1\, \delta_k^1 \quad (h,k = 1,2,3). \tag{24}$$

Distingem două cazuri, după cum $\varepsilon \neq 0$ sau $\varepsilon = 0$.

12. In primul caz, din (20) deducem $c_{kl}^1 = 0$ $(k,l = 1,2,3,4)$. Ținând seama de (23), rezultă încă $c_{23}^2 = c_{23}^3 = 0$.

*) Tipurile de grup G_4 care se obțin în acest caz au fost date în [10].

Dintre relaţiile (24), relaţia $c_{11} = \varepsilon$, singura neidentic satisfăcută, se scrie

$$\left(c_{12}^2\right)^2 + c_{13}^2\, c_{12}^3 = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{25}$$

Situaţia obţinută este păstrată de transformările

$$\begin{aligned} \bar{a}^1 &= a^1 + c_4^1\, a^4, \\ \bar{a}^h &= c_k^h\, a^k \quad (h = 2,3;\ k = 1,2,3,4), \\ \bar{a}^4 &= a^4, \end{aligned} \tag{26}$$

în virtutea cărora avem

$$\Delta \bar{c}_{12}^2 = c_{12}^2\, c_2^2\, c_3^3 - c_{13}^2\, c_2^2\, c_2^3 + c_{12}^3\, c_3^2\, c_3^3 - c_{13}^3\, c_3^2\, c_2^3,$$

unde Δ este determinantul transformărilor (26).

Putem deci să presupunem $c_{12}^2 = 0$.

Ţinând seama de (23), avem încă $c_{13}^3 = 0$.

Deducem că identităţile (4) ale lui Lie se reduc la următoarele (distincte)

$$\left.\begin{aligned} (2124) &= c_{31}^2\, c_{24}^3 + c_{12}^3\, c_{34}^2 = 0, \\ (2134) &= c_{31}^2 \left(1 - 2\, c_{24}^2\right) = 0, \\ (3124) &= c_{12}^3 \left(1 - 2\, c_{34}^3\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

iar (25) devine

$$c_{13}^2\, c_{12}^3 = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

Componentele c_{13}^2, c_{12}^3 fiind diferite de zero, din ultimele relaţii (27) deducem $c_{24}^2 = c_{34}^3 = \frac{1}{2}$.

In virtutea transformărilor (26) (unde $c_3^2 = c_2^3 = 0$), avem

$$\bar{c}_{13}^2\, c_3^3 = c_{13}^2\, c_2^2,$$

ceea ce înseamnă că putem presupune $c_{13}^2 = 1$, situaţia obţinută fiind păstrată de transformările (26) (unde $c_3^2 = c_2^3 = 0$, $c_2^2 = c_3^3$).

Ţinând seama de (28) şi presupunând că am ales iniţial $\varepsilon = \pm 2$, deducem încă $c_{12}^3 = \pm 1$.

Mai departe avem

$$\bar{c}_{34}^2 = c_{34}^2 + c_{13}^2\, c_4^1.$$

Presupunând $c_{34}^2 = 0$, din prima relaţie (27) rezultă $c_{24}^3 = 0$.

In sfârşit, în virtutea transformărilor (26) (unde $c_3^2 = c_2^3 = 0$, $c_2^2 = c_3^3$, $c_4^1 = 0$), avem formulele

$$\begin{aligned} \bar{c}_{14}^2 &= c_{14}^2\, c_2^2 - c_{24}^2\, c_1^2 - c_{13}^2\, c_4^3, \\ \bar{c}_{14}^3 &= c_{14}^3\, c_2^2 - c_{34}^3\, c_1^3 - c_{12}^3\, c_4^2, \end{aligned}$$

care ne arată că putem reduce la zero şi componentele c_{14}^2, c_{14}^3.

Obţinem astfel ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned}&(X_1X_2)=\varepsilon X_3,\quad (X_1X_3)=X_2,\quad (X_2X_3)=0,\quad \varepsilon=\pm 1\\&(X_1X_4)=0,\ (X_2X_4)=\frac{1}{2}X_2,\ (X_3X_4)=\frac{1}{2}X_3.\end{aligned}\right\}\qquad (I)$$

In ceea ce priveşte tensorul simetric c_{hk}, avem $c_{11}=\pm 2$, $c_{44}=\frac{1}{2}$, toate celelalte componente fiind nule.

Observaţie. Grupul derivat al grupului G_4, de structură (I), este un grup abelian cu doi parametri.

13. In cazul $\varepsilon=0$, relaţiile (24) se scriu desvoltat

$$\begin{aligned}&(c^2_{21})^2-c^2_{31}c^3_{12}=0,\qquad c^1_{12}c^1_{13}-c^2_{21}c^1_{23}=0,\\&(c^1_{12})^2-c^3_{12}c^1_{23}=0,\qquad c^1_{13}c^2_{21}-c^1_{12}c^2_{31}=0,\\&(c^1_{13})^2-c^1_{23}c^2_{31}=0,\qquad c^2_{21}c^1_{12}-c^1_{13}c^3_{12}=0.\end{aligned}\qquad (24')$$

Privitor la componentele c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12}, se pot face următoarele ipoteze:

A. Toate aceste componente sunt nule.

Ţinând seama de (24') şi de (23), deducem

$$c^2_{21}=c^3_{31}=c^1_{12}=c^3_{32}=c^1_{13}=c^2_{23}=0.$$

B. Două din componentele c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} sunt nule, cealaltă nenulă, de exemplu $c^1_{23}=c^2_{31}=0$, $c^3_{12}\neq 0$.

Deducem şi de data aceasta că sunt nule componentele c^h_{hk} $(h,\ k=1,2,3)$ ale tensorului c^h_{kl}.

C. Una din componentele c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} este nulă, celelalte nenule, de exemplu $c^1_{23}=0$, $c^2_{31}\neq 0$, $c^3_{12}\neq 0$.

Rezultă $c^2_{21}=-c^3_{31}$, $c^1_{12}=c^3_{32}=c^1_{13}=c^2_{23}=0$.

D. Toate componentele c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} sunt diferite de zero. Rezultă că şi componentele c^h_{hk} $(h,k=1,2,3)$, ale lui c^h_{kl}, sunt diferite de zero.

Insă ipotezele C şi D sunt echivalente cu B.

Intr'adevăr, să ne situăm întâi în ipoteza C. Potrivit transformărilor [care păstrează nule componentele c_{hk} $(h,k=1,2,3)$ ale lui c_{hk} şi pe c^1_{23}]

$$\bar a^1=a^1,\quad \bar a^2=c^2_2a^2+c^2_3a^3,\quad \bar a^3=c^3_2a^2+c^3_3a^3,\quad \bar a^4=a^4,$$

avem, dacă ţinem seama de (24')

$$\bar c^2_{13}\,\delta=\frac{1}{c^2_{13}}(c^2_{13}c^2_2-c^2_{12}c^2_3)^2,$$

$$\bar c^3_{12}\,\delta=\frac{1}{c^2_{13}}(c^2_{13}c^3_2-c^2_{12}c^3_3)^2\qquad (\delta=c^2_2c^3_3-c^3_2c^3_2\neq 0).$$

Putem deci reduce la zero una din componentele c^2_{13}, c^3_{12}, cealaltă rămânând diferită de zero, ceea ce înseamnă că ipoteza C nu este distinctă de B.

Să ne situăm acum în ipoteza D. In virtutea transformărilor

$$\begin{aligned} \bar{a}^h &= c^h_k\, a^k \qquad (h, k = 1, 2, 3) \\ \bar{a}^4 &= a^4, \end{aligned} \tag{29}$$

care păstrează nule componentele c_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$, ale tensorului simetric, avem (Δ fiind determinantul transformărilor)

$$\Delta \bar{c}^1_{23} = \frac{1}{c^1_{23}} (c^1_{23} c^1_1 - c^1_{13} c^1_2 + c^1_{12} c^1_3)^2,$$

$$\Delta \bar{c}^2_{31} = \frac{1}{c^1_{23}} (c^1_{23} c^2_1 - c^1_{13} c^2_2 + c^1_{12} c^2_3)^2,$$

$$\Delta \bar{c}^3_{12} = \frac{1}{c^1_{23}} (c^1_{23} c^3_1 - c^1_{13} c^3_2 + c^1_{12} c^3_3)^2.$$

Putem deci reduce la zero două din componentele c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} (nu însă pe toate), ceea ce înseamnă că nici ipoteza D nu este distinctă de B.

Rămân deci de considerat ipotezele *distincte* A, B.

Este clar că aceste ipoteze sunt distincte, deoarece tipurile de grup G_4, care se obțin în ipoteza A, conțin un G_3 abelian, ceea ce nu se întâmplă cu tipurile de grup G_4, care se obțin în ipoteza *B*.

Ipoteza A

14. In această ipoteză, având $c^h_{kl} = 0$ $(h,k,l = 1,2,3$ și $c^4_{kl} = 0$ $(k,l = 1,2,3,4)$, identitățile lui Lie sunt *identic* satisfăcute, iar componentele c_{h4} $(h = 1,2,3)$, ale tensorului c_{hk} sunt nule, singura componentă eventual nenulă fiind c_{44}.

Față de grupul de transformări (29), care păstrează nule componentele c^h_{kl} $(h,k,l = 1,2,3)$ și c^4_{kl} $(k,l = 1,2,3,4)$ *), c^h_{k4} $(h,k = 1,2,3)$ constitue componentele unui tensor mixt de al doilea ordin, formulele de transformare pentru componentele acestui tensor fiind **)

$$\bar{c}^h_{\alpha 4}\, c^\alpha_k = c^\beta_{k4}\, c^h_\beta \qquad (h, k, \alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{30}$$

Pentru $h = 3$, $k = 1,2,3$, obținem relațiile

$$\bar{c}^3_{\alpha 4}\, c^\alpha_1 = c^\beta_{14}\, c^3_\beta, \quad \bar{c}^3_{\alpha 4}\, c^\alpha_2 = c^\beta_{24}\, c^3_\beta, \quad \bar{c}^3_{\alpha 4}\, c^\alpha_3 = c^\beta_{34}\, c^3_\beta, \tag{30'}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Deosebim două cazuri, după cum rangul ρ al tensorului c^h_{k4}, adică rangul matricei $\mu = \| c^h_{k4} \|$, formată cu componentele acestui tensor, este 3 sau mai mic decât 3.

---

*) De fapt, grupul complet care păstrează situația obținută este

$$\begin{aligned} \bar{a}^h &= c^h_k\, a^k + c^h_4\, a^4 \qquad (h, k = 1, 2, 3), \\ \bar{a}^4 &= a^4; \end{aligned}$$

a fost restrâns pentru a face posibilă considerarea tensorului c^h_{k4}.

**) Se obțin făcând $l = r = 4$ în formulele (3).

Observație. Matricea μ se obține din matricea $\| c_{kl}^1 \; c_{kl}^2 \ldots c_{kl}^r \|$ $(k, l = 1,2,3,4)$, suprimând elementele c_{kl}^h $(h, k, l = 1,2,3)$ și $c_{kl}^4 (k,l = 1,2,3,4)$, care sunt nule. Așa dar, cele două cazuri corespund faptului că ordinul grupului derivat al lui G_4 este respectiv 3 sau mai mic decât 3.

Cazul $\rho = 3$

15. In acest caz, putem reduce la zero componentele c_{14}^3, c_{24}^3.

Intr'adevăr, presupunând $\bar{c}_{14}^3 = \bar{c}_{24}^3 = 0$, relațiile (30′) devin

$$\begin{aligned} \bar{c}_{34}^3 c_1^3 &= c_{14}^1 c_1^3 + c_{14}^2 c_2^3 + c_{14}^3 c_3^3, \\ \bar{c}_{34}^3 c_2^3 &= c_{24}^1 c_1^3 + c_{24}^2 c_2^3 + c_{24}^3 c_3^3, \\ \bar{c}_{34}^3 c_3^3 &= c_{34}^1 c_1^3 + c_{34}^2 c_2^3 + c_{34}^3 c_3^3, \end{aligned} \tag{30″}$$

iar acestea ne arată că c_1^3, c_2^3, c_3^3 sunt coordonatele omogene ale unui punct unit al omografiei plane

$$\lambda \bar{x}_k = c_{k4}^{\alpha} x_{\alpha} \qquad (k, \alpha = 1, 2, 3), \tag{31}$$

care are cel puțin un punct unit real.

Invers, presupunând în (30′) coeficienții c_1^3, c_2^3, c_3^3 egali cu coordonatele unuia din punctele unite reale ale omografiei (31), componentele $\bar{c}_{14}^3$, $\bar{c}_{24}^3$ rezultă nule.

Vom presupune deci $c_{14}^3 = c_{24}^3 = 0$, situația obținută fiind păstrată de transformările (29) (unde $c_1^3 = c_2^3 = 0$). Față de aceste transformări, componenta c_{34}^3 — diferită de zero — este un invariant absolut, iar c_{k4}^h $(h, k = 1, 2)$ constitue componentele unui tensor mixt de al doilea ordin, *de rangul 2*, formulele de transformare pentru acest tensor fiind

$$\bar{c}_{\alpha 4}^h c_k^{\alpha} = c_{k4}^{\beta} c_{\beta}^h \qquad (h, k, \alpha, \beta = 1, 2). \tag{32}$$

De aici obținem, pentru $h = 2$, $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \bar{c}_{14}^2 c_1^1 + \bar{c}_{24}^2 c_1^2 &= c_{14}^1 c_1^2 + c_{14}^2 c_2^2, \\ \bar{c}_{14}^2 c_2^1 + \bar{c}_{24}^2 c_2^2 &= c_{24}^1 c_1^2 + c_{24}^2 c_2^2. \end{aligned} \tag{32′}$$

Putem reduce la zero componenta c_{14}^2 sau putem face să avem $c_{14}^1 = c_{24}^2$, $c_{24}^1 + c_{14}^2 = 0$.

Intr'adevăr, presupunînd $\bar{c}_{14}^2 = 0$, din (32′) obținem relația

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{c_{14}^1 c_1^2 + c_{14}^2 c_2^2}{c_{24}^1 c_1^2 + c_{24}^2 c_2^2},$$

care ne arată că c_1^2, c_2^2 sunt coordonatele omogene ale unui punct unit al proiectivității

$$\bar{t} = \frac{c_{14}^1 t + c_{14}^2}{c_{24}^1 t + c_{24}^2}. \tag{33}$$

Invers, presupunând că punctele unite ale acestei proiectivităţi sunt reale, dacă luăm în (32′) coeficienţii c_1^2, c_2^2 egali cu coordonatele omogene ale unuia din punctele unite, rezultă $\bar{c}_{14}^2 = 0$.

Vom considera deci $c_{14}^2 = 0$ şi situaţia obţinută este păstrată de grupul de transformări

$$\begin{aligned} \bar{a}^1 &= c_1^1 a^1 + c_2^1 a^2 + c_3^1 a^3, & \bar{a}^3 &= c_3^3 a^3, \\ \bar{a}^2 &= \quad c_2^2 a^2 + c_3^2 a^3, & \bar{a}^4 &= a^4, \end{aligned} \tag{34}$$

faţă de care componentele c_{14}^1, c_{24}^2, c_{34}^3 sunt invarianţi absoluţi.

Formulele

$$\begin{aligned} \bar{c}_{34}^2 c_3^3 &= c_{34}^2 c_2^2 + (c_{34}^3 - c_{24}^2) c_3^2, \\ \bar{c}_{24}^1 c_3^2 + \bar{c}_{34}^1 c_3^3 &= c_{34}^1 c_1^1 + c_{34}^2 c_2^1 + (c_{34}^3 - c_{14}^1) c_3^1, \end{aligned} \tag{35}$$

care se obţin făcând $h = 2$, $k = 3$ şi $h = 1$, $k = 3$ în (32), ne conduc să distingem cazurile:

a) toţi invarianţii c_{14}^1, c_{24}^2, c_{34}^3 sunt distincţi

b) doi invarianţi sunt egali, de exemplu $c_{14}^1 = c_{24}^2 \neq c_{34}^3$

c) toţi aceşti invarianţi sunt egali.

16. In cazul *a)*, formulele (35) ne arată că putem presupune

$$c_{34}^2 = c_{34}^1 = 0 \quad (c_3^2 = c_3^1 = 0).$$

Făcând $h = 1$, $k = 2$ în (32), obţinem formula

$$\bar{c}_{24}^1 c_2^2 = c_{24}^1 c_1^1 + (c_{24}^2 - c_{14}^1) c_2^1,$$

ceea ce înseamnă că putem reduce la zero şi componenta c_{24}^1.

Urmează că ecuaţiile de structură ale lui G_4 sunt

$$\left.\begin{aligned} (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ (X_1 X_4) = aX_1, \ (X_2 X_4) = bX_2, \ (X_3 X_4) = (1 - a - b) X_3 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

constantele ireductibile a, b, $1 - a - b$ fiind distincte şi diferite de zero.

In ceea ce priveşte tensorul simetric c_{hk}, avem $c_{44} = a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2$, toate celelalte componente fiind nule.

In cazul *b)*, întocmai ca şi în cazul *a)*, reducem la zero componentele c_{34}^2, c_{34}^1. In ceea ce priveşte componenta c_{24}^1, avem

$$\bar{c}_{24}^1 c_2^2 = c_{24}^1 c_1^1.$$

Dacă $c_{24}^1 = 0$, obţinem ecuaţiile de structură conţinute în (II) pentru $a = b$. Dacă însă $c_{24}^1 \neq 0$, reducând la unitate această componentă, obţinem ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned} (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ (X_1 X_4) = aX_1, \ (X_2 X_4) = X_1 + aX_2, \ (X_3 X_4) = (1 - 2a) X_3 \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

unde $a \neq 0, \neq \frac{1}{2}, \neq \frac{1}{3}$.

Privitor la tensorul simetric c_{hk}, avem $c_{44} = 6a^2 - 4a + 1$, celelalte componente fiind toate egale cu zero.

In cazul *c)* avem, potrivit transformărilor (34),

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^1_{24}\, c^2_2 &= c^1_{24}\, c^1_1, \\ \bar{c}^2_{34}\, c^3_3 &= c^2_{34}\, c^2_2, \\ \bar{c}^1_{24}\, c^2_3 + \bar{c}^1_{34}\, c^3_3 &= c^1_{34}\, c^1_1 + c^2_{34}\, c^1_2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Dacă $c^1_{24} = c^2_{34} = 0$, a treia formulă (36) ne arată că c^1_{34} este invariant relativ al transformărilor (34).

Se poate întâmpla să avem $c^1_{34} = 0$. In acest caz se obţin ecuaţiile de structură conţinute în (II), pentru $a = b = \frac{1}{3}$.

Dacă însă $c^1_{34} \neq 0$, reducem această componentă la unitate; ecuaţiile de structură care se obţin *) coincid, printr'o schimbare de indici, cu ecuaţiile (III) în care $a = \frac{1}{3}$.

Tot ecuaţiile (III) $\left(\text{unde } a = \frac{1}{3}\right)$ se obţin, cum este uşor de văzut, şi dacă numai una din componentele c^1_{24}, c^2_{34} este nulă.

In sfârşit, dacă c^1_{24} şi c^2_{34} sunt diferite de zero, putem reduce aceste componente la unitate şi pe c^1_{34} la zero. Obţinem astfel ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned} &(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ &(X_1 X_4) = \frac{1}{3} X_1,\ (X_2 X_4) = X_1 + \frac{1}{3} X_2,\ (X_3 X_4) = X_2 + \frac{1}{3} X_3 \text{ **)} \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

In ceea ce priveşte tensorul simetric c_{hk}, avem $c_{44} = \frac{1}{3}$, toate celelalte componente fiind nule.

17. Să presupunem acum că odată reduse la zero componentele c^3_{14}, c^3_{24}, punctele unite ale proiectivităţii (33) sunt imaginare.

Ecuaţia care dă punctele unite fiind

$$c^1_{24}\, t^2 - (c^1_{14} - c^2_{24})\, t - c^2_{14} = 0, \tag{37}$$

înseamnă că presupunem

$$(c^1_{14} - c^2_{24})^2 + 4 c^1_{24}\, c^2_{14} < 0,$$

deci componentele c^1_{24}, c^2_{14}, nenule, sunt de semne contrarii.

Putem aduce ecuaţia (37) la forma

$$t^2 + 1 = 0,$$

*) In [10], aceste ecuaţii, despre care nu s'a observat că sunt echivalente cu (III) $\left(\text{unde } a = \frac{1}{3}\right)$, au fost considerate distincte şi numerotate cu (IV_2).

**) In [10], aceste ecuaţii au fost numerotate cu (IV_1).

deci putem face astfel încât să avem

$$c^1_{14} - c^2_{24} = 0, \quad c^1_{24} + c^2_{14} = 0. \tag{38}$$

Intr'adevăr, în virtutea transformărilor (29) (unde $c^3_1 = c^3_2 = 0$) avem

$$\delta\,(\bar{c}^1_{14} - \bar{c}^2_{24}) = (c^1_{14} - c^2_{24})\,(c^1_1\,c^2_2 + c^1_2\,c^2_1) - 2c^1_{24}\,c^1_1\,c^2_1 + 2c^2_{14}\,c^1_2\,c^2_2,$$

$$(\delta = c^1_1\,c^2_2 - c^1_2\,c^2_1 \neq 0),$$

ceea ce înseamnă că putem alege coeficienţii transformărilor astfel încât să rezulte $\bar{c}^1_{14} - \bar{c}^2_{24} = 0$.

De asemenea, în virtutea transformărilor (29) (unde $c^1_2 = c^2_1 = c^3_1 = c^3_2 = 0$) faţă de care c^1_{24}, c^2_{14} sunt invarianţi absoluţi, avem

$$(\bar{c}^1_{24} + \bar{c}^2_{14})\,c^1_1\,c^2_2 = c^1_{24}(c^1_1)^2 + c^2_{14}(c^2_2)^2,$$

şi cum componentele c^1_{24}, c^2_{14} sunt de semne contrarii, înseamnă că putem alege coeficienţii c^1_1, c^2_2 astfel încât să rezulte $\bar{c}^1_{24} + \bar{c}^2_{14} = 0$.

Vom presupune deci că sunt satisfăcute condiţiile (38), situaţia obţinută fiind păstrată de transformările

$$\bar{a}^1 = c^1_1\,a^1 + c^1_3\,a^3, \quad \bar{a}^2 = c^2_2\,a^2 + c^2_3\,a^3, \quad \bar{a}^3 = c^3_3\,a^3, \quad \bar{a}^4 = a^4,$$

$$(c^1_1 = c^2_2)$$

în raport cu care c^1_{14}, c^2_{24}, c^1_{24}, c^2_{14} sunt invarianţi absoluţi.

In ceea ce priveşte componentele c^2_{34}, c^1_{34}, avem formulele de transformare

$$\bar{c}^2_{34}\,c^3_3 = c^2_{34}\,c^1_1 - c^2_{14}\,c^1_3 + c^3_{34}\,c^2_3,$$

$$\bar{c}^1_{34}\,c^3_3 = c^1_{34}\,c^1_1 + (c^3_{34} - c^1_{14})\,c^1_3 - c^1_{24}\,c^2_3,$$

astfel încât putem presupune $c^2_{34} = c^1_{34} = 0$.

Obţinem astfel ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned} &(X_1\,X_2) = (X_1\,X_3) = (X_2\,X_3) = 0, \\ &(X_1\,X_4) = aX_1 - bX_2, \ (X_2\,X_4) = bX_1 + aX_2, \ (X_3\,X_4) = (1-2a)X_3 \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

unde $a \neq \dfrac{1}{2}$, $b \neq 0$.

Privitor la tensorul c_{hk}, avem $c_{44} = 6\,a^2 - 2\,b^2 - 4\,a + 1$, toate celelalte componente fiind nule.

Cazul $\rho < 3$.

18. In acest caz, putem reduce la zero componentele c^3_{k4} ale tensorului c^h_{k4} $(h, k = 1, 2, 3)$.

Intr'adevăr, putem alege coeficienţii c^3_1, c^2_2, c^3_3 — nu toţi nuli — ai transformărilor (29), astfel încât să verifice sistemul de ecuaţii liniare omogene

$$c^1_{h4}\,c^3_1 + c^2_{k4}\,c^3_2 + c^3_{k4}\,c^3_3 = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Pentru c_1^3, c_2^3, c_3^3 astfel aleşi, relaţiile (30′) devin

$$\bar{c}_{14}^3 c_k^1 + \bar{c}_{24}^3 c_k^2 + \bar{c}_{34}^3 c_k^3 = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

şi acestea ne dau $\bar{c}_{k4}^3 = 0$.

Vom presupune deci $c_{k4}^3 = 0$, toate rezultatele obţinute fiind păstrate de transformările (29) ($c_1^3 = c_2^3 = 0$), faţă de care c_{k4}^h ($h, k = 1, 2$) constitue componentele unui tensor mixt de al doilea ordin.

Presupunând că rangul acestui tensor este 2, întocmai ca şi în cazul $\rho = 3$ suntem conduşi să considerăm proiectivitatea (33).

Dacă punctele unite ale proiectivităţii (33) sunt reale, reducem la zero componenta c_{14}^2. In virtutea transformărilor (29) ($c_1^2 = c_1^3 = c_2^3 = 0$), faţă de care c_{14}^1, c_{24}^2 — diferite de zero — sunt invarianţi absoluţi, avem formula

$$\bar{c}_{34}^2 c_3^3 = c_{34}^2 c_2^2 - c_{24}^2 c_3^2,$$

care se obţine făcând $h = 2$, $k = 3$ în (30), ceea ce înseamnă că putem presupune $c_{34}^2 = 0$, situaţia obţinută fiind păstrată de transformările (29) ($c_1^2 = c_3^2 = c_1^3 = c_2^3 = 0$).

Făcând $h = 1$, $k = 3$ în (30), obţinem

$$\bar{c}_{34}^1 c_3^3 = c_{34}^1 c_1^1 - c_{14}^1 c_3^1,$$

astfel încât putem reduce la zero şi componenta c_{34}^1.

In sfârşit, dacă facem $h = 1$, $k = 2$ în (30), obţinem formula

$$\bar{c}_{24}^1 c_2^2 = c_{24}^1 c_1^1 + (c_{24}^2 - c_{14}^1) c_2^1.$$

Distingem două cazuri:

$$\alpha)\ c_{14}^1 \neq c_{24}^2; \quad \beta)\ c_{14}^1 = c_{24}^2.$$

In cazul α), reducând la zero componenta c_{24}^1, obţinem ecuaţiile de structură conţinute în (II) pentru $a + b = 1$, $a \neq 0, \neq 1$.

In cazul β), având $c_{14}^1 = c_{24}^2 = \frac{1}{2}$, componenta c_{24}^1 este un invariant relativ, pe care îl putem reduce la unitate dacă este diferit de zero. Deducem astfel ecuaţiile de structură conţinute în (II) pentru $a = b = \frac{1}{2}$, sau ecuaţiile conţinute în (III) pentru $a = \frac{1}{2}$, după cum $c_{24}^1 = 0$ sau $\neq 0$.

Dacă punctele unite ale proiectivităţii (33) sunt imaginare, întocmai ca în cazul $\rho = 3$ studiat mai sus, putem presupune $c_{14}^1 = c_{24}^2$, $c_{24}^1 + c_{14}^2 = 0$. Găsim uşor ecuaţiile de structură conţinute în (V) pentru $a = \frac{1}{2}$.

19. Să presupunem acum că rangul tensorului c_{k4}^h ($h, k = 1, 2$) este mai mic decât 2. In acest caz, putem reduce la zero componentele c_{14}^2, c_{24}^2 (sau c_{14}^1, c_{24}^1). Intr'adevăr, în virtutea transformărilor (29) ($c_1^3 = c_2^3 = 0$), din relaţiile (32) obţinem, pentru $h = 2$, $k = 1, 2$, relaţiile (32′). Determinantul

$\left| c^h_{k4} \right|$ $(h, k = 1, 2)$ fiind nul, putem alege coeficienţii c^2_1, c^2_2 — nu ambii nuli — astfel încât membrii II ai relaţiilor (32′) să fie nuli. Coeficienţii c^2_1, c^2_2 fiind astfel aleşi, rezultă $\bar{c}^2_{14} = \bar{c}^2_{24} = 0$.

Presupunând $c^2_{14} = c^2_{24} = 0$ $(c^2_1 = 0)$, avem încă $c^1_{14} = 1$.

Dacă în (30) facem $h = 1$, $k = 2$, obţinem formula

$$\bar{c}^1_{24}\, c^2_2 = c^1_{24}\, c^1_1 - c^1_{14}\, c^1_2,$$

ceea ce înseamnă că putem presupune $c^1_{24} = 0$ $(c^1_2 = 0)$.

In sfârşit, făcând $h = 1$, $k = 3$ şi $h = 2$, $k = 3$ în (30), obţinem formulele

$$\bar{c}^1_{34}\, c^3_3 = c^1_{34}\, c^1_1 - c^1_{14}\, c^1_3,$$
$$\bar{c}^2_{34}\, c^3_3 = c^2_{34}\, c^2_2,$$

care ne arată că putem reduce la zero componenta c^1_{34} şi la unitate pe c^2_{34}, dacă este diferită de zero.

Se găsesc, în primul caz, ecuaţiile de structură conţinute în (II) pentru $a = 1$, $b = 0$, iar în al doilea caz (printr'o permutare de indici) ecuaţiile conţinute în (III) pentru $a = 0$.

Ipoteza B

20. In această ipoteză avem

$$c^h_{kl} = c^3_{12}\, \delta^h_3\, \delta^1_k\, \delta^2_l \qquad (h, k, l = 1, 2, 3),$$

componenta c^3_{12} fiind diferită de zero, iar componentele c_{h4} $(h = 1, 2, 3)$ ale tensorului simetric c_{hk} fiind nule.

Identităţile (4) ale lui Lie se reduc la următoarele (distincte):

$$(1124) = c^1_{43}\, c^3_{12} = 0,$$
$$(2124) = c^2_{43}\, c^3_{12} = 0,$$
$$(3124) = \left(c^1_{14} + c^2_{24} - c^3_{34}\right) c^3_{12} = 0,$$

de unde rezultă, ţinând seama şi de (23),

$$c^1_{34} = c^2_{34} = 0, \quad c^3_{34} = \frac{1}{2},$$

rezultatele obţinute fiind păstrate de transformările *)

$$\bar{a}^1 = c^1_1\, a^1 + c^1_2\, a^2, \quad \bar{a}^3 = c^3_1\, a^1 + c^3_2\, a^2 + c^3_3\, a^3,$$
$$\bar{a}^2 = c^2_1\, a^1 + c^2_2\, a^2, \quad \bar{a}^4 = a^4. \tag{39}$$

*) Grupul complet, care păstrează situaţia obţinută, este

$$\bar{a}^1 = c^1_1\, a^1 + c^1_2\, a^2 + c^1_4\, a^4, \quad \bar{a}^3 = c^3_1\, a^1 + c^3_2\, a^2 + c^3_3\, a^3 + c^3_4\, a^4,$$
$$\bar{a}^2 = c^2_1\, a^1 + c^2_2\, a^2 + c^2_4\, a^4, \quad \bar{a}^4 = a^4;$$

a fost restrâns pentru a face posibilă considerarea tensorului mixt c^h_{k4} $(h, k = 1, 2, 3)$.

Faţă de aceste transformări, c^h_{k4} $(h, k = 1, 2, 3)$ constitue componentele unui tensor mixt de al doilea ordin, formulele de transformare pentru acest tensor fiind formulele (30). De asemenea, c^h_{k4} $(h, k = 1, 2)$ constitue, faţă de aceleaşi transformări, componentele unui tensor mixt de al doilea ordin.

Intocmai ca şi în ipoteza A, deosebim două cazuri, după cum rangul ρ al matricei $\| c^h_{k4} \|$ $(h, k = 1, 2, 3)$ este 3 sau mai mic decât 3.

Cazul $\rho = 3$

21. Prin considerarea omografiei (31), reducem la zero componentele c^3_{14}, c^3_{24}, după care, determinantul $\left| c^h_{k4} \right|$ $(h, k = 1, 2)$ — invariant absolut faţă de transformările (39) — fiind diferit de zero, suntem conduşi să considerăm proiectivitatea (33). Dacă punctele unite ale acestei proiectivităţi sunt reale, reducem la zero componenta c^2_{14}.

In virtutea transformărilor

$$\bar{a}^1 = c^1_1 a^1 + c^1_2 a^2, \quad \bar{a}^2 = c^2_2 a^2, \quad \bar{a}^3 = c^3_3 a^3, \quad \bar{a}^4 = a^4,$$

care menţin rezultatele obţinute şi faţă de care c^1_{14}, c^1_{24} sunt invarianţi absoluţi, avem

$$\bar{c}^1_{24} c^2_2 = c^1_{24} c^1_1 + (c^2_{24} - c^1_{14}) c^1_2,$$

$$\bar{c}^3_{12} c^1_1 c^2_2 = c^3_{12} c^3_3.$$

Dacă $c^1_{14} \neq c^2_{24}$, reducând la zero pe c^1_{24} şi la unitate pe c^3_{12}, rezultă că ecuaţiile de structură ale grupului G_4 sunt

$$\left.\begin{aligned} (X_1 X_2) = X_3, \ (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ (X_1 X_4) = a X_1, \ (X_2 X_4) = \left(\frac{1}{2} - a\right) X_2, \ (X_3 X_4) = \frac{1}{2} X_3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

unde $a \neq 0, \neq \frac{1}{2}$.

In ceea ce priveşte tensorul c_{hk}, avem $c_{44} = 2a^2 - a + \frac{1}{2}$, toate celelalte componente fiind nule.

Dacă însă $c^1_{14} = c^2_{24} \left(= \frac{1}{2} \right)$ şi $c^1_{24} = 0$, obţinem ecuaţiile de structură conţinute în (VI) pentru $a = \frac{1}{4}$, iar dacă $c^1_{24} \neq 0$, reducând această componentă la unitate, rezultă că ecuaţiile de structură ale lui G_4 sunt

$$\left.\begin{aligned} (X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ (X_1 X_4) = \frac{1}{4} X_1, \quad (X_2 X_4) = X_1 + \frac{1}{4} X_2, \quad (X_3 X_4) = \frac{1}{2} X_3. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII)}$$

Relativ la tensorul c_{hk} avem $c_{44} = \frac{3}{8}$, toate celelalte componente fiind nule.

22. Dacă punctele unite ale proiectivității (33) sunt imaginare, putem presupune, ca și în ipoteza A, că avem $c_{14}^1 = c_{24}^2$ și $c_{14}^1 + c_{24}^2 = 0$, situația aceasta fiind păstrată de transformările

$$\overline{a}^1 = \alpha a^1, \quad \overline{a}^2 = \alpha a^2, \quad \overline{a}^3 = \beta a^3, \quad \overline{a}^4 = a^4,$$

față de care c_{14}^1, c_{24}^2, c_{24}^1, c_{14}^2 sunt invarianți absoluți.

Reducând la unitate componenta c_{12}^3, deducem ecuațiile de structură

$$\left.\begin{aligned} &(X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0, \\ &(X_1 X_4) = \frac{1}{4} X_1 - a X_2, \quad (X_2 X_4) = a X_1 + \frac{1}{4} X_2, \quad (X_3 X_4) = \frac{1}{2} X_3 \end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

unde $a \neq 0$.

Pentru tensorul c_{hk} avem $c_{44} = \frac{3}{8} - 2a^2$, toate celelalte componente fiind nule.

Cazul $\rho < 3$

23. Determinantul $\left| c_{k4}^h \right|$ $(h, k = 1, 2)$ fiind nul, proiectivitatea (33) este degenerată. In acest caz, putem reduce la zero componentele c_{14}^2, c_{24}^2. Intr'adevăr, în virtutea transformărilor (39), avem relațiile (32′). Alegând coeficienții c_1^2, c_2^2 astfel încât membrii II ai acestor relații să fie nuli, rezultă $\overline{c}_{14}^2 = \overline{c}_{24}^2 = 0$.

Presupunând $c_{14}^2 = c_{24}^2 = 0$ $(c_1^2 = 0)$, avem încă $c_{14}^1 = \frac{1}{2}$.

Mai departe, formula

$$\overline{c}_{24}^1 c_2^2 = c_{24}^1 c_1^1 - c_{14}^1 c_2^1$$

ne arată că putem presupune $c_{24}^1 = 0$ $(c_2^1 = 0)$.

In sfârșit, formulele

$$\overline{c}_{24}^3 c_2^2 = c_{24}^3 c_3^3 - c_{34}^3 c_2^3,$$
$$\overline{c}_{12}^3 c_1^1 c_2^2 = c_{12}^3 c_3^3$$

ne arată că putem reduce pe c_{24}^3 la zero și pe c_{12}^3 la unitate, astfel încât ecuațiile de structură ale grupului G_4 se scriu

$$(X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0,$$

$$(X_1 X_4) = \frac{1}{2} X_1 + c_{14}^3 X_3, \quad (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = \frac{1}{2} X_3.$$

Insă, prin substituția

$$\overline{X}_\alpha = X_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$
$$\overline{X}_4 = X_4 - c_{14}^3 X_2,$$

ecuațiile precedente se reduc la ecuațiile (VI), în care $a = \frac{1}{2}$.

Să observăm, cu acest prilej, că ecuațiile (VI) în care $a = \frac{1}{2}$, sunt echivalente cu aceleași ecuații în care $a = 0$.

24. Rezultatele obținute ne permit să enunțăm următoarea:

T e o r e m ă. *Structurile grupurilor* G_4, *cu vector de structură* c_h *diferit de zero, pot fi reduse la una din formulele canonice*: (I) (*unde* $\varepsilon = \pm 1$), (*II*), (*III*), (*IV*), (*V*) unde $b \neq 0$), (*VI*), (*VII*) *și* (*VIII*). *Pentru tipurile* (*I*) ($\varepsilon = \pm 1$), *rangul tensorului simetric* c_{hk} *este* 2; *pentru tipurile* (*II*), (*III*), (*IV*), (*VI*) *și* (*VII*), *rangul lui* c_{hk} *este* 1; *iar pentru tipurile* (*V*) *și* (*VIII*), *rangul lui* c_{hk} *este* 1 *sau* 0. *Toate grupurile* G_4 *cu vector de structură diferit de zero sunt integrabile.*

CAPITOLUL III

CLASIFICAREA GRUPURILOR G_4 CU VECTOR DE STRUCTURĂ NUL *)

25. Vectorul c_h fiind nul, vom presupune tensorul c_{hk} redus la forma canonică

$$c_{hk} = \varepsilon_h \delta^h_k \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_h = \pm 1 \text{ sau } 0). \tag{40}$$

Însă, potrivit teoremei 15 (cap. I), rangul lui c_{hk} nu poate fi 4. Se poate demonstra că *rangul tensorului* c_{hk}, *al grupului* G_4 *cu vector* c_h *nul, nu poate fi nici* 2.

Într'adevăr, să presupunem că rangul lui c_{hk} este 2. Tensorul c_{hk} fiind redus la forma (40), putem considera

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.$$

Ținând seama de relațiile (20), rezultă

$$c^h_{hl} = 0 \qquad (h \text{ fix} = 1, 2;\ l = 1, 2, 3, 4),$$
$$c^h_{kl} = 0 \qquad (h = 1, 2;\ k = 3, 4;\ l = 1, 2, 3, 4),$$

adică

$$c^1_{12} = c^1_{13} = c^1_{23} = c^1_{14} = c^1_{24} = c^1_{34} = c^2_{12} = c^2_{13} = c^2_{23} = c^2_{14} = c^2_{24} = c^2_{34} = 0.$$

Vectorul c_h fiind nul, avem încă

$$c^3_{34} = c^4_{34} = 0, \quad c^3_{13} + c^4_{14} = 0, \quad c^3_{23} + c^4_{24} = 0.$$

Identitățile (3123) $= 0$, (3124) $= 0$ și relațiile $c_{11} = \varepsilon_1$, $c_{22} = \varepsilon_2$, $c_{12} = 0$, care nu sunt identic satisfăcute, se scriu respectiv

$$\begin{aligned}
&c^3_{14} c^4_{23} - c^3_{24} c^4_{13} = 0,\\
&c^3_{13} c^3_{24} - c^3_{23} c^3_{14} = 0,\\
&(c^3_{13})^2 + c^3_{14} c^4_{13} = \frac{\varepsilon_1}{2},\\
&(c^3_{23})^2 + c^3_{24} c^4_{13} = \frac{\varepsilon_2}{2},\\
&2c^3_{13} c^3_{23} + c^3_{14} c^4_{23} + c^3_{24} c^4_{13} = 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

*) Tipurile de grup G_4 cu vector de structură nul au fost date în [11].

Prin adunarea primei relații (41) cu ultima, obținem relația

$$c_{13}^3 c_{23}^3 + c_{14}^3 c_{23}^4 = 0,$$

care, împreună cu a doua relație (41), ne dă un sistem de ecuații liniare omogene în raport cu c_{13}^3, c_{14}^3, al cărui determinant este

$$c_{24}^3 c_{23}^4 + (c_{23}^3)^2 = \frac{\varepsilon_2}{2} \neq 0.$$

Rezultă $c_{13}^3 = c_{14}^3 = 0$, în contradicție cu a treia relație (41).

Vom avea deci de examinat cazurile când rangul lui c_{hk} este 3, 1 sau 0. In primul caz, având în vedere teorema 12 (cap. I), putem afirma că grupul G_4 este neintegrabil, pe când în celelalte cazuri, potrivit teoremei 19 (cap. I), grupul este integrabil.

Tensorul c_{hk} de rangul 3

26. Privitor la tensorul c_{hk}, redus la forma (40), vom presupune

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \neq 0, \quad \varepsilon_4 = 0.$$

Ca urmare, relațiile (20) ne dau, pentru $h = k < 4$ și $h < 4$, $k = 4$,

$$c_{hl}^h = 0 \quad (h \text{ fix} = 1, 2, 3;\ l = 1, 2, 3, 4), \qquad c_{l_4}^h = 0 \quad (h, l = 1, 2, 3),$$

adică

$$c_{12}^1 = c_{13}^1 = c_{14}^1 = c_{21}^2 = c_{23}^2 = c_{24}^2 = c_{31}^3 = c_{32}^3 = c_{34}^3 =$$
$$= c_{24}^1 = c_{34}^1 = c_{14}^2 = c_{34}^2 = c_{14}^3 = c_{24}^3 = 0.$$

Vectorul c_h fiind nul, avem încă

$$c_{14}^4 = c_{24}^4 = c_{34}^4 = 0.$$

Urmează că identitățile lui Lie sunt toate (identic) satisfăcute, iar relațiile $c_{11} = \varepsilon_1$, $c_{22} = \varepsilon_2$, $c_{33} = \varepsilon_3$, singurele relații (40) care nu sunt (identic) satisfăcute, devin

$$c_{31}^2 c_{12}^3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}, \quad c_{12}^3 c_{23}^1 = -\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad c_{23}^1 c_{31}^2 = -\frac{\varepsilon_3}{2}.$$

Ecuațiile de structură ale grupului G_4 se scriu

$$(X_1 X_2) = c_{12}^3 X_3 + c_{12}^4 X_4, \quad (X_2 X_3) = c_{23}^1 X_1 + c_{23}^4 X_4, \quad (X_3 X_1) = c_{31}^2 X_2 + c_{31}^4 X_4,$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0,$$

iar dacă facem substituția (care păstrează ultimele trei ecuații)

$$\overline{X}_1 = -2\varepsilon_1 (c_{23}^1 X_1 + c_{23}^4 X_4),$$
$$\overline{X}_2 = -2\varepsilon_2 (c_{31}^2 X_2 + c_{31}^4 X_4),$$
$$\overline{X}_3 = -2\varepsilon_3 (c_{12}^3 X_3 + c_{12}^4 X_4),$$
$$\overline{X}_4 = X_4,$$

primele trei ecuaţii devin

$$(X_1 X_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 X_3, \quad (X_2 X_3) = \varepsilon_2 \varepsilon_3 X_1, \quad (X_3 X_1) = \varepsilon_3 \varepsilon_1 X_2.$$

In definitiv, ţinând seama că numerele ε_1, ε_2, ε_3 pot fi toate, sau numai două, de acelaşi semn, obţinem ecuaţiile de structură ale grupului G_4

$$\left.\begin{aligned} (X_1 X_2) = \varepsilon X_3, \quad (X_2 X_3) = X_1, \quad (X_3 X_1) = X_2, \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ (X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

Observăm că X_1, X_2, X_3 sunt transformările infinitezimale ale grupului derivat, care este un grup simplu, iar transformarea X_4 este permutabilă cu celelalte. Am regăsit astfel o cunoscută teoremă a lui S. Lie [2]*).

In ceea ce priveşte tensorul c_{hk}, avem

$$c_{11} = c_{22} = -2\varepsilon, \qquad c_{33} = -2,$$

toate celelalte componente fiind nule.

Tensorul c_{hk} de rangul 1

27. In acest caz, grupul G_r fiind integrabil, vom presupune că avem [9]

$$c_{kl}^{h} = 0 \quad (h < \text{cel mai mare din indicii } k, l),$$

adică

$$c_{12}^1 = c_{13}^1 = c_{23}^1 = c_{14}^1 = c_{24}^1 = c_{34}^1 = c_{13}^2 = c_{23}^2 = c_{14}^2 = c_{24}^2 = c_{34}^2 = c_{14}^3 = c_{24}^3 = c_{34}^3 = 0. \quad (42)$$

Vectorul c_h fiind nul, avem încă

$$c_{23}^3 + c_{24}^4 = 0, \quad c_{34}^4 = 0. \quad (43)$$

Această situaţie este păstrată de transformările

$$\begin{aligned} \overline{a}^1 &= c_1^1 a^1, \\ \overline{a}^2 &= c_1^2 a^1 + c_2^2 a^2, \\ \overline{a}^3 &= c_1^3 a^1 + c_2^3 a^2 + c_3^3 a^3, \\ \overline{a}^4 &= c_1^4 a^1 + c_2^4 a^2 + c_3^4 a^3 + c_4^4 a^4. \end{aligned} \quad (44)$$

Cu privire la modul cum se transformă componentele eventual nenule ale tensorului c_{kl}^{h}, acestea se împart în trei grupe: prima grupă formată din componentele cu doi indici egali $(c_{12}^2, c_{13}^3, c_{23}^3, c_{14}^4, c_{24}^4)$, care se transformă după formulele

$$\overline{c}_{\alpha h}^{h} c_k^{\alpha} = c_{kh}^{h} \quad (h \text{ fix} \geqslant 2; \quad k = 1, 2, 3), \quad (45)$$

care se obţin făcând $l = h$ în formulele (4)

$$\overline{c}_{\alpha\beta}^{h} c_k^{\alpha} c_l^{\beta} = c_{kl}^{\gamma} c_{\gamma}^{h};$$

*) p. 570. Această teoremă are enunţul: *Dacă un G_4 conţine un G_3 simplu*

$$G_3(X_1, X_2, X_3),$$

G_3 este grupul derivat al lui G_4 şi a patra tranisformare infinitezimală a lui G_4 se poate alege astfel încât ea să fie permutabilă cu celelalte şi deci cu G_3.

a doua grupă formată din componentele c^3_{12}, c^4_{13}, c^4_{23}, care se transformă după formulele

$$\overline{c}^{\,h}_{\alpha,\,h-1}\, c^{\alpha}_{k}\, c^{h-1}_{h-1} + \overline{c}^{\,h}_{\alpha h}\, c^{\alpha}_{k}\, c^{h}_{h-1} = c^{h-1}_{k,\,h-1}\, c^{h}_{h-1} + c^{h}_{k,\,h-1}\, c^{h}_{h}\,, \tag{46}$$

care se obţin considerând, în formulele (4), h fix $= 3,\ 4$ şi $l = h - 1$; a treia grupă formată din componenta c^4_{12}, pentru care avem formula de transformare

$$\overline{c}^{\,4}_{\alpha 2}\, c^{\alpha}_{1}\, c^{2}_{2} + \overline{c}^{\,4}_{\alpha 3}\, c^{\alpha}_{1} c^{3}_{2} + \overline{c}^{\,4}_{\alpha 4}\, c^{\alpha}_{1} c^{4}_{2} = c^{2}_{12}\, c^{4}_{2} + c^{3}_{12}\, c^{4}_{3} + c^{4}_{12}\, c^{4}_{4}\ ^{*}). \tag{47}$$

In ceea ce priveşte tensorul c_{hk}, avem

$$\begin{aligned} c_{11} &= (c^2_{12})^2 + (c^3_{13})^2 + (c^4_{14})^2\,, \\ c_{12} &= c^3_{23}\,(c^3_{13} - c^4_{14})\,, \\ c_{22} &= 2\,(c^3_{23})^2\,, \end{aligned} \tag{48}$$

celelalte componente fiind nule.

Găsim de asemenea că identităţile $(3123) = 0$ şi $(4123) = 0$ ale lui Lie, singurele care nu sunt identic satisfăcute, devin, dacă ţinem seama de (42), (43),

$$\begin{aligned} &c^2_{12}\, c^3_{23} = 0, \\ &c^4_{13}\, c^4_{24} - c^4_{23}\, c^4_{14} = 0\ ^{**}). \end{aligned} \tag{49}$$

Având în vedere prima relaţie (49), suntem conduşi să examinăm cazurile când numai una sau amândouă componentele c^2_{12}, c^3_{23} sunt nule.

28. *a)* $c^2_{12} \neq 0$, $c^3_{32} = 0$. Deducem încă

$$c^4_{24} = 0, \quad c_{12} = c_{22} = 0.$$

Privitor la componentele c^2_{12}, c^3_{13}, c^4_{14}, invarianţi relativi faţă de transformările (44), se pot face ipotezele:

α) toţi invarianţii c^2_{12}, c^3_{13}, c^4_{4} sunt distincţi

β) doi dintre invarianţii c^2_{12}, c^3_{13}, c^4_{14} sunt egali.

---

*) Formulele (45) ne arată că c^h_{kh} (h fix $\geqslant 2$; $k = 1, 2, 3$) constitue componentele unui vector covariant. Dând lui h valorile 2, 3, 4, avem trei astfel de vectori,

$$c^2_{12},\ (c^3_{13},\ c^3_{23}),\ (c^4_{14},\ c^4_{24},\ c^4_{34}). \tag{45'}$$

Dacă cei trei vectori (45′) sunt nuli, ceea ce înseamnă că grupul G_4 este de rangul zero [9], formulele (46) ne arată că $c^h_{k,\,h-1}$ (h fix $\geqslant 3$; $k = 1,2$) constitue componentele unui vector covariant, de densitate $(c^h_h)^{-1}\, c^{h-1}_{h-1}$. Avem doi astfel de vectori

$$c^3_{12},\ (c^4_{13},\ c^4_{23}). \tag{45''}$$

Dacă vectorii (45′), (46″) sunt toţi nuli, c^4_{12} este un invariant relativ al transformărilor (44).

**) In virtutea primei relaţii (49), determinantul

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

este nul, deci rangul lui c_{hk} nu poate fi 2, ceea ce ştiam dinainte.

Aceşti invarianţi nu pot fi toţi egali, deoarece, din faptul că vectorul c_h este nul, ar rezulta că sunt toţi nuli şi deci, având în vedere prima relaţie (48), am avea $c_{11} = 0$, în contradicţie cu ipoteza în care ne-am situat, privitoare la rangul lui c_{hk}.

In ipoteza α) ţinând seama că avem, potrivit formulei (45),

$$\bar{c}^3_{13}\, c^1_1 = c^3_{13},$$

formula (46) devine, pentru $h = 3$, $k = 1$,

$$\bar{c}^3_{12}\, c^1_1\, c^2_2 = (c^2_{12} - c^3_{13})\, c^3_2 + c^3_{12}\, c^3_3.$$

Putem deci presupune $c^3_{12} = 0$, $(c^3_2 = 0)$.

Pentru $h = 4$, $k = 1$ şi $k = 4$, $k = 2$, formulele (45) şi (46) devin respectiv

$$\bar{c}^4_{14}\, c^1_1 = c^4_{14}, \quad \bar{c}^4_{23}\, c^2_2\, c^3_3 = c^4_{23}\, c^4_4,$$

astfel încât (47) se scrie

$$\bar{c}^4_{12}\, c^1_1\, c^2_2\, c^3_3 = (c^2_{12} - c^4_{14})\, c^3_3\, c^4_2 + c^4_{12}\, c^3_3\, c^4_4 + c^4_{23}\, c^3_1\, c^4_4$$

şi deci putem presupune $c^4_{12} = 0$, $(c^3_1 = c^4_2 = 0)$.

In sfârşit, făcând $h = 4$, $k = 1$ în (46), obţinem

$$\bar{c}^4_{13}\, c^1_1\, c^2_2\, c^3_3 = (c^3_{13} - c^4_{14})\, c^2_2\, c^4_3 + c^4_{13}\, c^2_2\, c^4_4 - c^4_{23}\, c^2_1\, c^4_4,$$

ceea ce înseamnă că putem presupune $c^4_{13} = 0$, $(c^2_1 = c^4_3 = 0)$.

Pe de altă parte, a doua relaţie (49) se scrie

$$c^4_{23}\, c^4_{14} = 0. \tag{50}$$

Dacă $c^4_{23} \neq 0$, rezultă $c^4_{14} = 0$. Reducând componentele c^4_{23}, c^2_{12} la 1, deducem încă $c^3_{13} = -1$, $c_{11} = 2$, astfel încât ecuaţiile de structură ale grupului G_4 se scriu

$$\left.\begin{aligned} &(X_1 X_2) = X_2, \quad (X_1 X_3) = -X_3, \quad (X_1 X_4) = 0, \\ &(X_2 X_3) = X_4, \quad (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{X}$$

Dacă însă $c^4_{23} = 0$, reducând pe c^2_{12} la 1, obţinem ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned} &(X_1 X_2) = X_2, \quad (X_1 X_3) = aX_3, \quad (X_1 X_4) = -(1+a) X_4 \\ &(X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0\ ^*), \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

unde $a \neq 1, \neq 2$.

In acest caz avem $c_{11} = 2(1 + a + a^2)$, celelalte componente ale lui c_{hk} fiind nule.

Trecând la ipoteza β) vom considera

$$c^2_{12} = c^3_{13} \neq c^4_{14},$$

celelalte cazuri posibile $(c^2_{12} = c^4_{14} \neq c^3_{13}$ şi $c^2_{12} \neq c^3_{13} = c^4_{14})$ ducând la aceleaşi rezultate.

*) In [11], aceste ecuaţii au fost date într'o formă puţin diferită.

Putem presupune

$$c_{12}^2 = c_{13}^3 = 1\,,\; c_{14}^4 = -2\,,(c_1^1 = 1).$$

Ţinând seama de (50) şi (48), deducem

$$c_{23}^4 = 0\,,\; c_{11} = 6.$$

Dacă facem $h = 4$, $k = 1$ în (46), obţinem formula

$$\bar{c}_{13}^4\, c_3^3 = (c_{13}^3 - c_{14}^4)\, c_3^4 + c_{13}^4\, c_4^4$$

şi deci putem presupune $c_{13}^4 = 0\,,(c_3^4 = 0)$.

De asemenea, formula (47) se scrie

$$\bar{c}_{12}^4\, c_2^2 = (c_{12}^2 - c_{14}^4)\, c_2^4 + c_{12}^4\, c_4^4\,.$$

Putem presupune aşa dar $c_{12}^4 = 0\,,(c_2^4 = 0)$.

In ceea ce priveşte componenta c_{12}^3, invariant relativ faţă de transformările (44) $(c_1^1 = 1\,,\; c_2^4 = c_3^4 = 0)$, putem s'o reducem la unitate dacă este diferită de zero.

Obţinem astfel ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned}(X_1 X_2) = X_2 + X_3\,,\quad (X_1 X_3) = X_3\,,\; (X_1 X_4) = -2X_4\,,\\ (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII)}$$

precum şi ecuaţiile conţinute în (XI) pentru $a = 1$, după cum componenta c_{12}^3 este diferită de zero sau egală cu zero.

Să remarcăm, cu acest prilej, că ecuaţiile (XI), în care $a = 1$, sunt echivalente cu aceleaşi ecuaţii în care $a = -2$.

29. ***b)*** $\boldsymbol{c_{12}^2 = 0,\; c_{23}^3 \neq 0.}$ Presupunând $c_{23}^3 = 1$, $(c_2^2 = 1)$, deducem încă $c_{24}^4 = -1$, $c_{22} = 2$. In ceea ce priveşte componenta c_{12} a tensorului c_{hk}, avem formula de transformare

$$\bar{c}_{12}\, c_1^1 = c_{12} + c_{22}\, c_1^2\,,$$

ceea ce înseamnă că putem presupune $c_{12} = 0$, $(c_1^2 = 0)$.

Ţinând seama de a doua relaţie (48), de a doua relaţie (49) şi de faptul că vectorul c_h este nul, obţinem

$$c_{13}^3 = c_{14}^4 = c_{13}^4 = 0, \quad c_{11} = 0.$$

In sfârşit, potrivit formulelor de transformare (46), (47), găsim uşor că putem presupune

$$c_{12}^3 = c_{23}^4 = c_{12}^4 = 0.$$

Obţinem astfel ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned}(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0\\ (X_2 X_3) = X_3\,,\quad (X_2 X_4) = -X_4\,,\quad (X_3 X_4) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

care, printr'o permutare circulară retrogradă a indicilor, coincid cu ecuaţiile ce se obţin din (XI) făcând $a = -1$.

30. *c)* $c_{12}^2 + c_{23}^3 = 0$. Deducem

$$c_{13}^3 + c_{14}^4 = 0, \quad c_{24}^4 = 0, \quad c_{12} = c_{22} = 0.$$

Presupunând $c_{13}^3 = 1$, $(c_1^1 = 1)$, obţinem

$$c_{14}^4 = -1, \quad c_{11} = 2,$$

astfel încât a doua relaţie (49) ne dă $c_{23}^4 = 0$.

In sfârşit, potrivit formulelor (46), (47) putem presupune

$$c_{13}^4 = c_{12}^4 = 0 \quad (c_2^4 = c_3^4 = 0).$$

In ceea ce priveşte componenta c_{12}^3, avem

$$\overset{-3}{c}_{12}\, c_2^2 = c_{13}^3\, c_3^3.$$

Dacă $c_{12}^3 = 0$, ecuaţiile de structură coincid, printr'o schimbare de indici, cu ecuaţiile (51).

Dacă însă $c_{12}^3 \neq 0$, reducând această componentă la unitate, obţinem ecuaţiile

$$(X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = X_3, \quad (X_1 X_4) = -X_4,$$

$$(X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0,$$

care, prin substituţia

$$\overline{X}_1 = X_1, \quad \overline{X}_2 = X_3, \quad \overline{X}_3 = X_2 - X_3, \quad \overline{X}_4 = X_4,$$

se reduc la ecuaţiile care se obţin din (XI) făcând $a = 0$.

Tensorul c_{hk} de rangul 0

31. Din formulele (48) rezultă

$$c_{12}^2 = c_{13}^3 = c_{14}^4 = c_{23}^3 = c_{24}^4 = 0,$$

singurele componente în discuţie, ale lui c_{kl}^h, fiind c_{12}^3, c_{12}^4, c_{13}^4, c_{23}^4.

In virtutea transformărilor (44), avem

$$\overset{-3}{c}_{12}\, c_1^1\, c_2^2 = c_{12}^3\, c_3^3,$$

$$\overset{-4}{c}_{23}\, c_2^2\, c_3^3 = c_{23}^4\, c_4^4,$$

$$\overset{-4}{c}_{13}\, c_1^1\, c_2^2\, c_3^3 = c_{23}^4\, c_4^4,$$

$$\overset{-4}{c}_{12}\, c_1^1\, c_2^2\, c_3^3 = c_{12}^3\, c_3^3\, c_3^4 + c_{12}^4\, c_3^3\, c_3^4 - c_{13}^4\, c_2^3\, c_4^4 + c_{23}^4\, c_1^3\, c_4^4.$$

Urmează că putem reduce componentele c^3_{12}, c^4_{23}, c^4_{13}, c^4_{12} la valorile din tabloul următor (7 cazuri posibile):

	a	b	c	d	e	f	g
c^3_{12}	1	1	1	0	0	0	0
c^4_{23}	1	0	0	1	0	0	0
c^4_{13}	0	1	0	0	1	0	0
c^4_{12}	0	0	0	0	0	1	0

Cazurilor a, b le corespund ecuaţiile de structură

$$\left.\begin{aligned}(X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = X_4, \quad (X_1 X_4) = 0,\\ (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{XIII}$$

cazurilor c, d, e, f le corespund ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned}(X_1 X_2) = X_3, \quad (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0,\\ (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{XIV}$$

iar cazului g ecuaţiile

$$(X_h X_k) = 0 \quad (h, k = 1, 2, 3,4). \tag{XV}$$

32. Rezultatele obţinute în acest capitol ne permit să enunţăm următoarea Teoremă. *Structurile grupurilor G_4, cu vector de structură c_h nul, pot fi reduse la una din formele canonice: (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), (X), (XI), (XII), (XIII), (XIV) şi (XV). Pentru tipurile (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), neintegrabile, tensorul simetric c_{hk} este de rangul 3, pentru tipurile (X), (XI) şi (XII), integrabile, tensorul simetric este de rangul 1, iar pentru tipurile (XIII), (XIV) şi (XV), de asemenea integrabile, tensorul simetric este de rangul zero.*

CAPITOLUL IV

COMPARAŢIE CU CLASIFICAREA DATĂ DE S. LIE

33. Ne propunem acum să cercetăm în ce măsură clasificarea dată mai sus, pentru grupurile G_4, este echivalentă cu clasificarea dată de S. Lie [1], ceea ce vom face căutând a determina transformări reale de operatori

$$\begin{aligned}\overline{X}_1 &= \alpha\ X_1 + \beta\ X_2 + \gamma\ X_3 + \delta\ X_1,\\ \overline{X}_2 &= \alpha'\ X_1 + \beta'\ X_2 + \gamma'\ X_3 + \delta'\ X_4,\\ \overline{X}_3 &= \alpha''\ X_1 + \beta''\ X_2 + \gamma''\ X_3 + \delta''\ X_4,\\ \overline{X}_4 &= \alpha'''\ X_1 + \beta'''\ X_2 + \gamma'''\ X_3 + \delta'''\ X_4,\end{aligned} \tag{52}$$

care să permită trecerea dela o clasificare la cealaltă.

In acest scop, transcriem tipurile obținute de S. Lie pentru grupurile G_4, notând și valorile componentelor vectorului de structură c_h, precum și rangul ρ al tensorului simetric c_{hk}.

G_4 neintegrabile

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_2)=X_1,\quad (X_1X_3)=2X_2,\quad (X_2X_3)=X_3,\\ (X_1X_4)=(X_2X_4)=(X_3X_4)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (A)$$
$$c_h=0;\quad \rho=3.$$

G_4 integrabile neconținând un G_3 abelian

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=X_1,\\ (X_1X_4)=cX_1,\quad (X_2X_4)=X_2,\quad (X_3X_4)=(c-1)X_3,\end{gathered}\right\}\qquad (B)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=2c;\quad \rho=1.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=X_1,\\ (X_1X_4)=2X_1,\quad (X_2X_4)=X_2,\quad (X_3X_4)=X_2+X_3,\end{gathered}\right\}\qquad (C)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=4;\quad \rho=1.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_2)=0,\quad (X_1X_3)=0,\quad (X_2X_3)=X_2,\\ (X_1X_4)=X_1,\quad (X_2X_4)=0,\quad (X_3X_4)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (D)$$
$$c_1=c_2=0,\quad c_3=c_4=1;\quad \rho=2.$$

G_4 integrabile conținând un G_3 abelian

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=X_1,\quad (X_2X_4)=aX_2,\quad (X_3X_4)=cX_3,\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (E)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=1+a+c;\quad \rho=1.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=cX_1,\quad (X_2X_4)=(1+c),X_2,\quad (X_3X_4)=X_1+cX_3,\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (F)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=1+3c;\quad \rho=1.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=X_2,\quad (X_2X_4)=0,\quad (X_3X_4)=X_1,\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (G)$$
$$c_h=0;\quad \rho=0.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=X_1+X_2,\quad (X_2X_4)=X_2,\quad (X_3X_4)=X_1+X_3,\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (H)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=3;\quad \rho=1.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=0,\quad (X_2X_4)=0,\quad (X_3X_4)=X_2,\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (K)$$
$$c_h=0,\quad \rho=0.$$

$$\left.\begin{gathered}(X_1X_4)=X_1,\quad (X_2X_4)=X_2,\quad (X_3X_4)=X_2+X_3\\ (X_1X_2)=(X_1X_3)=(X_2X_3)=0,\end{gathered}\right\}\qquad (L)$$
$$c_1=c_2=c_3=0,\quad c_4=3;\quad \rho=1.$$

$$(X_hX_k)=0,\quad (h,k=1,2,3,4),\qquad (M)$$
$$c_h=0;\quad \rho=0.$$

Este evident că *pot fi echivalente* (reductibile unul la altul) numai tipuri de grup — aparţinând celor două clasificări — care au aceleaşi caracteristice, grupale şi tensoriale, invariante prin transformările (52). Astfel, tipul (A) nu poate fi reductibil decât la unul din tipurile (IX), tipul (B) la unul din tipurile (VI), (VII), (X), (XI), (XII), tipul (D) la unul din tipurile (I) ş.a.m.d.

34. Ţinând seama de ecuaţiile (A), în virtutea transformărilor (52) avem

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)X_1 + 2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)X_2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)X_3,$$
$$(\overline{X}_1\overline{X}_3) = (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)X_1 + 2(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma)X_2 + (\beta\gamma'' - \beta''\gamma)X_3,$$
$$(\overline{X}_2\overline{X}_3) = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')X_1 + 2(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')X_2 + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')X_3.$$

Presupunând că ecuaţiile (A) se reduc la (IX), ceea ce revine a presupune că avem

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2) = \varepsilon\overline{X}_3, \quad (\overline{X}_2\overline{X}_3) = \overline{X}_1, \quad (\overline{X}_3\overline{X}_1) = \overline{X}_2, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

obţinem relaţiile

$$\begin{aligned}
&(\alpha\beta' - \alpha'\beta)X_1 + 2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)X_2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)X_3 = \\
&\qquad = \varepsilon(\alpha''X_1 + \beta''X_2 + \gamma''X_3 + \delta''X_4), \\
&(\alpha\beta'' - \alpha''\beta)X_1 + 2(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma)X_2 + (\beta\gamma'' - \beta''\gamma)X_3 = \\
&\qquad = -(\alpha'X_1 + \beta'X_2 + \gamma'X_3 + \delta'X_4), \\
&(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')X_1 + 2(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')X_2 + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')X_3 = \\
&\qquad = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4,
\end{aligned} \tag{53}$$

de unde rezultă, în primul rând,

$$\delta = \delta' = \delta'' = 0.$$

Putem încă presupune

$$\alpha''' = \beta''' = \gamma''' = 0, \quad \delta''' = 1\ ^*),$$

astfel încât parantezele

$$(\overline{X}_1\overline{X}_4), \quad (\overline{X}_2\overline{X}_4), \quad (\overline{X}_3\overline{X}_4)$$

sunt nule.

Egalând coeficienţii lui X_1, X_2, X_3 din ambii membri ai relaţiilor (53), obţinem, pentru determinarea celorlalţi coeficienţi ai transformării căutate — care să realizeze trecerea dela (A) la (IX) — sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
&\alpha - \alpha'\beta'' + \alpha''\beta' = 0, \quad \gamma + \beta''\gamma' - \beta'\gamma'' = 0, \quad 2(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') = -\beta, \\
&\alpha\beta'' + \alpha' - \alpha''\beta = 0, \quad -\beta''\gamma + \gamma' + \beta\gamma'' = 0, \quad 2(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma) = -\beta' \\
&-\alpha\beta' + \alpha\beta + \varepsilon\alpha'' = 0, \quad \beta'\gamma - \beta\gamma' + \varepsilon\gamma'' = 0, \quad 2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) = \varepsilon\beta''.
\end{aligned} \tag{54}$$

*) Nu urmărim să obţinem cea mai generală transformare (52) care să realizeze trecerea dela (A) la (IX), ci una particulară.

Primele trei ecuaţii (54) constitue un sistem de ecuaţii lineare omogene în α, α', α''. Aceşti coeficienţi neputând fi toţi nuli, trebue să avem

$$\begin{vmatrix} 1 & -\beta'' & \beta' \\ \beta'' & 1 & -\beta \\ -\beta' & \beta & \varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\varepsilon + \beta^2 + \beta'^2 + \varepsilon\beta''^2 = 0.$$

Rezultă că trebue să considerăm $\varepsilon = -1$, astfel încât relaţia precedentă devine

$$\beta^2 - 1 + \beta'^2 - \beta''^2 = 0$$

şi este satisfăcută dacă luăm, de exemplu,

$$\beta = 1, \quad \beta' = \beta'' = 0.$$

Presupunând încă $\alpha' = 1$, sistemul (54) ne dă

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \alpha'' = 1, \quad \gamma' = -\frac{1}{4}, \quad \gamma'' = \frac{1}{4}.$$

Am obţinut deci transformarea

$$\overline{X}_1 = X_2, \quad \overline{X}_2 = X_1 - \frac{1}{4}X_3, \quad \overline{X}_3 = X_1 + \frac{1}{4}X_3, \quad \overline{X}_4 = X_4,$$

care, cum se verifică imediat, reduce ecuaţiile (A) la ecuaţiile (IX) (unde $\varepsilon = -1$).

35. Un calcul simplu ne arată că ecuaţiile (B), în care $c = 0$ (deci vectorul de structură c_h este nul), se reduc la ecuaţiile (X) prin transformarea

$$X_1 = -X_4, \quad \overline{X}_2 = X_2, \quad \overline{X}_3 = X_3, \quad \overline{X}_4 = X_1.$$

Dacă însă $c \neq 0$ (vectorul c_h este nenul), făcând transformarea

$$\overline{X}_1 = X_2, \quad \overline{X}_2 = X_3, \quad \overline{X}_3 = X_1, \quad \overline{X}_4 = \frac{1}{2c}X_4,$$

şi punând $\frac{1}{2c} = a$, ecuaţiile (B) se reduc la ecuaţiile (VI).

Asemănător, transformarea

$$\overline{X}_1 = 4X_3, \quad \overline{X}_2 = 4X_1, \quad \overline{X}_3 = X_2, \quad \overline{X}_4 = 4X_4$$

reduce ecuaţiile (C) la ecuaţiile (VII).

36. Trecem acum la ecuaţiile (D). Vom arăta că ecuaţiile (I) (unde $\varepsilon = +1$) se reduc la ecuaţiile (D).

Intr'adevăr, scriind că transformările (52) reduc ecuaţiile (I) la (D), obţinem

$$\alpha = \alpha' = \delta = \delta' = 0,$$

precum şi relaţiile (unde $\varepsilon = \pm 1$)

$$\beta\delta'' - 2\gamma\alpha'' = 0, \qquad \gamma\delta'' - 2\varepsilon\beta\alpha'' = 0, \tag{55}$$

$$\beta'\delta'' - 2\gamma'\alpha'' = 2\beta', \qquad \gamma'\delta'' - 2\varepsilon\beta'\alpha'' = 2\gamma', \tag{56}$$

$$\beta\delta''' - 2\gamma\alpha''' = 2\beta, \qquad \gamma\delta''' - 2\varepsilon\beta\alpha''' = 2\gamma, \tag{57}$$

$$\beta'\delta''' - 2\gamma'\alpha''' = 0, \qquad \gamma'\delta''' - 2\varepsilon\beta'\alpha''' = 0, \tag{58}$$

$$(\beta''\delta''' - \beta'''\delta'') + 2(\alpha''\gamma''' - \alpha'''\gamma'') = 0, \tag{59}$$

$$(\gamma''\delta''' - \gamma'''\delta'') + 2\varepsilon(\alpha''\beta''' - \alpha'''\beta'') = 0$$

Din (55) rezultă că toţi coeficienţii β, γ, α'', δ'' sunt diferiţi de zero. Cum însă (55) constitue, în raport cu α'', δ'', un sistem de două ecuaţii liniare omogene, deducem că trebue să avem

$$\varepsilon\beta^2 - \gamma^2 = 0,$$

relaţie care nu este posibilă, β şi γ fiind diferiţi de zero, decât dacă $\varepsilon = 1$.

Obţinem

$$\gamma = \eta\beta \qquad (\eta = \pm 1) \tag{60}$$

şi deci, din (55)

$$\delta'' = 2\eta\alpha''. \tag{61}$$

Ca urmare, relaţiile (56) se scriu

$$(\eta\alpha'' - 1)\beta' - \alpha''\gamma' = 0, \qquad -\alpha''\beta' + (\eta\alpha'' - 1)\gamma' = 0 \tag{62}$$

şi cum β' şi γ' sunt diferiţi de zero, deducem că trebue să avem

$$(\eta\alpha'' - 1)^2 - \alpha''^2 = 0,$$

de unde obţinem

$$\alpha'' = \frac{\eta}{2}.$$

Ţinând seama de (61), avem încă $\delta'' = 1$, iar relaţiile (62) ne dau

$$\gamma' = -\eta\beta'.$$

In sfârşit, ţinând seama de (60), relaţiile (57) se scriu

$$\delta''' = 2\eta\alpha''' + 2, \tag{63}$$

astfel încât din (58) obţinem $\alpha''' = -\frac{\eta}{2}$, iar (63) ne dă $\delta''' = 1$.

Presupunând acum, pentru simplificare,

$$\beta = \beta' = \eta = 1, \qquad \beta'' = \gamma'' = \beta''' = \gamma''' = 0,$$

de unde urmează că relaţiile (59) sunt verificate, obţinem transformarea

$$\overline{X}_1 = X_2 + X_3,\ \overline{X}_2 = X_2 - X_3,\ \overline{X}_3 = \frac{1}{2}X_1 + X_4,\ \overline{X}_4 = -\frac{1}{2}X_1 + X_4,$$

care realizează trecerea dela ecuaţiile (I) (unde $\varepsilon = 1$) la ecuaţiile (D).

37. In ceea ce priveşte ecuaţiile (E), acestea reprezintă acelaşi tip de grup ca şi ecuaţiile (II) dacă $1+a+c\neq 0$ (vectorul de structură c_h nenul) şi acelaşi tip de grup ca şi (XI) dacă $1 + a + c = 0$.

Intr'adevăr, în (II) cel puţin una din cantităţile a, b, $1 - a - b$ este diferită de zero. Fie de exemplu $a \neq 0$. Schimbând operatorul X_4 prin $\frac{1}{a}X_4$ şi punând $\frac{b}{a} = A, \frac{1-a-b}{a} = C$, ecuaţiile (II) se reduc la ecuaţiile (E), pentru care vectorul c_h este diferit de zero.

De asemenea, prin substituţia

$$\overline{X}_1 = X_2,\ \overline{X}_2 = X_3,\ \overline{X}_3 = X_4,\ \overline{X}_4 = -X_1,$$

ecuaţiile (XI) se reduc la ecuaţiile (E), unde $1 + a + c = 0$.

38. Vom arăta acum că ecuaţiile (F), unde $c \neq -\frac{1}{3}$, reprezintă acelaşi tip de grup ca şi ecuaţiile (III), unde $a = \frac{1}{3}$. Excludem din discuţie valorile $c = a = 0$, deoarece se vede imediat că tipurile (F) şi (III) coincid în acest caz.

Coeficienţii formulelor (52), care fac trecerea dela (F) (unde $c \neq 0$), la (III) (unde $a \neq 0$), trebue să verifice relaţiile

$$\delta = \delta' = \delta'' = 0,$$

$$c\alpha\delta''' + \gamma\delta''' = a\alpha, \qquad (1+c)\beta\delta''' = a\beta, \qquad c\gamma\delta''' = a\gamma, \tag{64}$$

$$c\alpha'\delta''' + \gamma'\delta''' = \alpha + a\alpha', \quad (1+c)\beta'\delta''' = \beta + a\beta', \quad c\gamma'\delta''' = \gamma + a\gamma', \tag{65}$$

$$c\alpha''\delta''' + \gamma''\delta''' = (1-2a)\alpha'', \quad (1+c)\beta''\delta''' = (1-2a)\beta'', \quad c\gamma''\delta''' = (1-2a)\gamma''. \tag{66}$$

Nu putem avea $c\delta''' - a \neq 0$, deoarece din ultima şi prima relaţie (64) ar urma $\gamma = \alpha = 0$, iar din ultima şi prima relaţie (65), $\gamma' = \alpha' = 0$.

Fie deci $c\delta''' - a = 0$, $\delta''' = \frac{a}{c}$. Aşa fiind, ultima relaţie (64) este satisfăcută, iar din primele două rezultă $\gamma = \beta = 0$, α arbitrar. De asemenea, din relaţiile (65) obţinem $\gamma' = \frac{\alpha}{\delta'''} = \frac{\alpha c}{a}$, $\beta' = 0$, α' arbitrar, iar din ultima şi prima relaţie (66) avem $\gamma'' = \alpha'' = 0$. Pentru a nu avea şi $\beta'' = 0$, trebue să impunem cantităţilor a şi c să verifice relaţia $(1 + c)\delta''' = 1 - 2a$, care se mai scrie

$$3ac + a - c = 0. \tag{67}$$

Aceasta înseamnă a pune în corespondenţă proiectivă tipurile (*F*) $\left(\text{unde } c \neq -\frac{1}{3}\right)$ şi (III) $\left(\text{unde } a \neq \frac{1}{3}\right)$, valorile $c = -\frac{1}{3}$ şi $a = \frac{1}{3}$ fiind excluse, deoarece — în proiectivitatea (67) — corespund respectiv valorilor $a = \infty$ şi $c = \infty$.

Luând pentru simplificare

$$\alpha = \beta'' = 1,$$

$$\alpha' = \alpha''' = \beta''' = \gamma''' = 0,$$

obţinem transformarea

$$\overline{X}_1 = X_1, \quad \overline{X}_2 = \frac{c}{a} X_3, \quad \overline{X}_3 = X_2, \quad \overline{X}_4 = \frac{a}{c} X_4,$$

care reduce ecuaţiile (*F*) $\left(\text{unde } c \neq 0, \neq -\frac{1}{3}\right)$ la ecuaţiile (III) $\left(\text{unde } a \neq 0, \neq \frac{1}{3}\right)$, corespunzătoare în proiectivitatea (67).

39. Tipurile (*F*) $\left(\text{unde } c = -\frac{1}{3}\right)$ şi (III) $\left(\text{unde } a = \frac{1}{3}\right)$, constatăm că se reduc respectiv la (XII) şi (*L*) prin transformările

$$\overline{X}_1 = 3X_4, \quad \overline{X}_2 = -X_3, \quad \overline{X}_3 = 3X_1, \quad \overline{X}_4 = X_2$$

şi

$$\overline{X}_1 = X_3, \quad \overline{X}_2 = 3X_1, \quad \overline{X}_3 = X_2, \quad \overline{X}_4 = 3X_4.$$

In sfârşit, ecuaţiile (*G*) şi (*K*) coincid respectiv cu ecuaţiile (XIII) şi (XIV) printr'o permutare de indici, ecuaţiile (*H*) coincid cu ecuaţiile (IV) prin transformarea

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{9} X_2, \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{3} X_1, \quad \overline{X}_3 = X_3, \quad \overline{X}_4 = \frac{1}{3} X_4,$$

iar ecuaţiile (*M*) sunt evident aceleaşi cu ecuaţiile (XV).

40. Avem deci tabloul de echivalenţă

(*A*)	(*B*)		(*C*)	(*D*)	(*E*)		(*F*)		(*G*)	(*H*)	(*K*)	(*L*)	(*M*)
	$(c=0)$	$(c\neq 0)$			$(1+a+c\neq 0)$	$(1+a+c=0)$	$\left(c\neq -\frac{1}{3}\right)$	$\left(c=-\frac{1}{3}\right)$					
(IX) $(\varepsilon=-1)$	(X)	(VI)	(VII)	(I) $(\varepsilon=1)$	(II)	(XI)	(III) $\left(a\neq -\frac{1}{3}\right)$	(XII)	(XIII)	(IV)	(XIV)	(III) $\left(a=\frac{1}{3}\right)$	(XV)

Conchidem că am obținut în plus tipurile de grup G_4

$$\left.\begin{aligned}(X_1X_2) &= -X_3, \quad (X_1X_3) = X_2, \quad (X_2X_3) = 0,\\ (X_1X_4) &= 0, \quad (X_2X_4) = \frac{1}{2}X_2, \quad (X_3X_1) = \frac{1}{2}X_3,\end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

$$\left.\begin{aligned}X_1X_2 &= (X_1X_3) = (X_2X_3) = 0,\\ (X_1X_4) &= aX_1 - bX_2, \quad (X_2X_1) = bX_1 + aX_2, \quad (X_3X_1) = (1-2a)X_3\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

$$(b \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned}(X_1X_2) &= X_3, \quad (X_1X_3) = (X_2X_3) = 0,\\ (X_1X_4) &= \frac{1}{4}X_1 - aX_2, \quad (X_2X_4) = aX_1 + \frac{1}{4}X_2, \quad (X_3X_4) = \frac{1}{2}X_3\end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned}(X_1X_2) &= X_3, \quad (X_2X_3) = X_1, \quad (X_3X_1) = X_2,\\ (X_1X_4) &= X_2X_4) = (X_3X_4) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{IX'}$$

ultimul fiind neintegrabil, iar celelalte integrabile.

Acestea se reduc, prin transformări cu coeficienți imaginari, la unele din tipurile echivalente cu tipurile date de S. L i e.

Astfel, prin transformarea

$$\overline{X}_1 = -iX_1, \quad \overline{X}_2 = X_2, \quad \overline{X}_3 = iX_3, \quad X_4 = X_4,$$

ecuațiile (I) aceleași ca (I) ($\varepsilon = -1$) se reduc la ecuațiile (I) ($\varepsilon = 1$).

Prin transformarea

$$\overline{X}_1 = X_1 - iX_2, \quad \overline{X}_2 = X_1 + iX_2, \quad \overline{X}_3 = X_3, \quad \overline{X}_4 = X_4, \tag{68}$$

ecuațiile (V) devin

$$\left.\begin{aligned}(X_1X_2) &= (X_1X_3) = (X_2X_3) = 0,\\ (X_1X_4) &= (a-ib)X_1, \quad (X_2X_4) = (a+ib)X_2, \quad (X_3X_4) = (1-2a)X_3\end{aligned}\right\} \tag{V'}$$

Observăm însă că

$$1 - 2a = 1 - (a - ib) - (a + ib)$$

ceea ce înseamnă că (V') sunt de forma (II).

De asemenea, prin transformarea (68), ecuațiile (VIII) devin

$$\left.\begin{aligned}(X_1X_2) &= X_3, \quad (X_1X_3) = (X_2X_3) = 0,\\ (X_1X_4) &= \left(\frac{1}{4} - ia\right)X_1, \quad (X_2X_4) = \left(\frac{1}{4} + ia\right)X_2, \quad (X_3X_4) = \frac{1}{2}X_3.\end{aligned}\right\} \tag{VIII'}$$

Observăm și aici că avem

$$\frac{1}{4} + ia = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - ia\right),$$

astfel încât (VIII') sunt de forma (VI).

In sfârşit, despre ecuaţiile (IX′) aceleaşi cu (IX) ($\varepsilon = -1$), date de L. Bianchi într'o teoremă a lui S. Lie, amintită mai sus (cap. III, 26), constatăm că prin transformarea

$$\overline{X}_1 = iX_1, \quad \overline{X}_2 = iX_2, \quad \overline{X}_3 = X_3, \quad \overline{X}_4 = X_4,$$

se reduc la ecuaţiile (IX) ($\varepsilon = -1$).

КЛАССИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГРУПП ЛИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Непрерывные и конечные группы с двумя, тремя и четырьмя параметрами были классифицированы Софусом Ли [I] еще в 1874 году.

Для реальных G_3 групп задача была также исследована в 1918 году Л. Бианки [2], который получил еще два типа группы G_3, кроме типов полученных Ли, который не делает разницы между действительным и мнимым. Задача вновь была рассмотрена в 1947 году Г. Врынчану [3] и Х. Ч. Ли [4], причем классификации Врынчану и Ли являются эквивалентными классификации, данной Бианки [5].

Ставим задачу классификации реальных групп G_4 тензориальным методом.

Запишем уравнения структуры G_r в форме, данной Ли, где X_h является операторами бесконечно малых преобразований группы ($X_k\ X_p$) скобки Пуассона, а c_{kl}^h постоянные структуры, которые относительно преобразований (2) в пространстве параметров $a^1\ a^2\ \ldots\ a^r$ группы, являются составляющими фундаментального тензора структуры группы G_r и удовлетворяют тождествам Ли (4).

Эти тождества образуют относительно составляющих c_{kl}^h систему уравнений, которая допускает некоторое число действительных различных решений, считая различными два решения, не приводящиеся одно в другое формулами (2).

Задача классификации групп Ли данного порядка r сводится к применению преобразований (2) так, чтобы получить канонические формы для тензоров c_{kl}^h, составляющие которых являются различными решениями системы (4).

Кроме двух ассоциированных к группе G_r [3] тензоров Г. Врынчану: вектора структуры $c_\alpha = c_{\alpha h}^\alpha$ и симметричного тензора $c_{hk} = c_{h\beta}^\alpha\ c_{k\alpha}^\beta$, прибавляем трижды ковариантный тензор $c_{hkl} = c_{h\beta}^\alpha\ c_{k\gamma}^\beta\ c_{l\alpha}^\gamma$ и вообще тензор s— раз ковариантный

$$c_{h_1\ h_2 \ldots h_{s-1}\ h_s} = c_{h_1 \alpha_2}^{\alpha_1}\ c_{h_2 \alpha_3}^{\alpha_2} \ldots c_{h_{s-1} \alpha_s}^{\alpha_{s-1}}\ c_{h_s \alpha_1}^{\alpha_s}.$$

Прежде чем перейти к поставленной задаче, доказываем нижеследующие теоремы:

I. Составляющие тензоров c_{kl}^h и $c_{h_1 \ldots h_s}$ удовлетворяют соотношениям (5).

II. Составляющие тензоров c_{kl}^{h} и c_h удовлетворяют соотношениям (6).

III. Если вектор структуры c_h некоторой группы G_r отличен от нуля, производная группы G_r имеет не больше чем $r-1$ параметров.

IV. Если c_h, отличный от нуля, приведен к канонической форме, (7) имеем соотношения (8).

V. Составляющие тензоров c_{hl}^{h}, c_{hk}, c_{hkl} удовлетворяют соотношениям (10), (11).

VI. Если тензор c_{hk} приведен к канонической форме (13) (где ε_h являются положительными, отрицательными или нулевыми постоянными, ненулевые абсолютные величины ε_h могут быть выбраны заранее подходящим образом), составляющие c_{kl}^{h} удовлетворяют соотношениям (14).

VII. Если тензор c_{hk}, группы реальной структуры G_r, приведен к канонической форме (13), главные составляющие ε_h и c_{hk} не могут быть все положительными.

VIII. Если характеристика c_{hk} есть r, вектор c_h нулевой. Если c_{hk} приведен к форме (13), составляющие с двумя равными индексами c_{kl}^{h} нулевые.

IX. Если c_h отличен от нуля, характеристика c_{hk} меньше чем r.

X. Если ненулевой вектор c_h и тензор c_{hk} приведены к формам (7) и (15), величины ε_h не могут быть все отличными от нуля.

XI. Соотношения (17) являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы группа G_r была интегрируема [1]).

XII. Если G_r интегрируема, характеристика c_{hk} не больше чем $r-2$; следовательно, если характеристика c_{hk} есть r или $r-1$, G_r неинтегрируема.

XIII. Если характеристика ненулевого тензора c_{hk} — интегрируемой группы G_r — есть $p \leqslant r-2$, производная группа является порядка не высшего чем $r-p$.

XIV. Если характеристика c_{hk} есть 0 или 1, G_r интегрируема.

XV. Для групп G_4 реальной структуры, характеристика c_{hk} является $\leqslant 3$.

XVI. Группы G_4 с ненулевым вектором c_h интегрируемы.

Перейдем теперь к задаче классификации реальных G_4 групп.

Мы предполагаем, во-первых, что c_h отличен от нуля и мы имеем сначала положение (23), (24) ($\varepsilon = \text{const}$).

Если $\varepsilon \neq 0$, из соотношений (14) выводим $c_{kl}^{1} = 0$ ($k,l = 1,2,3,4$), откуда также $c_{23}^{2} = c_{23}^{3} = 0$. Соотношение $c_{11} = \varepsilon$ единственное из (14) не тождественно удовлетворенное, записывается в форме (25). Далее при помощи преобразований (26), которые сохраняют полученное положение, приводят к нулю составляющую c_{12}^{2}. Откуда следует $c_{13}^{3} = 0$ так, что тождества (4) Ли, отличные, не тождественно удовлетворенные, записываются в форме (27), а соотношения (25) переходят в (28), что показывает, что имеем $c_{24}^{2} = c_{34}^{3} = \frac{1}{2}$. Наконец, приведя к единице составляющую c_{13}^{2} и к

[1]) Эта теорема является прямым следствием теоремы Картана [8] и соотношений (10).

нулю составляющие c^2_{34}, c^2_{14}, c^3_{14}, и полагая $\varepsilon = \pm 2$, откуда следует $c^3_{12} = \pm 1$, мы получаем уравнение структуры (I).

Если $\varepsilon = 0$, соотношение (24) записывается явно в форме (24′), то необходимо сделать нижеследующие (различные) гипотезы:

А. Составляющие c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} являются все нулевыми.

Б. Из составляющих c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} две являются нулевыми, а третья ненулевой: например $c^1_{23} = c^2_{31} = 0$, $c^3_{12} \neq 0$.

В обеих гипотезах имеется также

$$c^2_{21} = c^3_{31} = c^1_{12} = c^3_{32} = c^1_{13} = c^2_{23} = 0.$$

В гипотезе А соотношения (4) тождественно удовлетворены, а составляющие c_{h4} ($h = 1,2,3$), c_{h4} являются все нулевыми.

Относительно группы (29), c^h_{k4} ($h,k = 1,2,3$) являются составляющими смешанного тензора второго порядка, преобразующиеся по формулам (30), которые для $h = 3$, $k = 1,2,3$, переходят в (30′).

В случае если характеристика матрицы $\| c^h_{k4} \|$ есть 3, рассматривая плоскую гомографию (31), которая имеет всегда двойную действительную точку, приведем к нулю составляющие c^3_{14}, c^3_{24}.

Далее будем рассматривать проективность (33).

Если двойные точки этой проективности действительны, приводим к нулю c^2_{14}.

Относительно преобразований (34), составляющие c^1_{14}, c^2_{24}, c^3_{34} являются относительными инвариантами. Если все эти инварианты отличны между собой, получаются уравнения структуры (II), где неприводимые постоянные a, b, $1 - a - b$, различны между собой и отличны от нуля. Если два из инвариантов c^1_{14}, c^2_{24}, c^3_{34} равны, например $c^1_{14} = c^2_{24} \neq c^3_{34}$, получаем уравнения (III), где постоянная $a \neq 0, \neq \frac{1}{2}, \neq \frac{1}{3}$.

Если $c^1_{14} = c^2_{24} = c^3_{34}$, получаем либо уравнения (II), где $a = b = \frac{1}{3}$, либо уравнение (III), где $a = \frac{1}{3}$, либо наконец уравнение (IV).

В случае если двойные точки (33) являются мнимыми, будем предполагать $c^1_{14} = c^2_{24}$, $c^1_{24} = -c^2_{14}$ и получим уравнения (V), где $a \neq \frac{1}{2}$, $b \neq 0$.

Если характеристика $\| c^h_{k4} \|$ меньше чем 3, рассматривая снова гомографию (31) и проективность (33), получаем уравнение (II), (III) и (V), где a, b принимает исключенные выше значения, имея всегда в (V) $b \neq 0$.

В гипотезе В аналогичные соображения приводят к уравнениям структуры (VI), (VII) и (VIII).

Таким образом приходим к теореме: структуры действительных групп G_4, с вектором c_h, отличным от нуля, могут быть приведены к одной из канонических форм (I) ($\varepsilon = \pm 1$), (II), (III), (IV), (V) ($b \neq 0$), (VI), (VII), (VIII). Для типов (I) ($\varepsilon = \pm 1$) характеристика c_{hk} есть 2,

для типов (II), (III), (IV), (VI), (VII) характеристика c_{hk} есть 1, в то время как для типов (V) ($b \neq 0$), (VIII) характеристика c_{hk} является 1 или 0. Все группы G_4 с вектором c_h, отличным от нуля, интегрируемы.

Переходя к случаю, когда c_h является нулем, будем полагать, что c_{hk} приведен к канонической форме (40). Известно, что характеристика c_{hk} не может быть 4. Так же показывается, что она не может быть 2.

Если характеристика c_{hk} есть 3, легко получаем (IX) ($\varepsilon = \pm 1$) неинтегрируемых групп G_4.

Если характеристика c_{hk} является 1, получаем уравнения (X), (XI) и (XII).

Наконец, если характеристика c_{hk} есть 0, получаются уравнения (XIII), (XIV), (XV), так, что можно изложить теорему:

Структуры действительных групп G_4, с нулевым вектором c_h, могут быть приведены к одной из канонической форм (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), (X), (XI), (XII), (XIII), (XIV), (XV).

Для типов (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), неинтегрируемых, характеристика c_{hk} есть 3, для типов (X), (XI), (XII) характеристика c_{hk} есть 1, а для типов (XIII), (XIV), (XV) характеристика c_{hk} есть 0.

Пытаясь привести преобразованиями (52) типы группы G_4, полученные выше, к типам (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (K), (L), (M), данные Ли, приходим к выводу, что данная классификация, для действительных групп G_4, частично эквивалентна классификации, данной Ли, как показывает нижеследующая таблица.

Типы (I) ($\varepsilon = -1$), (V), (VIII), (IX) ($\varepsilon = 1$), полученные сверх вышеуказанных, могут быть приведены к типам (D), (E) ($1 + a + c \neq 0$), (B) ($c \neq 0$), (A) соответственно, но при помощи преобразований (52) с мнимыми коэффициентами.

LA CLASSIFICATION DES GROUPES DE LIE RÉELS À QUATRE PARAMÈTRES

(RÉSUMÉ)

Les groupes continus et finis, avec deux, trois et quatre paramètres, ont été classifiés par Sophus Lie [1], dès 1874.

Pour les groupes G_3 réels, le problème est également considéré par L. Bianchi [2], en 1918, qui obtient en plus deux types de groupe G_3, par rapport aux types obtenus par Lie, qui ne fait pas de distinction entre le réel et l'imanginaire. Le problème est reconsidéré, en 1947, par G. Vrănceanu [3] et H. C. Lee [4], les classifications de Vrănceanu et Lie étant équivalentes à celle donnée par Bianchi [5].

L'Auteur se propose de classifier les groupes G_4 réels, par la méthode tensorielle.

Ecrivons les équations de structure de G_r sous la forme donnée par Lie, ou X_h sont les opérateurs des transformations infinitésimales du groupe, $(X_k X_l)$ les parenthèses de Poisson, et c_{kl}^h les constantes de structure, qui, par rapport aux transformations (2) dans l'espace des paramètres $a^1, a^2, \ldots a^r$ du groupe,

constituent les composantes du tenseur fondamental de structure du groupe G_r, et satisfont aux identités (4) de Lie.

Ces identités constituent, par rapport aux composants de c_{kl}^h, un système d'équations qui admet un certain nombre de solutions réelles distinctes, en considérant distinctes deux solutions ne se réduisant pas l'une à l'autre par les formules (2).

Le problème de la classification des groupes de Lie, d'un ordre donné r, revient à utiliser les transformations (2) de façon à obtenir des formes canoniques pour les tenseurs c_{kl}^h dont les composants sont des solutions distinctes du système (4).

Aux deux tenseurs associés par G. Vrănceanu au groupe G_4[3]: le vecteur de structure $c_h = c_{\alpha h}^{\alpha}$ et le tenseur symétrique $c_{hk} = c_{h\beta}^{\alpha} c_{k\alpha}^{\beta}$, on ajoute le tenseur triplement covariant $c_{hkl} = c_{h\beta}^{\alpha} c_{k\gamma}^{\beta} c_{l\alpha}^{\gamma}$ et, plus généralement, le tenseur s—fois covariant

$$c_{h_1 h_2 \ldots h_{s-1} h_s} = c_{h_1 \alpha_2}^{\alpha_1} c_{h_2 \alpha_3}^{\alpha_2} \ldots c_{h_{s-1} \alpha_s}^{\alpha_{s-1}} c_{h_s \alpha_1}^{\alpha_s}.$$

Avant d'envisager le problème que l'Auteur se propose, il démontre les théorèmes suivants:

I. Les composantes des tenseurs c_{kl}^h et $c_{h_1 \ldots h_s}$ satisfont aux relations (5).

II. Les composantes des tenseurs c_{kl}^h et c_h satisfont aux relations (6).

III. Si le vecteur de structure c_h d'un G_r est différent de zéro, le groupe dérivé de G_r a $r-1$ paramètres au plus.

IV. Si c_h, différent de zéro, est réduit à la forme canonique (7), nous avons les relations (8).

V. Les composantes des tenseurs c_{kl}^h, c_{hk}, c_{hkl} satisfont aux relations (10), (11).

VI. Si le tenseur c_{hk} est réduit à la forme canonique (13) (où ε_h sont des constantes positives, négatives ou nulles, les valeurs des ε_h non nulles pouvant être choisies convenablement par avance), les composantes de c_{kl}^h satisfont aux relations (14).

VII. Si le tenseur c_{hk}, du groupe G_r de structure réelle, est réduit à la forme canonique (13), les composantes principales ε_h de c_{hk} ne peuvent être toutes positives.

VIII. Si la caractéristique de c_{hk} est r, le vecteur c_h est nul. Si c_{hk} est réduit à la forme (13), les composantes à deux indices égaux de c_{kl}^h sont nulles.

IX. Si c_h est différent de zéro, la caractéristique de c_{hk} est moindre que r.

X. Si le vecteur non nul c_h et le tenseur c_{hk} sont réduits aux formes (7) et (15), les quantités ε_h ne peuvent être toutes différentes de zéro.

XI. Les relations (17) constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe G_r soit intégrable [1]).

XII. Si G_r est intégrable, la caractéristique de c_{hk} est $r-2$ au plus; donc, si la caractéristique de c_{hk} est r ou $r-1$, G_r est non intégrable.

XIII. Si la caractéristique du tenseur non nul c_{hk} — du groupe intégrable G_r — est $p \leqslant r-2$, le groupe dérivé est d'ordre $r-p$ au plus.

XIV. Si la caractéristique de c_{hk} est 0 ou 1, G_r est intégrable.

XV. Pour les groupes G_4, de structure réelle, la caractéristique de c_{hk} est $\leqslant 3$.

---

[1]) Ce théorème est une conséquence immédiate d'un théorème de Cartan [8] et des relations (10).

XVI. Les groupes G_4 à vecteur c_h non-nul sont intégrables.

Passons maintenant au problème de la classification des G_4 réels.

Supposons premièrement que c_h est différent de zéro et que l'on a, dès le commencement, la situation (23), (24) ($\varepsilon = c^{te}$).

Si $\varepsilon \neq 0$, des relations (14) on déduit $c^1_{kl} = 0$ $(k, l = 1,2,3,4)$ et par suite aussi $c^2_{23} = c^3_{23} = 0$. La relation $c_{11} = \varepsilon$, seule des (14) non identiquement satisfaite, s'écrit sous la forme (25). Ensuite, par les transformations (26), qui conservent la situation obtenue, on réduit à zéro la composante c^2_{12}. Il en résulte $c^3_{13} = 0$, de sorte que les identités (4) de Lie, distinctes et non identiquement satisfaites, s'écrivent sous la forme (27) et la relation (25) devient (28), ce qui nous montre que nous avons $c^2_{24} = c^3_{34} = \frac{1}{2}$. Enfin, en réduisant à l'unité la composante c^2_{13}, à zéro les composantes c^2_{34}, c^2_{14}, c^3_{14} et en supposant $\varepsilon = \pm 2$, d'où $c^3_{12} = \pm 1$, nous obtenons les équations de structure (I).

Si $\varepsilon = 0$, les (24) s'écrivent explicitement sous la forme (24′) et nous sommes conduits à faire les hypothèses suivantes (distinctes):

A. Les composantes c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12} sont toutes nulles.

B. Des composantes c^1_{23}, c^2_{31}, c^3_{12}, deux sont nulles et l'autre non-nulle; par exemple $c^1_{23} = c^2_{31} = 0$, $c^3_{12} \neq 0$.

Dans les deux hypothèses on a aussi $c^2_{21} = c^3_{31} = c^1_{12} = c^3_{32} = c^1_{13} = c^2_{23} = 0$.

Dans l'hypothèse *A*, les (4) sont identiquement satisfaites et les composantes c_{h4} $(h = 1, 2, 3)$ de c_{hk} sont toutes nulles.

Par rapport au groupe (29), c^h_{k4} $(h, k = 1,2,3)$ constituent les composantes d'un tenseur mixte du second ordre, se transformant d'après les formules (30), lesquelles, pour $h = 3$, $k = 1,2,3$, deviennent (30′).

Dans le cas où la caractéristique de la matrice $\| c^h_{k4} \|$ est 3, en considérant l'homographie plane (31), qui a toujours un point uni réel, on réduit à zéro les composantes c^3_{14}, c^3_{24}. On est ensuite conduit à considérer la projectivité (33)

Si les points unis de cette projectivité sont réels, on réduit à zéro c^2_{12}.

Par rapport aux transformations (34), les composantes c^1_{14}, c^2_{24}, c^3_{34} sont des invariants relatifs. Si tous ces invariants sont distincts, on obtient les équations de structure (II), où les constantes irréductibles a, b, $1-a-b$ sont distinctes et différentes de zéro. Si deux des invariants c^1_{14}, c^2_{24}, c^3_{34} sont égaux, par exemple $c^1_{14} = c^2_{24} \neq c^3_{34}$, on obtient les équations (III), où la constante $a \neq 0, \neq \frac{1}{2}, \neq \frac{1}{3}$.

Si $c^1_{14} = c^2_{24} = c^3_{34}$, on obtient soit les (II), où $a = b = \frac{1}{3}$, soit les (III) où $a = \frac{1}{3}$, soit enfin les équations (IV).

Dans le cas où les points unis de (33) sont imaginaires, on peut supposer $c^1_{14} = c^2_{24}$, $c^1_{24} = -c^2_{14}$ et on obtient les équations (V), où $a \neq \frac{1}{2}$, $b \neq 0$.

Si la caractéristique de $\| c^h_{k4} \|$ est moindre que 3, en considérant de même l'homographie (31) et la projectivité (33), on obtient les équations (II), (III),

(V), où a, b prennent les valeurs exceptées plus haut, ayant toujours, dans (V), $b \neq 0$.

Dans l'hypothèse B, des considérations analogues nous conduisent aux équations de structure (VI), (VII), (VIII).

On arrive ainsi au théorème: *Les structures des groupes G_4 réels à vecteur c_h différent de zéro, peuvent être réduites à l'une des formes canoniques (I)* ($\varepsilon = \pm 1$), *(II), (III), (IV), (V)* ($b \neq 0$), *(VI), (VII), (VIII). Pour les types (I)* ($\varepsilon = \pm 1$), *la caractéristique de c_{hk} est* 2, *pour les types (II), (III), (IV), (VI), (VII), la caractéristique de c_{hk} est* 1, *tandis que pour les types (V)* ($b \neq 0$), *(VIII), la caractéristique de c_{hk} est* 1 *ou* 0. *Tous les G_4 à vecteur c_h différent de zéro sont intégrables.*

En passant au cas où c_h est nul, on supposera c_{hk} réduit à la forme canonique (40). On sait que la caractéristique de c_{hk} ne peut être 4. On montre également qu'elle ne peut être 2.

Si la caractéristique de c_{hk} est 3, on obtient facilement les équations (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), des G_4 non intégrables.

Si la caractéristique de c_{hk} est 1, on obtient les équations (X), (XI), (XII).

Enfin, si la caractéristique de c_{hk} est 0, on obtient les équations (XIII), (XIV), (XV), de sorte qu'on peut énoncer le théorème:

Les structures des groupes G_4 réels, à vecteur c_h nul, peuvent être réduites à l'une des formes canoniques (IX) ($\varepsilon = \pm 1$) *(X), (XI), (XII), (XIII), (XIV), (XV).*

Pour les types (IX) ($\varepsilon = \pm 1$), *non intégrables, la caractéristique de c_{hk} est* 3; *pour les types (X), (XI), (XII) la caractéristique de c_{hk} est* 1, *et pour les types (XIII), (XIV), (XV) la caractéristique de c_{hk} est* 0.

En cherchant à réduire, par des transformations (52), les types de groupe G_4, obtenus plus haut, aux types (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (K), (L), (M) donnés par L i e, on conclut que la classification donnée par l'Auteur, pour les G_4 réels, est partiellement équivalente à la classification donnée par L i e, comme le montre le tableau ci-dessus.

Les types (I) ($\varepsilon = -1$), (V), (VIII), (IX) ($\varepsilon = 1$), obtenus en plus, peuvent être aussi réduits aux types (D), (E) ($1 + a + c \neq 0$), (B) ($c \neq 0$), (A), respectivement, mais par des transformations (52) à coefficients imaginaires.

BIBLIOGRAFIE

1. S o p h u s L i e, *Theorie des Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von F. Engel, dritter und letzter Abschnitt.* Leipzig, Teubner, retipărire în 1930.
2. L u i g i B i a n c h i, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Spoerri*, Pisa, 1918.
3. G. V r ă n c e a n u, *Lecţii de geometrie diferenţială.* Bucureşti, 1952, v. I.
4. H. C. L e e, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1947, t. XXVI, p. 251.
5. A. D o b r e s c u, Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de Ştiinţe Matematice şi Fizice, t. V, Nr. 1, 1953, p. 75.
6. — Revista Universităţii «C. I. Parhon» şi a Politehnicii din Bucureşti, Nr. 3, 1953, p. 39.
7. W. K i l l i n g., Math. Ann., 1888, t. 31, p. 252.
8. E. C a r t a n, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus.* Thèse, 1894.
9. G. V r ă n c e a n u, Studii şi Cercetări Matematice, t. I, Nr. 1, 1950, p. 40.
10. A. D o b r e s c u, Bul. Ştiinţ. Acad., R.P.R., Seria Mat., Fiz., Chim., t. II, Nr. 2, Februarie 1950, p. 137.
11. — Comunicările Acad. R.P.R., t. II, Nr. 11—12, Noembrie-Decembrie 1952, p. 665.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

ASUPRA UNOR SUPRAFEŢE R_0

DE

F. MARCUS

Una din problemele cele mai interesante din geometria proiectivă diferenţială este aceea de a determina perechile de suprafeţe proiectiv aplicabile, problemă ce este strâns legată de aceea a existenţei suprafeţelor şi care constă, după cum se ştie, dacă de exemplu suprafaţa este raportată la liniile asimptotice [1] în a găsi toate suprafeţele pentru care valorile lui β, γ sunt date a priori, β, γ fiind coeficienţii bine cunoscuţi din teoria proiectivă a suprafeţelor după G. Fubini *).

In prima parte a acestei lucrări, se demonstrează existenţa unor suprafeţe S_x determinate de (III) sau (III'), astfel încât ele sunt proiectiv aplicabile cu suprafeţele S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$, descrise de punctul de pe una din tangentele asimptotice prin care trece a doua muchie a lui Green. Se deduce că aceeaşi proprietate este comună şi suprafeţelor S_{x_1}, astfel încât se obţine o infinitate de suprafeţe care se deduc una din alta şi care sunt proiectiv aplicabile pe suprafaţa S_x.

In partea a doua, se demonstrează că există suprafeţe cărora li se pot asocia o infinitate de alte suprafeţe pentru fiecare valoare a parametrului λ ce determină o dreaptă canonică. Aceste suprafeţe sunt descrise de punctul situat pe una din tangentele asimptotice prin care trece a doua dreaptă canonică, astfel încât ele sunt proiectiv aplicabile pe suprafeţele date. Aceeaşi proprietate are loc şi pentru suprafeţele descrise de unul din punctele prin care trece a doua dreaptă a lui Wilczynski, situat pe una din tangentele asimptotice ale unei suprafeţe şi care sunt proiectiv aplicabile pe această suprafaţă. Se arată că suprafeţele de coincidenţă cu $p_{ii}\,(i = 1, 2) = \text{constante}$ au proprietatea că li se pot asocia o dublă infinitate de suprafeţe, descrise respectiv de punctele situate pe tangentele asimptotice, prin care trece a doua dreaptă canonică şi care sunt proiectiv identice cu ele.

Fie $x^i = x^i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ coordonatele proiectiv omogene ale unui punct (x) ce descrie o suprafaţă S_x cu elementul liniar al lui Fubini $\dfrac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2du\,dv}$, $\beta\gamma \neq 0$, uv fiind parametrii asimptotici care verifică sistemul

*) Se împlinesc zece ani dela moartea lui Guido Fubini care s'a stins din viaţă în exil, din cauza legiuirilor rasiale.

canonic al lui Fubini [1]*)

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \theta x_v + p_{22} x. \end{aligned} \qquad \theta = \log \beta\gamma \tag{1}$$

Se ştie [2]**) că în fiecare punct al suprafeţei, o dreaptă din primul fascicul canonic se determină unind punctul x cu punctul $x_{uv} - l_1 x_v - l_2 x_u$, unde, în cazul coordonatelor normalizate ale lui Fubini,

$$-l_1 = \lambda \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}, \quad -l_2 = \lambda \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}, \tag{2}$$

λ având valoarea numerică care determină dreapta. Astfel, de exemplu, pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ sau $\lambda = -\frac{1}{4}$ avem respectiv directoarea lui Wilczynski şi muchia lui Green. Al doilea fascicul canonic este determinat de dreptele corespondente celor din primul fascicul în polaritatea fundamentală definită de cuadrica lui Lie în fiecare punct al suprafeţei; dreptele sunt determinate de punctele

$$\begin{aligned} x_1 &= x_v - l_2 x \\ x_{-1} &= x_u - l_1 x. \end{aligned} \tag{3}$$

Aceste puncte descriu, când u, v variază, suprafeţele pe care le indicăm respectiv cu S_{x_1}, $S_{x_{-1}}$.

Ne punem problema de a determina dacă există suprafeţe S_x astfel încât, liniilor asimptotice de pe aceste suprafeţe, să le corespundă liniile asimptotice de pe suprafeţele S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$.

Să presupunem, de exemplu, că această corespondenţă are loc între suprafeţele S_x şi S_{x_1}. In acest caz

$$\begin{aligned} x_{1uu} &= \theta_{1u} x_{1u} + \beta x_{1v} + p^1_{11} x_1 \\ x_{1vv} &= \gamma_1 x_{1u} + \theta_{1v} x_{1v} + p^1_{22} x_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Observând că $(x_1\ x_u\ x_v\ x_{uv}) \neq 0$ şi ţinând seama de (1), (2), (3), (4), obţinem următoarele condiţii:

$$\left.\begin{aligned} &-l_{2uu} - l_2 p_{11} + p_{11v} + \beta p_{22} + \theta_{1u} l_{2u} - \beta_1 p_{22} + \beta_1 l_{2v} + p^1_{11} l_2 = 0 \\ &-2l_{2u} - l_2 \theta_u + \theta_{uv} + \beta\gamma + \theta_{1u} l_2 - \beta_1 \gamma = 0 \\ &-l_2 \beta + \beta_v + \beta\theta_v + p_{11} - \beta_1 \theta_v + \beta_1 l_2 - p^1_{11} = 0 \\ &\theta_{1u} - \theta_u = 0 \\ &p_{22v} - l_{2vv} + p_{22}\theta_v - p_{22} l_2 + \gamma_1 l_{2u} - p_{22}\theta_{1v} + \theta_{1v} l_{2v} + p^1_{22} l_2 = 0 \\ &\gamma\theta_v - \gamma l_2 + \gamma_v + \gamma_1 l_2 - \gamma\theta_{1v} = 0 \\ &p_{22} - 2l_{2v} + \theta_{vv} + \theta_v^2 - \theta_v l_2 + \theta_{1v} l_2 - \theta_v \theta_{1v} - p^1_{22} = 0 \\ &\gamma - \gamma_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

*) p. 90.
**) p. 141—144.

Din $(I_{4,6,8})$ rezultă

$$\left.\begin{aligned} \theta_{1u} &= \theta_u \\ \theta_{1v} &= \theta_v + \frac{\gamma_v}{\gamma} \\ \gamma_1 &= \gamma \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Scriind că $\theta_{1uv} = \theta_{1vu}$, avem din (5)

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{6}$$

Deci $\gamma = \frac{V_{(v)}}{U_{(u)}}$, unde V, U sunt respectiv funcții arbitrare de v, u.

Printr'o schimbare a parametrilor, se va putea lua $\gamma = 1$, și, ținând seama de (5) și de (I_2), rezultă

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma = 1 \\ \theta_{1u} &= \theta_u,\ \theta_{1v} = \theta_v \\ \beta_1 &= \beta + (1 + 4\lambda)\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In același mod se demonstrează că dacă

$$\left.\begin{aligned} \beta_{-1} &= \beta = 1 \\ \theta_{-1u} &= \theta_u,\ \theta_{-1v} = \theta_v \\ \gamma_{-1} &= \gamma + (1 + 4\lambda)\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\, \partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

atunci liniile asimptotice de pe suprafețele S_x și $S_{x_{-1}}$ se corespund.

Pentru determinarea suprafețelor S_x va trebui deci să ținem seama atât de condițiile de existență ale acestor suprafețe [1]*), cât și de ecuațiile din (I) de care încă nu s'a ținut seama.

Din (7) sau (7') rezultă că suprafețele S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$ se bucură de o proprietate importantă, în cazul când se presupun a fi generate de unul din punctele prin care trece a doua muchie a lui Green, adică dacă

$$1 + 4\lambda = 0. \tag{7''}$$

In acest caz, suprafețele S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$ sunt proiectiv aplicabile pe suprafața S_x [1]**). Mai mult, observând că β_1, γ_1, sau β_{-1}, γ_{-1} sunt respectiv egali cu β, γ, rezultă că S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$ se bucură de aceeași proprietate ca și suprafața S_x, adică suprafețele descrise de punctul de pe una din tangentele asimptotice prin care trece a doua muchie a lui Green, în raport cu una din aceste suprafețe, sunt proiectiv aplicabile pe S_{x_1} sau $S_{x_{-1}}$ și deci pe suprafața S_x.

*) p. 94—95.
**) p. 119—124.

In consecinţă, continuând astfel, obţinem, plecând dela suprafaţa S_x, o infinitate de suprafeţe, descrise respectiv fie de punctele

$$x_i = (x_{i-1})_v - l_2\, x_{i-1} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots) \tag{7'''}$$

fie de

$$x_{-1} = (x_{-i+1})_u - l_1\, x_{-i+1} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7^{IV}}$$

care sunt proiectiv aplicabile pe suprafaţa S_x.

Ţinând seama de acest rezultat, credem că prezintă interes determinarea suprafeţelor S_x care se bucură de această proprietate.

Pentru aceasta, folosim ecuaţiile cunoscute [1] *), care dau condiţiile de existenţă ale suprafeţelor şi anume

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{uu} + 2p_{22u} + (\gamma\theta_u)_u + \theta_v\,\theta_{uv} = \beta\gamma_v + 2\,\beta_v\,\gamma + \theta_{uvv} \\ &\beta_{vv} + 2p_{11v} + (\beta\theta_v)_v + \theta_u\,\theta_{uv} = \gamma\beta_u + 2\,\beta\gamma_u + \theta_{uuv} \\ &\theta_u\,p_{22u} + \beta p_{22v} + 2p_{22}\,\beta_v + (p_{11})_{vv} = \theta_v\,p_{11v} + \gamma p_{11u} + 2p_{11}\,\gamma_u + (p_{22})_{uu} \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

şi expresiile L, M [1] **).

$$\left.\begin{aligned} L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2}\,\theta_u^2 - 2p_{11} - \beta\theta_v - \beta_v \\ M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2}\,\theta_v^2 - 2\,p_{22} - \gamma\theta_u - \gamma_u . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Din (I_3), (I_7), observând (2), (7) şi (7″), avem

$$\left.\begin{aligned} p^1_{11} &= p_{11} + \beta_v \\ p^1_{22} &= p_{22} . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ţinând seama de (2), (7), (7‴), (9) şi de (I_1), avem

$$2p_{11v} = (\log\beta)_{vuu} - \beta\,(\log\beta)_{vv} - (\log\beta)_{uv}\,(\log\beta)_u - \beta_v\,(\log\beta)_v . \tag{10}$$

Dar din (II_2), ţinând seama de (2), (7) şi (7″), rezultă

$$2p_{11v} = \beta_u + (\log\beta)_{uuv} - (\log\beta)_u\,(\log\beta)_{uv} - 2\beta_{vv} . \tag{11}$$

Deci

$$\beta_u = \beta_{vv} . \tag{12}$$

De asemenea, din (I_5), ţinând seama de (1), (2), (7), (7″) şi (9), avem

$$2p_{22v} = (\log\beta)_{vvv} - (\log\beta)_{uv} - (\log\beta)_v\,(\log\beta)_{vv} . \tag{13}$$

Insă din condiţiile de integrabilitate ale lui Fubini (II_1)

$$2p_{22u} = 2\beta_v + (\log\beta)_{uvv} - (\log\beta)_{uu} - (\log\beta)_v\,(\log\beta)_{uv} . \tag{14}$$

*) p. 94.
**) p. 95.

Scriind că $p_{22vu} = p_{22uv}$, rezultă

$$\beta_{vv} = 0. \tag{15}$$

Deci $\beta_u = 0$.

Ținând seama și de (12), avem în sfârșit

$$\beta = cv + c_1 \qquad (c, c_1 = \text{const.}). \tag{16}$$

Să determinăm acum valorile p_{11}, p_{22}. Pentru aceasta observăm că din (14), ținând seama de (2) și (16), avem

$$p_{22u} = c. \tag{14'}$$

Deci $p_{22} = c_u + \Psi(v)$.

Din (13) și (16) rezultă

$$\Psi''(v) = \frac{3}{2} \frac{c^3}{(cv + c_1)^3}.$$

Deci

$$\Psi'(v) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{c^2}{(cv + c_1)^2} + c_2.$$

In consecință

$$p_{22} = cu - \frac{3}{4} \frac{c^2}{(cv + c_1)^2} + c_2. \tag{17}$$

Din (11), ținând seama de (16), rezultă $p_{11v} = 0$.

Deci $p_{11} = F(u) + c_3$.

Introducând această valoare în (II_3) și ținând seama de (16) și (15), rezultă

$$p_{11} = c^2u^2 + 2cc_2\,u + c_3. \tag{18}$$

Cu aceste valori ale lui p_{11} și p_{22}, ținând seama de (16), avem

$$\left.\begin{aligned} L &= -2c^2u^2 - 4c\,c_2\,u - 2(c_3 + c) \\ M &= -2cu \quad - 2c_2. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Suprafețele căutate există deci, și ele sunt determinate de

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = 1, \quad \beta = cv + c_1, \quad \theta = \log\beta \\ &p_{11} = c^2u^2 - 2cc_2u + c_3 \\ &p_{22} = cu - \frac{3}{4} \frac{c^2}{(cv + c_1)^2} + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

și de (8').

Dacă se ține seama de (9), rezultă că suprafețele S_{x_1} sunt determinate de

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 = 1, \quad \beta_1 = cv + c_1, \quad \theta_{1u} = \theta_u, \quad \theta_{1v} = \theta_v \\ &p^1_{11} = p_{11} + c, \quad p^1_{22} = p_{22} \\ &L_1 = L - 2c \\ &M_1 = M \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

şi se observă că se trece apoi de la suprafaţa S_x la suprafaţa S_{x_i}, lăsând toate cantităţile din (III) neschimbate, înafară de p_{11}^i şi L_i, care devin respectiv

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^i &= p_{11} + ic \\ L_i &= L - 2ic. \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Deci, pentru suprafaţa S_{x_i}, avem

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_i = 1, \quad \beta_i = \beta, \quad \theta_{iv} = \theta_v \\ &p_{11}^i = p_{11} + ic, \quad p_{22}^i = p_{22} \\ &M_i = M, \quad L_i = L - 2ic. \end{aligned}\right\} \quad (IV')$$

Făcând aceleaşi calcule în ipoteza că punctul x_{-1} ar satisface problema, rezultă că în acest caz suprafeţele S_x sunt date de

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 1, \quad \gamma = cu + c_1, \quad \theta = \log \gamma \\ p_{11} &= cv - \frac{3}{4}\frac{c^2}{(cu + c_1)^2} + c_2 \\ p_{22} &= c^2v^2 + 2cc_2v + c_3 \\ L &= -2cv - 2c_2 \\ M &= -2c^2v^2 - 4cc_2v - 2(c + c_2) \end{aligned}\right\} \quad (III')$$

iar suprafeţele S_{x_1}, de

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{-1} = 1, \quad \gamma_{-1} = \gamma \\ &p_{11}^{-1} = p_{11}, \quad p_{22}^{-1} = p_{22} + c \\ &L_{-1} = L \\ &M_{-1} = M - 2c. \end{aligned}\right\} \quad (IV'')$$

Suprafeţele $S_{x_{-i}}$ se obţin din suprafaţa $S_{x_{-1}}$ punând

$$p_{22}^{-i} = p_{22} + ic, \quad M_{-i} = M - 2ic \quad (IV''')$$

şi lăsând neschimbate celelalte expresii din (IV').

Avem deci următorul rezultat:

Suprafeţele S_x, determinate de (III) *sau* (III'), *sunt proiectiv aplicabile cu suprafeţele descrise de punctele*

$$x_i = (x_{i-1})_v - \frac{1}{2}\frac{c}{cv + c_1}x_{i-1} \quad (3')$$

sau

$$x_{-i} = (x_{-i+1})_u - \frac{1}{2}\frac{c}{cu + c_1}x_{-i+1}, \quad (3'')$$

care sunt situate pe una din tangentele asimptotice și prin care trece a doua muchie a lui Green, în raport cu care suprafețe S_x.

Aceste suprafețe mai au și următoarele proprietăți.

Fie S_{x_i} suprafața descrisă de punctul x_i. Ținând seama de rezultatul de mai sus, avem

$$x_{ivv} = x_{iu} + \theta_v x_{iv} + p_{22} x_i . \tag{18'}$$

Vrem să arătăm că punctul

$$x_{i+1} = x_{iv} - \frac{c}{2(cv + c_1)} x_i \tag{18''}$$

este situat pe tangenta la linia $v = \text{const.}$, de pe suprafața $S_{x_{i-1}}$.

Intr'adevăr, din (7'''), ținând seama de (7'') și de valorile lui β, avem

$$x_{iv} = (x_{i-1})_{vv} + \frac{c^2}{2(cv+c_1)^2} x_{i-1} - \frac{c}{2(cv + c_1)} (x_{i-1})_v .$$

In consecință, ținând seama de (7''') și observând că

$$p_{22} + \frac{3}{4} \frac{c^2}{(cv + c_1)^2} = cu + c_2 ,$$

avem

$$x_{i+1} = (x_{i-1})_u + (cu + c_2) x_{i-1} . \tag{19}$$

Pentru suprafețele $S_{x_{-i}}$, avem

$$x_{-i-1} = (x_{-i+1})_v + (cv + c_2) x_{-i+1} . \tag{19'}$$

Să presupunem acum că $1 + 4\lambda \neq 0$. Din (7) rezultă că suprafața S_{x_1} este proiectiv aplicabilă pe S_x dacă

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \, \partial v} = 0. \tag{20}$$

Deci,

$$\beta = \frac{U(u)}{V(v)},$$

U, V fiind funcții arbitrare respectiv de u și v.

Pentru determinarea acestor suprafețe observăm că din $(I_3, {}_7)$, ținând seama de (2), (7) și (20), avem

$$p^1_{11} = p_{11} + \beta_v$$

$$p^1_{22} = p_{22} + (1 + 4\lambda) (\log \beta)_{vv} . \tag{9'}$$

Din (I_1), ținând seama de (2), (9') și (20), avem

$$p_{11v} + \beta l_{2v} + \beta_v l_2 = 0 ,$$

iar din condițiile lui Fubini (II_2), rezultă

$$2p_{11v} + 2\beta_{vv} - \beta_u = 0. \tag{21'}$$

In consecință

$$2(1+2\lambda)\beta_{vv} = \beta_u . \tag{22}$$

Din (I_5), ținând seama de (1), (2), (9) și (20), avem

$$p_{22v} + 2\lambda(\log\beta)_{vvv} - 2\lambda(2+4\lambda)(\log\beta)_v(\log\beta)_{vv} = 0. \tag{23}$$

Din (II_1), avem

$$2p_{22u} + (\log\beta)_{uu} - 2\beta_v = 0. \tag{23'}$$

Scriind $p_{22vu} = p_{22uv}$ și ținând seama și de (20), rezultă

$$\beta_{uv} = 0. \tag{22'}$$

Din $(\log\beta)_{uv} = 0$, ținând seama de (22'), rezultă

$$\beta_u \beta_v = 0. \tag{22''}$$

Avem deci cazurile

$$i)\quad \beta_u = 0,\quad \beta_v \neq 0,\quad 1+2\lambda \neq 0.$$

Din (22) rezultă $\beta_{vv} = 0$. Deci

$$\beta = cv + c_1 . \tag{22'''}$$

Din (9'), ținând seama de (22'''), rezultă

$$p^1_{11} = p_{11} + c$$

$$p^1_{22} = p_{22} - (1+4\lambda)\frac{c^2}{(cv+c_1)^2} . \tag{9''}$$

Din (I_5) și (II_1), ținând seama de (22''') și (9''), avem

$$p_{22u} = c$$

$$p_{22v} = \frac{8\lambda(1+\lambda)c^3}{(cv+c_1)^3} .$$

Deci,

$$p_{22} = cu + \frac{4c^2\lambda(1+\lambda)}{(cv+c_1)^2} + c_2 . \tag{24}$$

Din (I_1), (22'') și (23) rezultă $p_{11v} = 0$.

Ținând seama de (II_3) și (23), se găsește

$$p_{11} = c^2u^2 + 2cc_2u + c_3 . \tag{24'}$$

Ținând seama de (24) și (24'), rezultă din (8)

$$\left.\begin{aligned} L &= -2c^2u^2 - 4cc_2u - 2(c+c_3) \\ M &= -\left(\frac{3}{2} + 8\lambda(1+\lambda)\right)\frac{c^2}{(cv+c_1)^2} - 2cu - 2c_3 , \end{aligned}\right\} \tag{24''}$$

ceea ce demonstrează existența acestor suprafețe S_x, care sunt proiectiv aplicabile cu o infinitate de suprafețe S_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots)$, descrise de punctele

$$x_i = (x_{i-1})_v + \frac{2\lambda c}{cv + c_1} x_{i-1}$$

pentru fiecare valoare a parametrului λ.

Dacă se ține seama de rezultatele din prima parte, se deduce că rezultatul este valabil și pentru cazul muchiei lui Green.

Se trece dela o suprafață S_x la S_{x_i}, lăsând neschimbate expresiile care determină suprafețele S_x, înafară de p^i_{ii}, L_i, M_i, care devin

$$p^i_{11} = p_{11} + ic$$

$$p^i_{22} = p_{22} - \frac{(1 + 4\lambda)\, ic^2}{(cv + c_1)^2}$$

$$L_i = L - 2ic$$

$$M_i = M - \frac{2ic^2 (1 + 4\lambda)}{(cv + c_1)^2}.$$

Dacă se consideră aceeași corespondență între suprafețele S_x și $S_{x_{-1}}$, se găsește

$$\beta = 1, \quad \gamma = cu + c_1$$

$$p^{-1}_{11} = p_{11} - \frac{(1 + 4\lambda)\, c^2}{(cu + c_1)^2}, \quad p^{-1}_{22} = p_{22} + \gamma_u$$

$$p_{11} = cv + \frac{4c^2\lambda (1 + \lambda)}{(cu + c_1)^2} + c_2$$

$$p_{22} = c^2v^2 + 2cc_2v + c_3$$

$$M = -2c^2v^2 - 4cc_2v - 2(c + c_3)$$

$$L = -\left(\frac{3}{8} + 8\lambda(1 + \lambda)\right)\frac{c^2}{(cu + c_1)^2} - 2cv - 2c_2,$$

obținându-se astfel o infinitate de suprafețe aplicabile proiectiv pe suprafețele S_x pentru fiecare valoare a parametrului λ și care sunt descrise de punctul

$$x_{-i} = (x_{-i+1})_u + \frac{2\lambda c}{cu + c_1} x_{-i+1},$$

trecându-se dela o suprafață S_x la o suprafață $S_{x_{-i}}$, așa cum s'a arătat mai sus

$$ii) \quad \beta_u = 0, \quad 1 + 2\lambda = 0. \tag{23''}$$

Deci $\beta = \beta(v)$ iar suprafața S_{x_1} este descrisă de punctul prin care trece a doua directoare a lui Wilczynski.

Din (2), ţinând seama de (23″), rezultă

$$l_2 = (\log \beta)_v . \tag{2'}$$

Din (I_5), ţinând seama de (2′), (9′) şi (23), rezultă

$$p_{22v} = (\log \beta)_{vvv}, \tag{25}$$

iar din (II_1), rezultă

$$p_{22u} = \beta_v . \tag{25'}$$

Din condiţiile $p_{22vu} = p_{22uv}$, ţinând seama că $(\log \beta)_{uv} = 0$, rezultă

$$\beta_{vv} = 0. \tag{25''}$$

Deci $\beta = cv + c_1$ şi, continuând ca mai sus, se demonstrează existenţa de suprafeţe S_x care sunt aplicabile proiectiv pe S_{x_1}, aceste din urmă fiind descrise de punctele situate pe tangenta asimptotică $(x\, x_v)$ prin care trece a doua directoare a lui Wilczynski.

Suprafeţele S_x sunt determinate de

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = 1, \quad \beta = cv + c_1 \\ &p_{11} = c^2u^2 + 2cc_2\, u + c_3 \\ &p_{22} = cu - \frac{c^2}{(cv + c_1)^2} + c_2 \\ &L = -2c^2u^2 - 4cc_2u - 2(c + c_3) \\ &M = -2cu + \frac{c^2}{2(cv + c_1)} - 2c_2 . \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Se trece dela S_x la S_{x_i}, lăsând neschimbate cantităţile din (V), afară de

$$\begin{aligned} &p^i_{11} = p_{11} + ic, \quad p^i_{22} = p_{22} + \frac{ic^2}{(cv + c)^2} \\ &L_i = L - 2ic \\ &M_i = M + \frac{2ic^2}{(cv + c)^2} . \end{aligned}$$

De asemenea, dacă se consideră suprafeţele descrise de x_{-1}, avem, pentru S_x,

$$\left.\begin{aligned} &\beta = 1, \quad \gamma = cu + c_1 \\ &p_{11} = cv - \frac{c^2}{(cu + c_1)^2} + c_2 \\ &p_{22} = c^2v^2 + 2cc_2\, v + c_3 \\ &L = -2cv + \frac{c^2}{2(cu + c_1)^2} - 2c_2 \\ &M = -2c^2v^2 - 4cc_2\, v - 2(c + c_3) \end{aligned}\right\} \tag{V'}$$

iar pentru $S_{x_{-i}}$, elementele din (V') rămân neschimbate, în afară de

$$p_{22}^{-i} = p_{22} + ic, \quad p_{11}^{-i} = p_{11} + \frac{ic^2}{(cu + c_1)^2}$$

$$iii) \qquad \beta_v = 0$$

$$M_{-i} = M - 2ic, \quad L_{-i} = L + \frac{2ic^2}{(cu + c_1)^2}.$$

Din (22) rezultă $\beta_u = 0$.

Deci

$$\beta = c \quad (c = \text{const.}). \tag{26}$$

Suprafețele căutate sunt deci suprafețe de coincidență [1] *).

Din $(I_{3,7})$, avem

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^1 &= p_{11} \\ p_{22}^1 &= p_{22}, \end{aligned}\right\} \tag{9'''}$$

iar din (II) rezultă

$$p_{22u} = p_{11v} = 0, \quad p_{22v} = p_{11u}. \tag{26'}$$

Dar, din (I_5), $p_{22v} = 0$ și în consecință,

$$p_{11} = h, \quad p_{22} = k, \quad (h, k = \text{const.}) \tag{26''}$$

Coordonatele (x) satisfac sistemul [1] *)

$$\begin{aligned} x_{uu} &= cx_v + hx \\ x_{vv} &= x_u + kx, \end{aligned} \tag{1'}$$

care se integrează, după cum se știe [1] *), imediat, obținându-se

$$x = e^{m_1 u + n_1 v}, \quad y = e^{m_2 u + n_2 v}, \quad z = e^{m_3 u + n_3 v}, \quad t = e^{m_4 u + n_4 v},$$

unde m_i, n_i sunt patru rădăcini din

$$\begin{aligned} m^2 &= cn + h \\ n^2 &= m + k. \end{aligned} \tag{27}$$

După cum se știe, aceste suprafețe pot fi puse sub forma [1] *)

$$x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3} t^{r_4} = \text{const.},$$

cu

$$\sum m_i r_i = \sum n_i r_i = \sum r_i = 0.$$

Din (8), ținând seama de (9'''), avem

$$L = -2h, \quad M = -2k. \tag{28}$$

*) p. 157.

Observând de asemenea că

$$p_{11}^{i} = p_{11}, \quad p_{22}^{i} = p_{22},$$

rezultă

$$L_i = L, \quad M_i = M.$$

Acelaşi rezultat se obţine şi pentru cazul când se consideră aceeaşi corespondenţă între suprafeţele S_x şi $S_{x_{-1}}$.

Avem deci următorul rezultat:

Suprafeţele de coincidenţă cu $p_{ii} = \text{const.}$ *sunt proiectiv identice cu suprafeţele descrise de punctele* x_i *şi* x_{-i}.

Această proprietate este caracteristică acestor suprafeţe, deoarece se demonstrează următorul rezultat:

Dacă o suprafaţă de coincidenţă este proiectiv egală cu suprafeţele descrise de punctele x_1, *sau* x_{-1} *de pe tangentele liniilor asimptotice, atunci* $p_{ii} = \text{const.}$

Intr'adevăr, avem [1] *),

$$x_{1uu} = cx_{1v} + (cu + h)\, x_1$$

$$x_{1vv} = x_{1u} + (cv + k)\, x_1$$

şi, ţinând seama de (1') şi de valorile lui x_{vuu}, rezultă

$$cx = 0.$$

Observând că $x \neq 0$, rezultă $c = 0$, ceea ce demonstrează rezultatul de mai sus.

Observaţii. Suprafeţele de coincidenţă cu $p_{ii} = \text{const.}$ sunt caracterizate şi de alte proprietăţi, printre care cea mai importantă este aceea că aceste suprafeţe sunt minime proiective.

Intr'adevăr, după G. Thomsen şi O. Mayer [2] **), o suprafaţă este minimă proiectivă dacă

$$\begin{aligned} \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} &= 0 \\ \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Ţinând seama de valorile lui β, γ, L, M, rezultă că aceste valori satisfac aceste condiţii.

Reciproc, dacă o suprafaţă de coincidenţă este o suprafaţă minimă proiectivă, atunci $p_{ii} = \text{const.}$

Intr'adevăr, ţinând seama [1] ***) că, în cazul unei suprafeţe de coincidenţă, avem

$$p_{11} = c_u + h, \quad p_{22} = cv + k \quad (a_{12} = 1),$$

rezultă, din (8)

$$L = -2p_{11} = -2(cu + h)$$

$$M = -2p_{22} = -2(cv + k).$$

*) p. 157.
**) p. 1—5.
***) p. 157.

Suprafaţa fiind minimă proiectivă, avem, ţinându-se seama de valorile lui β, γ,

$$M_v = L_u = 0.$$

In consecinţă, $c = 0$, ceea ce era de demonstrat.

Intr'o lucrare recentă, T. Mihăilescu reia problema lui E. Cêch asupra congruenţelor de drepte descrise de directoarele lui Wilczynski, în cazul când ele sunt stratificabile într'un singur sens, congruenţa stratificată fiind congruenţa primelor directoare.

Aceste suprafeţe sunt determinate de

$$\beta\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} = 0 \qquad (a)$$

β, γ fiind coeficienţii din (1).

T. Mihăilescu demonstrează, între altele, următoarea proprietate a acestor suprafeţe şi anume că ele sunt singurele suprafeţe pentru care punctele focale ale primei directoare a lui Wilczynski sunt conjugate în raport cu cuadrica lui Lie, ataşată fiecărui punct al acestora [3].

Această proprietate a fost considerată de mine într'o lucrare din 1938 [4], unde am demonstrat că, dacă se consideră în fiecare punct al unei suprafeţe, raportată la liniile asimptotice, o dreaptă canonică r_λ şi o cuadrică Q_h a lui Darboux, punctele focare F_λ^1, F_λ^2 ale dreptei sunt conjugate în raport cu cuadrica, dacă

$$\beta\gamma = -2\frac{3\lambda + 1}{1 + h}\frac{U'(u)\ V'(v)}{U(u) + V(v)^2}. \qquad (b)$$

Se studiază şi cazul particular când r_λ şi Q_h se reduc respectiv la prima directoare şi la cuadrica lui Lie, când (b) se reduce la (a). Se demonstrează de asemenea existenţa de suprafeţe ale lui Fubini care satisfac problema lui E. Cêch.

T. Mihăilescu demonstrează în aceeaşi lucrare, şi existenţa suprafeţelor minime proiective.

După cum am arătat mai sus, suprafeţele de coincidenţă cu $p_{ii} = \text{const.}$ sunt suprafeţe minime proiective. Vreau să arăt de asemenea că, în primul tom al Geometriei Proiective Diferenţiale al lui Fubini-Cêch, sunt date, în mod implicit, alte clase de suprafeţe minime proiective.

Intr'adevăr [1]*), se determină valorile lui L, M pentru suprafeţele cu asimptoticele $v = \text{const.}$, aparţinând unui complex liniar.

In acest caz

$$(\log \beta\gamma)_{uv} = \beta\gamma \qquad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2(\log \beta)_{uu} + U(u) \\ M &= -(\log \beta)_{vv} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)^2 + V(v) \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

unde U, V sunt funcţii arbitrare respectiv de u şi v.

*) p. 113—115.

Valorile lui L şi M sunt obţinute [1] din primele condiţii de integrabilitate

$$L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u$$

$$M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v$$

$$\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu},$$

ţinând seama de (30).

Calculând M_v şi L_u din (31) şi punând, aşa cum este *posibil* [1]*), în (31),

$$U(u) = V(v) = 0,$$

se deduce a treia condiţie de integrabilitate

$$\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = 0$$
$$\gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} = 0,$$

ceea ce demonstrează observaţia noastră de mai sus.

О НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ R_0

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор ставит задачу определить поверхности S_x так, чтобы имело место соответствие между асимптотическими линиями этой поверхности и поверхностей, описанных точками одной из асимптотических касательных, через которые определяют прямые второго канонического пучка. Выводится, что такие поверхности удовлетворяют (7) или (7′), а их существование, следует проверить, принимая во внимание условия интегрируемости Фубини-Чеха, и условие (I). Из (7) или (7′) выводится, что для $1 + 4\lambda = 0$, то есть, если рассматриваются точки асимптотических касательных, через которые проходит вторая грань Грина, поверхности, описанные одной из этих точек, которые обозначаем S_{x_1} или S_{x-1} проективно отображаются на поверхности S_x. В этом случае поверхности S_x являются поверхностями R_0 и определены (III) или (III′), а поверхности S_{x_1} и S_{x-1} даны (IV) или (IV′). Отмечая, что тем же свойством обладают поверхности S_{x_1} или S_{x-1} выводится, что можно ассоциировать таким образом бесконечное число поверхностей S_{x_i} или $S_{x_{-i}}$ $(i = 1, 2\ldots)$, описанных точками (3) или (3″), которые проективно отображаются на S_x. Поверхности S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$ определены (IV′) или (IV‴). Эти поверхности обладают также свойством, что точки (18″), 19′ или (19″) находятся соответственно на асимптотических касательных $(x\,x_u)$ или $(x\,x_v)$.

Если же $1 + 4\lambda \neq 0$, поверхности S_{x_1} или S_{x-1} проективно отображаются на S_x, если имеет место (20), что приводит к изучению 3 случаев.

*) p. 114—116.

В первом случае, являющимся наиболее общим, определяются поверхности S_x, проективно отображающиеся на бесконечное число поверхностей S_{x_i} или $S_{x_{-i}}$ $(i = 1, 2, ..)$ для каждого значения параметра λ, которое определяет одну из прямых канонического пучка и которые являются поверхностями R_0. Эти поверхности даны (22″), (24), (24′) и (24″) или (24‴). Переходим от поверхности S_x к поверхности S_{x_i} (24″).

Второй случай дан (23″). Поверхности S_{x_i} или $S_{x_{-i}}$ описаны точкой, находящейся на одной из асимптотических касательных, через которые проводит вторая прямая Вилкцинского. Поверхности S_x даны (V) и (V′) и с ними можно ассоциировать бесконечное множество поверхностей проективно отображающихся на S_x.

Третий случай дан (26). Находятся поверхности совпадения с $p_{ii} = \text{const}$ $(i = 1, 2)$. В этом случае поверхности S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$ проективно тождественны с S_x. Доказывается, что это есть характеристическое свойство этих поверхностей совпадения.

Доказывается также, что эти поверхности являются минимально проективными и, что обратно, если поверхность совпадения минимально проективна, поверхность совпадения имеет $p_{ii} = \text{const}$ $(i = 1, 2)$.

В последней части показывается, что результат, данный Т. Михэилеску в недавней работе [3], а именно, что поверхности Чеха, обозначенные в нашей работе (a), являются едиными поверхностями, для которых фокальные точки первой директриссы Вилкцинского сопряжены по отношению к поверхности второго порядка Ли в каждой точке этих поверхностей, содержится в заметке [4] 1938 года автора этой работы. Автор показывает также, что из первого тома Проективной дифференциальной геометрии Фубини-Чеха непосредственно вытекает существование минимальных проективных поверхностей, кроме поверхностей совпадения с $p_{ii} = \text{const.}$ $(i = 1, 2)$.

SUR CERTAINES SURFACES R_0

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, l'Auteur se propose de déterminer les surfaces S_x de sorte qu'il y ait correspondance entre les lignes asymptotiques de ces surfaces et celles des surfaces décrites par les points de l'une des tangentes asymptotiques qui déterminent les droites du deuxième faisceau canonique. On trouve que ces surfaces satisfont à (7) ou (7′) et leur existence devra être vérifiée, en tenant compte des conditions d'intégrabilité de Fubini-Cêch, ainsi que de (I). On déduit de (7) ou de (7′) que, pour $1 + 4\lambda = 0$, c'est-à-dire que si l'on considère les points, traversés par la seconde arête de Green, situés sur l'une des tangentes asymptotiques, les surfaces décrites par l'un de ces points, surfaces que l'on indique par S_{x_1} ou S_{x-1} sont projectivement applicables sur les surfaces S_x. Dans ce cas, les surfaces S_x sont des surfaces R_0 et sont déterminées par (III) ou (III′) et les surfaces S_{x_1} ou S_{x-1}, par (IV) ou (IV′). On remarque que les surfaces S_{x_1} ou S_{x-1} ont la même propriété. Il s'ensuit que l'on peut associer de cette manière une infinité de

surfaces S_{x_i} ou $S_{x_{-i}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ décrites par les points (3) ou (3″) qui sont projectivement applicables avec S_x. Les surfaces S_{x_i} et $S_{x_{-i}}$ sont déterminées par (IV′) ou (IV‴). Une autre propriété de ces surfaces est que les points (18″) (19′) ou (19″) reposent, respectivement, sur les tangentes asymptotiques (xx_u) ou (xx_v).

Mais si $1 + 4\lambda \neq 0$, les surfaces S_{x_1} ou $S_{x_{-1}}$ sont projectivement applicables sur S_x si (20) a lieu, ce qui conduit à l'étude de 3 cas différents.

Dans le premier cas, le plus général, on détermine les surfaces S_x projectivement applicables sur une infinité de surfaces S_{x_i} ou $S_{x_{-i}}$ $(i=1, 2, \ldots)$, pour chaque valeur numérique du paramètre λ, qui détermine l'une des droites du faisceau canonique et qui sont des surfaces R_0. Ces surfaces sont données par (22″), (24), (24′) et (24″) ou (24‴). On passe d'une surface S_x à une surface S_{x_i} par (24″).

Le second cas est donné par (23″). Les surfaces S_{x_i} ou $S_{x_{-i}}$ sont décrites par le point situé sur l'une des tangentes asymptotiques traversées par la seconde droite de Wylczynski. Les surfaces S_x sont données par (V) ou (V′). On peut leur associer une infinité de surfaces qui leur sont projectivement applicables.

Le troisième cas est donné par (26). On trouve les surfaces de coïncidence avec $p_{ii} = \text{const.}$ $(i = 1,2)$. Dans ce cas, les surfaces S_{x_i} et $S_{x_{-i}}$ sont projectivement identiques à S_x. On démontre que cette propriété est caractéristique de ces surfaces de coïncidence.

On démontre également que ces surfaces sont projectives au minimum et, réciproquement, que si une surface de coïncidence est *minima projective* elle est une surface de coïncidence, avec $p_{ii} = \text{const.}$ $(i = 1,2)$.

Dans la dernière partie de cette Note, on montre que le résultat, donné par T. Mihăilescu, dans un travail récent [3], à savoir: que les surfaces de Cêch, marquées dans cette Note par (a), sont les seules pour lesquelles les points foyers de la première directrice de Wylczynski sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie, attachée à tout point de cette surface, se trouve dans une Note [4] publiée en 1938, par l'Auteur de la présente. L'Auteur montre également que l'existence de certaines surfaces *minima projectives*, parallèlement à celle des surfaces de coïncidence avec $p_{ii} = \text{const.}$ $(i = 1,2)$, ressort de façon implicite du tome premier de la *Géométrie Projective Différentielle* de Fubini-Cêch.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fubini — E. Cêch, *Geometria proiettiva differenziale*. N. Zanichelli, Bologna, 1926, t. I.
2. O. Mayer, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1932, t. LVI, p. 324.
3. T. Mihăilescu, Studii şi Cercetări Matematice, v. I., 1950, p. 374.
4. F. Marcus, Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 1938, v. XXVII, p. 145.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

CLASIFICAREA SPAŢIILOR P_2

DE

ŞT. PETRESCU

Intr'o lucrare anterioară [1], am studiat spaţiile cu conexiune proiectivă P_2, cu două dimensiuni, cu torsiune însă fără curbură, din punctul de vedere al clasificării lor, prin metoda congruenţelor dată de Gh. Vrănceanu [2], în toate cazurile diferite de cel al grupului identitate ce constitue cazul general şi când se aplică teorema specială de echivalenţă a lui Cartan [2] *).

Reluând acest studiu, am considerat în lucrarea de faţă cazul general al spaţiilor P_2 cu torsiune şi curbură, dând o clasificare a lor în sensul specificat mai sus şi formele canonice respective ale conexiunii, atât în sistemul de congruenţe adoptat, cât şi în sistemul de variabile (x).

Trei cazuri distincte se prezintă în acest studiu:

a) Torsiunea afină şi proiectivă precum şi curbura diferite de zero.
b) Torsiunea afină nulă, cea proiectivă şi curbura diferite de zero.
c) Torsiunea afină şi proiectivă nulă, curbura diferită de zero.

După cum vom arăta, în ipoteza *a)*, grupul proiectiv (3) de transformări de congruenţe al spaţiului se reduce la grupul identitate, exceptând cazul în care avem condiţiile (8), (8′) sau (52′), (54), (54′) şi când grupul este de forma (9) cu două funcţii arbitrare de variabilele x^1, x^2 sau (52) cu o singură funcţie de aceleaşi variabile.

Grupurile maxime de automorfisme ale spaţiului sunt efectiv atinse şi depind de 4, respectiv 3 parametri.

In ipoteza *b)*, trebue relevat mai întâi că, la fel ca în cazul torsiunii afine şi a curburii nule, spaţiul P_2 admite efectiv un grup proiectiv (3) cu trei funcţii arbitrare şi un grup de automorfisme maxim cu 5 parametri, ceea ce nu mai are loc când torsiunea sa este nulă. De asemenea, el admite un grup cu o singură funcţie arbitrară de x^1, x^2 de forma (72) sau (73), anume când avem condiţiile (77), (78), (78′), (78″) sau (97), (97′), (97″), şi grupul său maxim de automorfisme depinde de 3 parametri.

Apoi, faptul că în primul caz, variabila x' se transformă după grupul proiectiv al dreptei, lucru ce nu se petrecea în ipoteza curburei nule, nici în situaţia corespunzătoare, nici de altfel în vreo altă situaţie.

In ipoteza *c)*, când torsiunea afină şi proiectivă a lui P_2 sunt nule, un rol esenţial îl joacă formele pătratice invariante f şi φ (prima dintre ele fiind strâmb

*) p. 132.

simetrică), coeficienţii lor dând proprietăţile primelor patru componente ale tensorului de curbură.

Dacă $f \neq 0$, grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului P_2 se reduce la grupul identitate ori este de forma (105) şi aceasta numai când φ este degenerată sau identic nulă. Grupul maxim de automorfisme al unui spaţiu P_2 cu grup (105) depinde de 3 parametri, maximul fiind atins.

Un spaţiu P_2 fără torsiune nu admite, dacă $f \neq 0$, un grup (3) depinzând de trei funcţii arbitrare şi ca atare niciun grup de automorfisme cu 5 parametri.

In cazul că $f = 0$ iar φ este nedegenerată, grupul (3) al lui P_2 este grupul ortogonal sau pseudoortogonal în ds^1, ds^2 şi atunci spaţiului i se poate ataşa o conexiune metrică invariantă. Grupul său de automorfisme poate fi cu cel mult 3 parametri. Problema poate fi deci, din punctul nostru de vedere, considerată ca rezolvată.

Când $f = 0$ şi φ este degenerată, grupurile respective de transformări de congruenţe admise de spaţiul P_2 sunt de forma (111) sau (113), ultimul depinzând de trei funcţii oarecare de x^1, x^2, iar grupurile maxime de automorfisme ale spaţiului fiind cu 3, respectiv 4 parametri, efectiv atinse.

De remarcat că, atât în cazul grupului (105) cât şi (111), variabila x^1 se transformă tot după grupul proiectiv al dreptei.

Partea introductivă a acestei lucrări conţine unele rezultate din lucrarea citată la început [1], ele fiindu-ne utile în desvoltările ulterioare. De asemenea, sunt reamintite formule mai importante relative la spaţiile cu conexiune proiectivă P_2, pentru a nu face trimiteri prea dese la cartea Prof. V r ă n c e a n u [2].

PARTEA I-a

1. Fie P_2, un spaţiu cu conexiune proiectivă, raportat la un sistem de trei congruenţe de curbe independente (λ^α), $(\alpha = 1, 2, 3)$, având arcele

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad ds^0 = dx^0 + \lambda_i^0 dx^i, \quad (a, b, \ldots, i, j, \ldots = 1, 2) \tag{1}$$

cu λ_i^α funcţii de variabilele x^1, x^2.

Componentele γ_{bc}^α ale conexiunii sale pe congruenţele (λ^α) sunt definite prin relaţiile [2] *).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} &= \gamma_{bc}^a \lambda_i^b \lambda_j^c - \lambda_i^a \lambda_j^0 - \lambda_j^a \lambda_i^0 - \Gamma_{ij}^r \lambda_r^a, \\ \frac{\partial \lambda_i^0}{\partial x^j} &= \gamma_{bc}^0 \lambda_i^b \lambda_j^c - \lambda_i^0 \lambda_j^0 - \Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{ij}^r \lambda_r^0, \end{aligned} \tag{2}$$

în care Γ_{ij}^α reprezintă componentele conexiunii lui P_2 în variabilele x^1, x^2.

Grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului fiind

$$\overline{ds}^a = c_b^a(x^1, x^2)\, ds^b, \quad \overline{ds}^0 = ds^0 + c_b^0(x^1, x^2)\, ds^b \tag{3}$$

*) p. 380.

cu $|c_b^a| \neq 0$, față de o transformare a lui avem formulele lui Vrănceanu [2] *)

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} &= \overline{\gamma}_{ef}^a c_b^e c_c^f - c_b^a c_c^0 - c_c^a c_b^0 - \gamma_{bc}^e c_e^a, \\ \frac{\partial c_b^0}{\partial s^c} &= \overline{\gamma}_{ef}^0 c_b^e c_c^f - c_b^0 c_c^0 - \gamma_{bc}^0 - \gamma_{bc}^e c_e^0, \end{aligned} \tag{4}$$

care dau legea de transformare a conexiunii γ_{bc}^α.

Notând cu w_{bc}^α coeficienții covarianților biliniari Δs^α ai formelor Pfaff ds^α, torsiunea spațiului P_2 are componentele

$$t_{bc}^\alpha = \gamma_{bc}^\alpha - \gamma_{cb}^\alpha - w_{bc}^\alpha, \quad (t_{0c}^a = t_{0c}^0 = 0) \tag{5}$$

și, deoarece $t_{bc}^\alpha = -t_{cb}^\alpha$, numai trei sunt distincte, anume

$$t_{12}^1, \quad t_{12}^2, \quad t_{12}^0.$$

2. *Torsiunea afină diferită de zero.* Dacă vectorul de torsiune afină

$$t_c = t_{ac}^a \tag{5'}$$

nu este nul, atunci, reducând componenta $\overline{t}_{12}^0$ la zero cu ajutorul lui c_2^0 și păstrând valoarea $t_{12}^0 = 0$, grupul (3) devine

$$\begin{aligned} d\overline{s}^1 &= ds^1 \\ d\overline{s}^2 &= \alpha ds^1 + \beta ds^2 \\ d\overline{s}^0 &= ds^0 + \gamma ds^1, \end{aligned} \tag{6}$$

α, β, γ fiind funcții de x^1, x^2 oarecare, iar $\beta \neq 0$.

Prin faptul că $c_1^1 = l$, $c_2^1 = c_2^0 = 0$, formulele (4) fac să apară un număr de relații în termeni finiți, în același timp cu

$$\overline{w}_{12}^1 \beta = w_{12}^1,$$

provenită din aceea că Δs^1 este un invariant, la fel ca forma ds^1.

Discutând mai întâi ipoteza $w_{12}^1 = 0$, adică aceea în care forma ds^1 este o diferențială totală exactă, se ajunge la concluzia următoare [1] **):

Grupul proiectiv de transformări de congruențe al unui spațiu P_2 fără curbură, admițând o formă Pfaff invariantă diferențială totală exactă, este grupul identitate ori de forma

$$d\overline{s}^1 = ds^1, \quad d\overline{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\overline{s}^0 = ds^0, \tag{7}$$

sau de forma

$$d\overline{s}^1 = ds^1, \quad d\overline{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\overline{s}^0 = ds^0 + \alpha ds^1, \tag{7'}$$

*) p. 381.
**) p. 535.

afară de cazul că sunt îndeplinite condiţiile

$$\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0,$$
$$\gamma^2_{21} - \gamma^2_{12} - w^2_{21} = 1, \quad w^1_{12} = 0, \quad \gamma^0_{12} = w^0_{12}, \tag{8}$$

şi când el are expresia

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + \beta ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{9}$$

cu α, β funcţii oarecare de variabilele x^1, x^2.

Dacă forma ds^1 nu este o diferenţială totală exactă ($w^1_{12} \neq 0$), avem următoarea [1] *)

Teoremă. *Un spaţiu P_2, fără curbură, ce admite o formă Pfaff invariantă nediferenţială totală exactă, poate avea ca grup de transformări de congruenţe grupul identitate, sau un grup de forma*

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 + \frac{1}{2}\alpha ds^1, \tag{10}$$

ultimul prezentându-se când

$$\gamma^1_{11} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^0_{22} = 0, \quad \gamma^1_{21} = 1, \quad \bar{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21}$$
$$\gamma^2_{21} - \gamma^2_{12} - w^2_{21} = 1, \quad w^1_{12} = 1, \quad \gamma^0_{12} - \gamma^0_{21} = w^0_{12}, \quad \frac{\partial \gamma^0_{21}}{\partial s^2} = 0, \tag{10'}$$

γ^0_{21} *fiind un invariant absolut.*

3. Căutând condiţiile necesare şi suficiente pentru ca spaţiul P_2 considerat să admită unul din grupurile semnalate mai sus, ceea ce necesită şi considerarea relaţiilor date de (4) conţinând derivatele lui α sau α, β, se arată că [1] **):

Dacă spaţiul P_2 este fără curbură, dar torsiunea sa afină este diferită de zero, atunci el admite ca grup proiectiv de transformări de congruenţe, grupul identitate, ori grupul (9), acesta din urmă fiind posibil numai dacă forma Pfaff invariantă ce se poate ataşa spaţiului, este o diferenţială totală exactă.

4. Considerând de asemenea cazul în care spaţiul P_2 are nu numai curbura, ci şi torsiunea afină nulă ($t^1_{12} = t^2_{12} = 0$) — deci şi vectorul de torsiune afină nul — ţinând seama că $t^0_{12} \neq 0$, iar faţă de o transformare de congruenţe (3) avem

$$\bar{t}^0_{12}\Delta = t^0_{12}, \quad \Delta = c^1_1 c^2_2 - c^1_2 c^2_1, \tag{11}$$

reducându-l pe $\bar{t}^0_{12}$ la unitate cu ajutorul lui Δ, se ajunge la a avea

$$t^0_{12} = 1, \quad \Delta = 1. \tag{11'}$$

Aplicând apoi normalizarea lui Thomas [2] ***)

$$\gamma^1_{11} + \gamma^2_{21} = 0, \quad \gamma^1_{12} + \gamma^2_{22} = 0 \tag{12}$$

*) p. 537.
**) p. 541.
***) p. 377.

care face ca c_1^0 și c_2^0 din (3) să fie nuli, rezultă că, grupul proiectiv de transformări de congruențe al spațiului P_2, care conservă situația de mai sus, trebue să aibă expresia

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= a\,ds^1 + b\,ds^2 \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\,ds^1 + \beta\,ds^2, \quad (a\beta - b\alpha = 1) \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 \end{aligned} \tag{13}$$

și depinde, cum se vede, de trei funcții arbitrare de x^1, x^2.

Discuția relațiilor în termeni finiți ce provin din faptul că $c_1^0 = c_2^0 = 0$, conduce la următoarea concluzie [1] *):

Grupul proiectiv de transformări de congruențe al unui spațiu P_2 având torsiunea proiectivă diferită de zero, însă torsiunea afină și curbura nule, este grupul identitate ori depinde de o singură funcție arbitrară de variabilele x^1, x^2, sub forma (7), afară de cazul în care sunt îndeplinite condițiile

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{21}^2, \quad \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2, \quad \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = 0 \\ &\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = w_{12}^1, \quad \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 = w_{12}^2, \quad w_{12}^0 = -1 \end{aligned} \tag{14}$$

când el are forma (13).

5. Să trecem acum la *cazul spațiilor P_2 cu torsiune și curbură*, punându-ne întâi problema de a vedea, care sunt grupurile de transformări de congruențe pe care le poate admite un astfel de spațiu.

Componentele tensorului de curbură pe congruențele (λ^α) sunt numai 6 distincte, anume

$$\Gamma_{112}^{*1}, \quad \Gamma_{212}^{*1}, \quad \Gamma_{112}^{*2}, \quad \Gamma_{212}^{*2}, \quad \Gamma_{112}^{*0}, \quad \Gamma_{212}^{*0} \tag{15}$$

expresiile lor fiind date de formulele [2] **),

$$\begin{aligned} \Gamma_{bcd}^{*a} &= \Gamma_{bcd}^a - \delta_c^a \Gamma_{bd}^0 + \delta_d^a \Gamma_{bc}^0 - \delta_b^a w_{cd}^0, \\ \Gamma_{bcd}^{*0} &= \frac{\partial \Gamma_{bc}^0}{\partial s^d} - \frac{\partial \Gamma_{bd}^0}{\partial s^c} + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^0 \Gamma_{bc}^e + \Gamma_{be}^0 w_{cd}^e, \end{aligned} \tag{16}$$

unde Γ_{bcd}^a sunt componentele tensorului de curbură al conexiunii afine Γ_{bc}^a

$$\Gamma_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial s^d} - \frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial s^c} + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e + \Gamma_{bc}^a w_{cd}^e. \tag{16'}$$

Punând

$$\Gamma_{ad}^* = \Gamma_{acd}^{*a}, \quad \Gamma_{cd}^* = \Gamma_{cad}^{*a},$$

se asociază spațiului nostru formele pătratice invariante [2] ***)

$$f = \Gamma_{12}^* ds^1 ds^2, \quad \varphi = \Gamma_{11}^* (ds^1)^2 + (\Gamma_{12}^* + \Gamma_{21}^*) ds^1 ds^2 + \Gamma_{22}^* (ds^2)^2, \tag{17}$$

din care prima este strâmb simetrică.

*) p. 549.
**) p. 394.
***) p. 395.

Cum se constată uşor, avem egalităţile

$$\Gamma^*_{ca} = \Gamma_{cd} - \Gamma^0_{cd} + \Gamma^0_{dc} - 2w^0_{cd}, \quad \Gamma^*_{cd} = \Gamma_{cd} - \Gamma^0_{dc} - w^0_{cd} \tag{18}$$

cu $r_{cd} = \Gamma^a_{acd}$, $\Gamma_{cd} = \Gamma^a_{cad}$ şi ca atare,

$$\Gamma^*_{12} = \Gamma^*_{12} - \Gamma^*_{21}. \tag{18'}$$

Tensorul contractat Γ^*_{cd} are patru componente

$$\Gamma^*_{11} = \Gamma^{*2}_{121}, \quad \Gamma^*_{12} = \Gamma^{*1}_{112}, \quad \Gamma^*_{21} = \Gamma^{*2}_{221}, \quad \Gamma^*_{22} = \Gamma^{*1}_{212}, \tag{19}$$

şi abstracţie făcând de semnul ultimelor două, ele dau proprietăţile primelor patru componente ale tensorului curburii proiective.

6. Pentru rezolvarea problemei propusă iniţial, este clar că toate consideraţiile făcute pentru spaţiile P_2 fără curbură, rămân valabile, până acolo unde intervin condiţiile impuse de tensorul de curbură. Aşa fiind, vor trebui deci considerate trei cazuri:

a) Torsiunea afină şi proiectivă diferită de zero, curbura diferită de zero: grupurile (7), (7'), (9) şi (10).

b) Torsiunea afină nulă, cea proiectivă şi curbura diferită de zero; [cum vom arăta, se prezintă grupurile de forma (71), (72) şi (73)].

c) Torsiunea afină şi proiectivă nule, curbura diferită de zero. Grupurile (105), (111) şi (113).

Vom începe prin a ne ocupa mai întâi de grupul (9). Condiţiile în care el intervine sunt date de (8).

Deoarece forma ds^0 este invariantă, la fel va fi şi covariantul său biliniar $\Delta s^0 = w^0_{12}\, ds^1 \delta s^2$. Prin urmare vom avea relaţia

$$\overline{w}^0_{12}\, \beta = w^0_{12}, \tag{20}$$

care determină pe β, afară dacă $w^0_{12} = 0$, deci când ds^0 este o diferenţială totală exactă. Atunci însă $\Gamma^0_{12} = 0$, iar $\dfrac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial s^2} = 0$, deoarece Γ^0_{11} devine un invariant absolut al grupului.

7. Până aici n'au intervenit decât condiţiile impuse de tensorul de torsiune. Să luăm acum în cosideraţie şi curbura spaţiului P_2, pe care o presupunem nenulă.

Relaţiile de invarianţă

$$\bar{f} = f, \quad \overline{\varphi} = \varphi$$

ne dau, prin transformările grupului (9), egalităţile

$$\overline{\Gamma}^*_{12}\, \beta = \Gamma^*_{12}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma}^*_{11} + (\overline{\Gamma}^*_{12} + \overline{\Gamma}^*_{21})\, \alpha + \overline{\Gamma}^*_{22}\, \alpha^2 = \Gamma^*_{11}, \\ &(\overline{\Gamma}^*_{12} + \Gamma^*_{21})\, \beta + 2\overline{\Gamma}^*_{22}\, \alpha\beta = \Gamma^*_{12} + \Gamma^*_{21}, \\ &\overline{\Gamma}^*_{22}\, \beta^2 = \Gamma^*_{22}. \end{aligned} \tag{21'}$$

Din (21) deducem că, dacă $\gamma_{12}^{*} \not\equiv 0$, deci dacă $f \neq 0$, cu ajutorul lui β putem să-l reducem pe $\bar{r}_{12}^{*}$ la unitate și ca atare putem aranja astfel încât

$$\gamma_{12}^{*} = 1, \quad \beta = 1.$$

Pe de altă parte, presupunând că $\gamma_{22}^{*} \neq 0$, putem face

$$\gamma_{12}^{*} + \gamma_{21}^{*} = 0$$

și această valoare nulă se menține numai dacă $\alpha = 0$, deci numai în cazul grupului identitate.

Când $\gamma_{22}^{*} = 0$, însă $\gamma_{12}^{*} + \gamma_{21}^{*} \neq 0$, prima din relațiile (21′) ne permite să facem $\gamma_{11}^{*} = 0$, $\alpha = 0$ și recădem iarăși peste grupul identitate.

Dacă și $\gamma_{12}^{*} + \gamma_{21}^{*} = 0$, γ_{11}^{*} devine un invariant absolut, iar α nu mai poate fi determinat. Dar, deoarece mai avem relațiile de transformare

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{112}^{*0}\beta + \bar{\gamma}_{212}^{*0}\alpha\beta &= \gamma_{112}^{*0}, \\ \bar{\gamma}_{212}^{*0}\beta^2 &= \gamma_{212}^{*0}, \end{aligned} \tag{22}$$

rezultă (făcând $\beta = 1$) că α poate fi totuși determinat, deci ajungem la grupul identitate, afară de cazul când $\gamma_{212}^{*0} = 0$.

Așa dar, concluzia ce se desprinde este următoarea:

In ipoteza că $f \neq 0$, grupul (9) poate fi totdeauna redus la un subgrup depinzând numai de α sau la grupul identitate.

8. Prin urmare, pentru a ne afla în cazul grupului (9) depinzând de α și β, va trebui să presupunem $f = 0$, $(r_{12}^{*} = 0)$.

Referindu-ne atunci la relațiile (21′) și ținând seama că avem

$$\gamma_{12}^{*} = \gamma_{12}^{*} - \gamma_{21}^{*} = 0,$$

se vede că, dacă $\gamma_{22}^{*} \neq 0$, reducându-l pe $\bar{\gamma}_{22}^{*}$ la unitate cu ajutorul lui β și menținând valoarea $\gamma_{22}^{*} = 1$, servindu-ne de α, putem încă face

$$\gamma_{12}^{*} = \gamma_{21}^{*} = 0$$

și ajungem astfel la grupul identitate.

Dacă $\gamma_{22}^{*} = 0$, însă $\gamma_{12}^{*} \neq 0$, din egalitatea

$$\bar{\gamma}_{12}^{*}\beta = \gamma_{12}^{*},$$

putem avea

$$\gamma_{12}^{*} = 1, \quad \beta = 1,$$

iar relația rămasă

$$\bar{\gamma}_{11}^{*} + 2\bar{\gamma}_{12}^{*}\alpha = \gamma_{11}^{*},$$

permite să facem

$$\gamma_{11}^{*} = 0, \quad \alpha = 0.$$

Deci, când $f = 0$, funcțiile α, β pot fi determinate, cu excepția cazului când $\gamma_{22}^{*} = \gamma_{12}^{*} = 0$, în care caz γ_{11}^{*} devine un invariant absolut al grupului (9).

Făcând un raționament asemănător cu privire la relațiile (22), rezultă următoarea:

Teoremă. *Grupul proiectiv de transformări de congruenţe al unui spaţiu* P_2 *cu torsiune şi curbură nenulă poate fi de forma* (9), *numai şi numai dacă, pe lângă condiţiile* (8), *mai avem în plus şi*

$$\gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*1}_{212} = \gamma^{*2}_{212} = 0, \quad \gamma^{*2}_{112} = \rho, \quad \gamma^{*0}_{112} = \gamma^{*0}_{212} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial s^2} = 0 \tag{8'}$$

ρ *fiind un invariant.*

9. Odată epuizate relaţiile în termeni finiţi, se impune considerarea celor ce conţin derivatele funcţiilor α şi β, date de formulele (4) de transformare a conexiunii γ^{α}_{bc}.

Primele din ele ne dau sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + (\overline{\gamma}^2_{12} + \overline{\gamma}^2_{21})\,\alpha + \overline{\gamma}^2_{22}\alpha^2 - \gamma^2_{11}\,\beta. \\
\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{12}\,\beta + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha\beta - \gamma^2_{12}\,\beta, \\
\frac{\partial \beta}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{21}\,\beta + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha\beta - \gamma^2_{21}\,\beta, \\
\frac{\partial \beta}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{22}\,\beta^2 - \gamma^2_{22}\,\beta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Ultimele două din aceste ecuaţii ne permit ca, luându-l pe β drept soluţie a sistemului

$$\frac{\partial \beta}{\partial s^1} = -\gamma^2_{21}\,\beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s^2} = -\gamma^2_{22}\,\beta, \tag{24}$$

să anulăm coeficienţii $\overline{\gamma}^2_{21}$ şi $\overline{\gamma}^2_{22}$. Acest lucru este posibil, deoarece condiţia de integrabilitate a lui (24), anume

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^1\,\partial s^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2\,\partial s^1} = w^1_{12}\frac{\partial \beta}{\partial s^1} + w^2_{12}\frac{\partial \beta}{\partial s^2}$$

se scrie sub forma

$$\frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial s^1} - \frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial s^2} + w^2_{12}\,\gamma^2_{22} = 0$$

şi este satisfăcută identic, în virtutea faptului că avem condiţiile (8), $\gamma^0_{21} = w^0_{12} = 0$, împreună cu

$$\gamma^{*2}_{212} = \gamma^2_{212} + \gamma^0_{21} - w^0_{12} = 0.$$

Menţinând valorile

$$\gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = 0, \tag{24'}$$

va trebui ca în grupul (9) β să fie o constantă.

Așa fiind, a doua din ecuațiile (23) ne arată că-l putem anula și pe $\overline{\gamma}_{12}^2$, alegându-l pe α ca soluție a ecuației

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = -\gamma_{12}^2 \beta.$$

Valoarea $\gamma_{12}^2 = 0$ se va păstra însă numai dacă $\dfrac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0$.

In modul acesta, sistemul (23) capătă forma simplă

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \overline{\gamma}_{11}^2 - \gamma_{21}^2 \beta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0. \tag{25}$$

Pe de altă parte, din formula

$$\gamma_{21}^2 - \gamma_{21}^2 - w_{21}^2 = 1$$

rezultă că avem $w_{12}^2 = 1$.

10. Având acum $w_{12}^1 = w_{12}^0 = 0$, $w_{12}^2 = 1$, urmează că se pot lua drept forme ds^α ($\alpha = 1, 2, 0$) în grupul (9), formele Pfaff

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = m\,dx^1 + n\,dx^2, \quad ds^0 = dx^0 \tag{26}$$

m și n fiind funcții oarecare de x^1, x^2. Schimbând însă convenabil variabila x^2, putem să presupunem $n = 1$, deci că

$$ds^2 = m\,dx^1 + dx^2. \tag{26'}$$

Covariantul biliniar $\Delta s^2 = w_{12}^2\, ds^1 \delta s^2$ are atunci valoarea

$$\Delta s^2 = \frac{\partial m}{\partial x^2}\, dx^1\, \delta x^2$$

și ca atare deducem egalitatea

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = 1; \quad m = x^2 + \varphi(x^1),$$

funcția $\varphi(x^1)$ fiind oarecare. Ea însă poate fi anulată, prin transformarea lui x^2 în $x^2 + \sigma(x^1)$, ceea ce nu alterează pe x^1 și rezultă că vom avea

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = x^2\,dx^1 + dx^2, \quad ds^0 = dx^0. \tag{27}$$

Introducând aceste expresii ale lui ds^α ($\alpha = 1, 2, 0$) și cele analoage ale lui $d\overline{s}^\alpha$

$$d\overline{s}^1 = d\overline{x}^1, \quad d\overline{s}^2 = \overline{x}^2\, d\overline{x}^1 + d\overline{x}^2, \quad d\overline{s}^0 = dx^0 \tag{27'}$$

în grupul (9), unde β trebue privit ca o constantă, obținem sistemul de ecuații liniare de primul ordin

$$\begin{gathered} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} = 1, \quad \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \overline{x}^0}{\partial x^0} = 1 \\ \overline{x}^2 + \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} = \alpha + \beta x^2, \quad \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} = \beta, \quad \frac{\partial \overline{x}^0}{\partial x^1} = \frac{\partial \overline{x}^0}{\partial x^2} = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

care ne dă transformările de variabile corespunzând grupului (9), anume

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + a \\ \bar{x}^2 &= \beta x^2 + \tau(x^1), \\ \bar{x}^0 &= x^0 \end{aligned} \tag{29}$$

$\tau(x^1)$ fiind pentru un moment nedeterminată şi în plus relaţia

$$\alpha = \tau' + \tau. \tag{30}$$

Deoarece $\frac{\partial}{\partial s^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}$, ultima ecuaţie (25) devine

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^2} = 0; \quad \alpha = \alpha(x')$$

iar prima se scrie

$$\tau'' + \tau' = \bar{\gamma}^2_{11} - \beta \gamma^2_{11}. \tag{30'}$$

Explicitând acum condiţia

$$\gamma^{*2}_{112} = \gamma^2_{112} + \gamma^0_{11} = \rho, \quad \left(\gamma^0_{11} = \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x^2} = 0\right)$$

se găseşte uşor că ea ne dă relaţia

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} = \rho - \mu; \quad \gamma^2_{11} = (\rho - \mu) x^2 + \theta(x^1). \tag{31}$$

Ecuaţia (30') devine atunci

$$\tau'' + \tau' + (\mu - \rho)\tau = \bar{\theta}(\bar{x}^1) - \theta(x^1)\beta \tag{32}$$

şi cum $\tau(x^1)$ este arbitrară, ne putem servi de ea, luând-o ca soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\tau'' + \tau' + (\mu - \rho)\tau = -\theta(x^1)\beta$$

ca să-l anulăm pe $\bar{\theta}(\bar{x}^1)$. Menţinând pe $\theta(x^1) = 0$, urmează că $\tau(x^1)$ trebue să verifice ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea

$$\tau'' + \tau' + (\mu - \rho)\tau = 0. \tag{32'}$$

Cât priveşte coeficientul γ^2_{11}, el este dat de formula

$$\gamma^2_{11} = (\rho - \mu) x^2, \tag{33}$$

μ şi ρ fiind doi invarianţi ce depind numai de variabila x^1.

Din cele spuse până aici, rezultă următoarea

T e o r e m ă. *Un spaţiu P_2 cu torsiune şi curbură şi grup proiectiv de transformări de congruenţe* (9) — ds^1, ds^0 *diferenţiale totale exacte — poate fi adus să aibă componentele conexiunii pe congruenţele* (λ^α), $(\alpha = 0, i, 2)$ *de forma*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = 0, \\ &\gamma^2_{11} = (\rho - \mu) x^2, \quad \gamma^0_{11} = \mu, \quad \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

în care ρ şi μ sunt invarianţi funcţii de x^1.

Forma canonică (34) *a conexiunii unui astfel de spațiu este păstrată, pentru* ρ *și* μ *constanți, de transformările de variabile*

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + a \\ \bar{x}^2 &= \beta x^2 + b\tau_1 + c\tau_2 \\ (\bar{x}^0 &= x^0), \end{aligned} \tag{35}$$

β, *a, b, c fiind constante arbitrare, iar* τ_1, τ_2, *două soluții liniar independente ale ecuației diferențiale* (32′).

O consecință imediată este că:

Grupul de automorfisme al unui spațiu P_2 *cu conexiune* (34), *depinde de* 4 *parametri și aceasta numai dacă invarianții* μ *și* ρ *sunt constanți.*

11. Prin faptul că avem egalitățile

$$\lambda_1^1 = 1, \quad \lambda_2^1 = 0, \quad \lambda_1^2 = x^2, \quad \lambda_2^2 = 1, \quad \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0,$$

deducem ușor pentru componentele conexiunii spațiului P_2, în sistemul de variabile (x), valorile

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = 0, \\ &\Gamma_{11}^2 = (\mu - \rho)\, x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = 1, \; \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \; \Gamma_{11}^0 = \mu \end{aligned} \tag{34′}$$

μ și ρ fiind invarianții semnalați mai sus.

Pe de altă parte, *conexiunea lui Veblen*, ce se poate ataşa spațiului P_2 în acest caz, are componentele (34) și în plus

$$\gamma_{0\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta 0}^{\alpha} = -\,\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 0,\ 1,\ 2). \tag{36}$$

Dacă invarianții μ și ρ sunt egali, atunci, integrând ecuația (32′), obținem rezultatul:

Un spațiu P_2 *cu torsiune și curbură, a cărui conexiune a lui Veblen ataşată are componentele*

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}^0 = k, \; \gamma_{bc}^a = 0, \quad \gamma_{0\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta 0}^{\alpha} = -\,\delta_{\beta}^{\alpha}, \; \gamma_{12}^0 = \gamma_{21}^0 = \\ &= \gamma_{22}^0 = 0 \quad (\alpha, \beta = 0,\ 1, 2;\ a, b, c = 1, 2) \end{aligned} \tag{37}$$

k fiind un invariant constant, admite grupul de automorfisme

$$x'^1 = x^1 + a, \quad x'^2 = \beta x^2 + \gamma e^{x^1} + \delta \tag{37′}$$

cu a, β, γ, δ *constante oarecare.*

12. Odată clarificat cazul grupului (9), să ne ocupăm acum de grupul

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1 \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + \alpha\, ds^1, \end{aligned} \tag{38}$$

Condiţiile pentru conexiunea spaţiului P_2, în care el poate admite un astfel de grup, sunt

$$\gamma^1_{11} = \gamma^1_{22} = 0, \quad \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^0_{22} = 1, \quad \bar{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21},$$

$$\gamma^2_{21} - \gamma^2_{12} - w^2_{21} = 1, \quad \gamma^0_{12} - \gamma^0_{21} = w^0_{12}, \quad w^1_{12} = 0, \quad \frac{\partial \gamma^0_{21}}{\partial s^2} = 0. \tag{38'}$$

Prin faptul însă că $c^2_2 = 1$, relaţia în termeni finiţi ce se găseşte, anume

$$\bar{\gamma}^2_{21} + (\gamma^2_{22} - 2)\alpha = \gamma^2_{21},$$

poate determina pe α afară de cazul când

$$\gamma^2_{22} = 2, \quad \bar{\gamma}^2_{21} = \gamma^2_{21}, \quad \left(\frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial s^2} = 0\right). \tag{39}$$

Pe de altă parte, din legea de transformare a componentelor curburii lui P_2, faţă de grupul proiectiv (3) [2] *) avem

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}^{*a}_{efg}\, c^e_b\, c^f_e\, c^g_d + \bar{t}^a_{fg}\, c^0_b\, c^f_c\, c^g_d = \gamma^{*e}_{bcd}\, c^a_e, \\ &\bar{\gamma}^{*0}_{efg}\, c^e_b\, c^f_c\, c^g_d + \bar{t}^0_{fg}\, c^0_b\, c^f_c\, c^g_d = \gamma^{*0}_{bcd} + c^0_e\, \gamma^{*e}_{bcd} \quad (a, b, \ldots = 1, 2) \end{aligned} \tag{40}$$

deducem, ţinând seama că $t^0_{12} = 0$, relaţiile în termeni finiţi

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{*0}_{112} + \bar{\gamma}^{*0}_{212}\,\alpha &= \gamma^{*0}_{112} + \gamma^{*1}_{112}\,\alpha, \\ \bar{\gamma}^{*0}_{212} &= \gamma^{*0}_{212} + \gamma^{*1}_{212}\,\alpha, \end{aligned} \tag{40'}$$

care ne arată că, dacă $\gamma^{*1}_{212} \neq 0$, putem avea

$$\gamma^{*0}_{212} = 0, \quad \alpha = 0$$

şi grupul (38) devine grupul identitate.

Ca atare, pentru a nu ne reduce la acest caz, va trebui să presupunem $\gamma^{*1}_{112} = 0$ şi atunci rezultă că

$$\gamma^{*0}_{212} = \gamma^{*1}_{112} = \nu, \quad \gamma^{*0}_{112} = \varkappa, \tag{41}$$

ν şi $\varkappa$ fiind invarianţi absoluţi, deci $\dfrac{\partial(\nu, \varkappa)}{\partial s^2} = 0.$

De asemenea, din relaţiile de invarianţă

$$\bar{f} = f, \ \bar{\varphi} \equiv \varphi,$$

obţinem prin grupul (38), relaţii în termeni finiţi care constitue legături pentru α, afară dacă avem

$$\gamma^{*2}_{112} = \chi, \quad \gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*2}_{212} = \rho, \quad \frac{\partial(\varkappa, \rho)}{\partial s^2} = 0. \tag{41'}$$

*) p. 395.

Cum se vede imediat, avem în plus $\nu = \rho$.

Astfel fiind, ecuațiile (4) ne conduc de astădată la sistemul de ecuații în α ca necunoscută

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \bar{\Gamma}^{\sigma}_{11} + (\bar{\Gamma}^{\sigma}_{12} + \bar{\Gamma}^{\sigma}_{21})\,\alpha - \Gamma^{\sigma}_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \bar{\Gamma}^{\sigma}_{12} - \Gamma^{\sigma}_{12}, \qquad (\sigma = 0, 2). \end{aligned} \tag{42}$$

Din relațiile ce se obțin, egalând valorile lui $\frac{\partial \alpha}{\partial s^1}$ și $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2}$, urmează că, pentru a nu-l putea determina pe α, trebue ca

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}^{2}_{1b} - \Gamma^{0}_{1b} = \Gamma^{2}_{1b} - \Gamma^{0}_{1b}, \qquad (b = 1, 2) \\ &\bar{\Gamma}^{2}_{12} + \bar{\Gamma}^{2}_{21} = \Gamma^{0}_{12} + \Gamma^{0}_{21}. \end{aligned} \tag{43}$$

Calculând însă ultimele două condiții (41′) care se scriu

$$\Gamma^{1}_{112} - \Gamma^{0}_{12} - w^{0}_{12} = \Gamma^{2}_{212} + \Gamma^{0}_{21} - w^{0}_{12} = \rho,$$

găsim egalitatea

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{0}_{12} + \Gamma^{0}_{21} + w^{2}_{12} \tag{43′}$$

care împreună cu a doua din (43), ne conduce la valoarea

$$\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{21} - w^{2}_{12} = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că $\Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{21} = w^{2}_{12} = 1$. (44)

In concluzie, avem următorul rezultat:

Grupul (38) *este incompatibil cu un spațiu* P_2 *cu torsiunea afină și curbura proiectivă nenulă.*

13. Un alt caz, în care grupul proiectiv de transformări de congruențe al spațiului P_2 depinde de o singură funcție de variabilele x^1, x^2, este acela ce corespunde condițiilor

$$\begin{aligned} &\Gamma^{1}_{11} = \Gamma^{1}_{21} = \Gamma^{1}_{22} = 0, \quad \Gamma^{1}_{12} = 1, \quad \Gamma^{0}_{22} = 0, \\ &\Gamma^{2}_{21} - \Gamma^{2}_{12} - w^{2}_{21} = 1, \quad \Gamma^{0}_{12} - \Gamma^{0}_{21} = w^{0}_{12}, \quad w^{1}_{12} = 1, \frac{\partial \Gamma^{0}_{21}}{\partial s^2} = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

și când el are expresia

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + \frac{1}{2}\alpha\, ds^1. \end{aligned} \tag{45′}$$

Relația în termeni finiți ce rezultă din $c^2_2 = 1$ fiind

$$\bar{\Gamma}^{2}_{21} + \left(\Gamma^{2}_{22} - \frac{1}{2}\right)\alpha = \Gamma^{2}_{21}$$

se vede că, pentru ca α să nu se determine, trebue ca

$$\gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\gamma}_{21}^{2} = \gamma_{21}^{2}, \quad \frac{\partial \gamma_{21}^{2}}{\partial s^{2}} = 0. \tag{46}$$

In ce priveşte α, formulele (4) de transformare a conexiunii ne dau sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^{1}} &= \overline{\gamma}_{11}^{2} + (\overline{\gamma}_{12}^{2} + \overline{\gamma}_{21}^{2})\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^{2} - \gamma_{11}^{2}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^{2}} &= \overline{\gamma}_{12}^{2} - \alpha - \gamma_{12}^{2}, \end{aligned} \tag{47}$$

împreună cu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^{1}} &= 2\overline{\gamma}_{11}^{0} + 2(\overline{\gamma}_{12}^{0} + \overline{\gamma}_{21}^{0})\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^{2} - 2\gamma_{11}^{0}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^{2}} &= 2\overline{\gamma}_{12}^{0} - \alpha - 2\gamma_{12}^{0}, \end{aligned} \tag{47'}$$

de unde deducem că trebue să avem

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma}_{1\sigma}^{2} - 2\overline{\gamma}_{1\sigma}^{0} = \gamma_{1\sigma}^{2} - 2\gamma_{1\sigma}^{0}, \quad (\sigma = 0,1) \\ &\gamma_{12}^{2} + \gamma_{21}^{2} = 2(\gamma_{12}^{0} + \gamma_{21}^{0}). \end{aligned} \tag{48}$$

Dar, deoarece $c_2^0 = 0$, mai avem în plus invariantul absolut

$$\overline{w}_{12}^{2} - 2\overline{w}_{12}^{0} = w_{12}^{2} - 2w_{12}^{0}.$$

Observând apoi că γ_{21}^{0} şi γ_{21}^{2} sunt şi ei invarianţi, notându-i respectiv cu λ, μ, se găseşte uşor că

$$\begin{aligned} &\gamma_{12}^{0} = w_{12}^{0} + \lambda, \quad \gamma_{12}^{2} = 4\lambda - \mu + 2w_{21}^{0}, \\ &w_{12}^{2} = 4\lambda - 2\mu + 2w_{12}^{0} + 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Considerând încă relaţiile în termeni finiţi date de legea de transformare a curburii, anume

$$\overline{\gamma}_{e12}^{*0}\, c_b^e = \gamma_{b12}^{*0} + c_1^0\, \gamma_{b12}^{*1} \tag{50}$$

ca şi acelea provenite din egalităţile $\bar{f} = f$, $\overline{\varphi} \equiv \varphi$, când facem o transformare (45'), se mai obţin următoarele condiţii suplimentare de conservare a lui α în grupul (45'),

$$\begin{aligned} &\gamma_{212}^{*1} = 0, \quad \gamma_{212}^{*0} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{112}^{*1} = \nu, \quad \gamma_{112}^{*0} = \varkappa \\ &\gamma_{112}^{*2} = \varkappa, \quad \gamma_{112}^{*1} = \gamma_{212}^{*2} = \rho, \quad \frac{\partial(\nu, \varkappa, \chi, \rho)}{\partial s^{2}} = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

şi, după cum se vede, $\rho = 2\nu$.

Calculând apoi pe $\gamma^{*0}_{212} = \frac{1}{2}\rho$ și ulimele două din (51), găsim relațiile

$$3\gamma^0_{12} = \rho, \quad w^2_{12} = \gamma^0_{12} + w^0_{12} + \rho,$$

$$\gamma^2_{21} + \frac{1}{2} w^2_{12} = w^0_{12} - \gamma^0_{21} + \rho,$$

din care deducem

$$\rho = 3\lambda, \quad \nu = \frac{3}{2}\lambda, \quad \mu = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, egalând a doua și a treia din ele, mai găsim însă și valoarea $\mu = \frac{1}{4}$, ceea ce este imposibil.

Prin urmare rezultă că:

Un spațiu P_2 cu torsiunea afină și curbura proiectivă nenule, nu poate admite un grup de transformări de congruențe de forma (45′).

Observație. Această teoremă, ca și aceea din paragraful precedent, pun în evidență o proprietate comună spațiilor P_2 cu torsiunea afină diferită de zero, fie că au curbura proiectivă nulă sau nu [1] *).

14. Rămâne să ne ocupăm încă, de spațiile P_2 cu torsiunea afină și curbura diferite de zero, pentru care grupul proiectiv de transformări de congruențe este de forma

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1 \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0. \end{aligned} \tag{52}$$

Această situație se prezintă, după cum am arătat anterior, când

$$\begin{gathered} \gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^0_{22} = 0, \quad \gamma^0_{21} = 1, \quad \bar{\gamma}^2_{22} = \gamma^2_{22} \\ \gamma^2_{12} - \gamma^2_{21} - w^2_{12} = 1, \quad \gamma^0_{12} = w^0_{12} + 1, \quad w^1_{12} = 0, \quad \frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial s^2} = 0. \end{gathered} \tag{52′}$$

In primul rând, faptul că $c^0_b = 0$, conduce la egalitățile

$$\bar{\gamma}^{*0}_{e12}\, c^e_b = \gamma^{*0}_{b12} \qquad (b, e = 1, 2), \tag{53}$$

date de formulele de transformare ale componentelor curburii. Explicit ele se scriu

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{*0}_{112} + \bar{\gamma}^{*0}_{212}\,\alpha &= \gamma^{*0}_{112}, \\ \bar{\gamma}^{*0}_{212} &= \gamma^{*0}_{212} \end{aligned} \tag{53′}$$

și, după cum se vede, pentru a nu putea determina funcția α, este necesar și suficient ca

$$\gamma^{*0}_{212} = 0, \quad \bar{\gamma}^{*0}_{112} = \gamma^{*0}_{112}\,(= \varkappa) \tag{54}$$

$\varkappa$ fiind un invariant absolut, deci $\frac{\partial \varkappa}{\partial s^2} = 0$.

*) p. 546.

Celelalte condiţii de conservare a lui α, provenite din relaţiile invariante $\bar{f} = f$ şi $\bar{\varphi} = \varphi$ faţă de grupul (52), sunt

$$\gamma^{*1}_{212} = 0, \quad \gamma^{*2}_{112} = \nu, \quad \gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*2}_{212} = \rho. \tag{54'}$$

Dar, $c^0_1 = 0$ ne mai dă încă o relaţie în termeni finiţi, anume

$$\bar{\gamma}^0_{11} + (\gamma^0_{12} + 1)\alpha = \gamma^0_{11}$$

şi ea poate constitui o legătură pentru α, cu excepţia cazului când $\gamma^0_{12} = -1$, deci $w^0_{12} = -2$, iar γ^0_{11} devine un invariant λ, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial s^2} = 0$.

In acelaşi timp, egalitatea $c^2_2 = \beta = 1$ ne dă de asemenea o legătură pentru α,

$$\bar{\gamma}^2_{21} + \bar{\gamma}^2_{22}\alpha = \gamma^2_{21}$$

şi deci noi condiţii de conservare a acestei funcţii, adică

$$\gamma^2_{22} = 0, \quad \bar{\gamma}^2_{21} = \gamma^2_{21}\left(= \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial s^2} = 0\right). \tag{55}$$

Observând că mai avem $t^2_{21} = 1$, deducem invariantul absolut

$$\bar{\gamma}^2_{12} - \bar{w}^2_{12} = \gamma^2_{12} - w^2_{12}$$

ceea ce de altfel se vede şi din ultimile două ecuaţii ale sistemului în α,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \gamma^2_{11} + (\bar{\gamma}^2_{12} + \mu)\alpha - \gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \bar{\gamma}^2_{12} - \gamma^2_{12} = \bar{w}^2_{12} - w^2_{12}. \end{aligned} \tag{56}$$

15. Presupunând că am anulat pe $\bar{\gamma}^2_{12}$, ceea ce este posibil, luându-l pe α ca soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = -\gamma^2_{12}, \tag{56'}$$

şi menţinând acest coeficient nul şi mai departe, rezultă că putem aranja aşa fel încât să avem

$$\gamma^2_{12} = 0, \quad \gamma^2_{21} = w^2_{21} + 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0 \tag{57}$$

şi atunci, funcţia α trebue să verifice sistemul liniar de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \bar{\gamma}^2_{11} + \mu\alpha - \gamma^2_{11}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0. \tag{58}$$

Condiţia lui de integrabilitate scriindu-se $\dfrac{\partial \bar{\gamma}^2_{11}}{\partial \bar{s}^2} = \dfrac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2}$, ea este identic verificată în virtutea lui $\gamma^{*2}_{112} = \nu$.

Revenind la egalitățile $\gamma^{*0}_{212} = \gamma^{*1}_{212} = 0$, ele sunt satisfăcute identic, în timp ce din $\gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*2}_{212} = \rho$ deducem imediat $\rho = 3$. Tot așa, din $\gamma^{*0}_{112} = \varkappa$, găsim

$$w^2_{12} = \varkappa, \quad \text{deci} \quad \gamma^2_{21} = 1 + \varkappa = \mu. \tag{59}$$

16. Deoarece $w^1_{12} = 0$, formele ds^1, ds^2 pot fi luate (printr'un raționament indicat anterior), ca având expresiile

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = m(x^1, x^2)\, dx^1 + dx^2. \tag{60}$$

Considerând covariantul biliniar Δs^2, obținem relația

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = 1 - \mu; \quad m = (1 - \mu)\, x^2 + \varphi(x^1), \tag{61}$$

funcția $\varphi(x^1)$ fiind arbitrară.

Transformând însă pe x^2 în $x^2 + \sigma(x^1)$, ne putem servi de σ ca să-l anulăm pe φ și ca atare să avem

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = (1 - \mu)\, x^2\, dx^1 + dx^2. \tag{62}$$

In ceea ce privește forma ds^0, dat fiind că $w^0_{12} = -2$, iar

$$\Delta s^0 + \frac{2}{\varkappa} \Delta s^1 = 0,$$

se găsește ușor că ea are expresia

$$ds^0 = dx^0 - 2x^2\, dx^1. \tag{62'}$$

Odată determinate formele ds^α ($\alpha = 0,1,2$), ținând seama că formele $d\bar{s}^\alpha$ au expresii analoage întru totul cu ele, deducem — introducându-le în grupul (52) — transformările de variabile corespunzătoare acestui grup, anume

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + c, \\ \bar{x}^2 &= x^2 + \tau(x^1), \\ \bar{x}^0 &= x^0 + \theta(x^1), \end{aligned} \tag{63}$$

unde avem $\theta'(x^1) = 2\tau(x^1)$, c o constantă arbitrară, iar funcția τ legată de α prin relația

$$\alpha = \tau' + (1 - \mu)\, \tau. \tag{64}$$

Pe de altă parte, din $\dfrac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} = \nu$, scoatem, în virtutea lui (62), valoarea

$$\gamma^2_{11} = \nu x^2 + n(x^1) \tag{65}$$

$n(x^1)$ fiind o arbitrară.

Introducând (64) și (65) în prima ecuație (58), care se scrie [observînd că $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x^2} = 0$, deci $\alpha = \alpha(x^1)$] sub forma

$$\alpha' = \nu \bar{x}^2 + \bar{n}(x^1) + \mu\alpha - \nu x^2 - n(x^1) \tag{58'}$$

obţinem pentru τ şi n ecuaţia diferenţială liniară în τ

$$\tau'' + (1 - 2\mu)\tau' - (\mu' - \mu^2 + \mu + \nu)\,\tau = \bar{n}(\bar{x}^1) - n(x^1), \tag{66}$$

care ne permite să-l anulăm pe n servindu-ne de τ, şi atunci, urmează că funcţia $\tau(x^1)$ trebue să fie o soluţie a ecuaţiei de ordinul doi,

$$\tau'' + (1 - 2\mu)\,\tau' - (\mu' - \mu^2 + \mu + \nu)\,\tau = 0. \tag{67}$$

Cu aceasta se poate enunţa următorul rezultat:

Conexiunea unui spaţiu P_2 cu torsiune şi curbură, admiţând un grup proiectiv de transformări de congruenţe de forma (52) *cu ds^1 diferenţială totală exactă, poate fi redusă să aibă pe congruenţele (λ^α), forma canonică*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^0_{22} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{22} = 0, \\ &\gamma^0_{11} = \lambda,\ \gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = -1,\ \gamma^2_{11} = \nu x^2,\ \gamma^2_{21} = \mu, \end{aligned} \tag{68}$$

λ, μ, ν fiind invarianţi depinzând de variabila x^1.

Transformările de variabile care păstrează forma canonică (68), *cu λ, μ, ν constanţi, sunt date de formulele*

$$\bar{x}^1 = x^1 + c_1,\quad \bar{x}^2 = x^2 + c_2\,\tau_2 + c_3\,\tau_3,\quad [\bar{x}^0 = x^0 + \theta(x^1)] \tag{68'}$$

în care τ_2 şi τ_3 sunt două soluţii distincte ale ecuaţiei diferenţiale (67), *c_i $(i = 1,2,3)$ constante arbitrare, iar $\theta' = 2\tau$.*

Deci, *grupul de automorfisme al unui spaţiu P_2, cu conexiune* (68), *depinde, dacă invarianţii λ, μ, ν sunt constanţi, de 3 parametri, altfel el depinde de 2 parametri.*

17. In sistemul de variabile (x), componentele conexiunii $\Gamma^i_{jk}(x)$ ale spaţiului nostru se calculează cu uşurinţă, observând că

$$\begin{aligned} &\lambda^1_1 = 1,\quad \lambda^1_2 = 0,\quad \lambda^2_1 = (1 - \mu)\,x^2,\quad \lambda^2_2 = 1 \\ &\lambda^0_1 = -2x^2,\quad \lambda^0_2 = 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Găsim astfel valorile

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 4x^2,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = 0,\quad \Gamma^2_{11} = (\mu' + \nu)\,x^2, \\ &\Gamma^2_{12} = \mu + 2x^2 - 1,\quad \Gamma^2_{21} = \mu + 2x^2,\quad \Gamma^2_{22} = 0,\quad \Gamma^0_{11} = \lambda - 12\,(x^2)^2, \\ &\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = 1,\quad \Gamma^0_{22} = 0, \end{aligned} \tag{70}$$

μ' fiind derivata lui μ în raport cu x^1.

Asociind rezultatele obţinute până aici, *putem clasifica spaţiile P_2 cu torsiunea afină şi curbura proiectivă nenule, în trei categorii:*

1° *Spaţii P_2 cu grup proiectiv de transformări de congruenţe* (9) *şi grup de automorfisme cu 4 parametri; ele se caracterizează prin aceia că admit pe ds^1, ds^0 ca forme invariante diferenţiale totale exacte şi prin forma canonică* (34') *cu invarianţii μ şi ρ constanţi.*

2° *Spaţii P_2 admiţând grupul de transformări de congruenţe* (52) *cu grup de automorfisme depinzând de 3 parametri; acestea admit forma ds^1 ca diferenţială totală exactă şi sunt caracterizate prin forma canonică* (70), *în care invarianţii λ, μ, ν sunt constanţi.*

3° *Spaţii P_2 având grupul de transformări de congruenţe $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 1,2,0)$; ele pot să aibă, dacă coeficienţii w^α_{bc}, γ^α_{bc} sunt constanţi, un grup maxim de automorfisme cu 2 parametri.*

PARTEA a II-a

18. *Torsiunea afină nulă.* Să vedem acum ce consecințe decurg atunci când presupunem că torsiunea afină a spațiului P_2 este nulă, însă nu și torsiunea sa proiectivă sau curbura.

In primul rând, vectorul de torsiune afină fiind și el nul, nu mai este posibilă atașarea unei forme Pfaff invariante. Făcând însă raționamentul dela § 4, grupul (3) de transformări de congruențe al spațiului capătă forma

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= a ds^1 + b ds^2, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha ds^1 + \beta ds^2 \qquad (\Delta = a\beta - b\alpha = 1), \\ d\bar{s}^0 &= ds^0. \end{aligned} \tag{71}$$

Discuția relațiilor în termeni finiți date de $c_1^0 = c_2^0 = 0$, anume

$$\bar{\gamma}_{ef}^0 c_b^e c_c^f = \gamma_{bc}^0 \qquad (b, c, e, f = 1, 2),$$

ne arată că grupul (71) poate fi redus la un subgrup de forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \; d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \; d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{72}$$

sau

$$d\bar{s}^1 = a ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \frac{1}{a} ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0, \tag{73}$$

afară de cazul când sunt îndeplinite condițiile (14), [1] *).

Ne vom ocupa mai întâi de grupul (71), care depinde de trei funcții arbitrare de variabilele x^1, x^2.

Ținând seama de (14), se vede imediat că forma invariantă f nu poate fi nulă în acest caz, deoarece

$$f = \gamma_{12}^* ds^1 \delta s^2$$

și $r_{12}^* = -2w_{12}^0 = 2$. In plus, $\gamma_{112}^{*0} = \gamma_{212}^{*0} = 0$.

Astfel fiind, prin grupul (71), în care punem ca de obicei $c_1^1 = a$, $c_2^1 = b$, $c_1^2 = \alpha$, $c_2^2 = \beta$, obținem, din $\bar{\varphi} \equiv \varphi$, relațiile

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}_{11}^* a^2 + (\bar{\gamma}_{12}^* + \bar{\gamma}_{21}^*) a\alpha + \bar{\gamma}_{22}^* \alpha^2 = \gamma_{11}^*, \\ &\bar{\gamma}_{11}^* b^2 + (\bar{\gamma}_{12}^* + \bar{\gamma}_{21}^*) b\beta + \bar{\gamma}_{22}^* \beta^2 = \gamma_{22}^*, \\ &2\bar{\gamma}_{11}^* ab + (\bar{\gamma}_{12}^* + \bar{\gamma}_{21}^*)(a\beta + b\alpha) + 2\bar{\gamma}_{22}^* \alpha\beta = \gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*. \end{aligned} \tag{74}$$

Presupunând că φ *nu este degenerată*, ne putem aranja astfel încât să avem

$$\gamma_{11}^* = \gamma_{22}^* = \varepsilon \qquad (= \pm 1),$$

deoarece aceasta revine la a lua pentru a, b, α, β funcțiile

$$\begin{aligned} &a^2 + \alpha^2 = \gamma_{11}^*, \quad b^2 + \beta^2 = \gamma_{22}^*, \\ &a\beta + b\alpha = 0, \quad a\beta - b\alpha = 1. \end{aligned}$$

*) p. 549.

Atunci însă, grupul (71), care conservă şi forma canonică

$$\varphi = \pm (ds^1)^2 \pm (ds^2)^2 \tag{74'}$$

este grupul identitate.

Dacă $\gamma^*_{11} \neq 0$, însă $\gamma^*_{22} = 0$, relaţiile (74) ne arată că putem avea

$$\gamma^*_{11} = \varepsilon\,(= \pm 1),\ \gamma^*_{12} + \gamma^*_{21} = 0$$

adică putem să scriem pe φ sub forma

$$\varphi = \varepsilon\,(ds^1)^2. \tag{74''}$$

Grupul (71), care păstrează pe φ, este atunci grupul (72) şi ca atare depinde numai de α ca funcţie arbitrară.

In sfârşit, dacă $\varphi \equiv 0$, relaţiile (74) ne mai constituind legături pentru funcţiile a, b, α, β, grupul (71) nu se mai reduce la un subgrup al său. Rezultă astfel că:

Grupul proiectiv de transformări de congruenţe al unui spaţiu P_2 fără torsiune afină, dar având curbura nenulă, este grupul identitate, ori depinde de o singură funcţie arbitrară de x^1, x^2, afară de cazul când, pe lângă condiţiile (14) *mai avem şi*

$$\gamma^*_{11} = \gamma^*_{22} = 0\,,\quad \gamma^*_{12} = -\gamma^*_{21} = \rho,\quad \gamma^{*0}_{112} = \gamma^{*0}_{212} = 0, \tag{75}$$

ρ *fiind un invariant constant şi când el este de forma* (71).

Este clar că un spaţiu P_2 cu grup (71) poate să admită un grup de automorfisme cu cel mult 5 parametri. *Acest maxim este efectiv atins*, cum se vede din exemplul

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = 0,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -x^1,\quad \Gamma^1_{22} = 1,\quad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\\ \Gamma^2_{22} = -2x^1,\quad \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = 0,\quad \Gamma^0_{21} = -1,\quad \Gamma^0_{22} = (x^1)^2.\end{gathered} \tag{76}$$

Intr'adevăr, spaţiul (76) satisface toate condiţiile impuse de conexiune şi curbură şi admite grupul de automorfisme

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= \mu x^1 + (\lambda\mu_{-1})\,x^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 (x^1)^2 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu)(x^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha\lambda (x^2)^3 + \\ &+ \frac{1}{8}\alpha^2 (x^2)^4 + \alpha\lambda x^1 x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^1 (x^2)^2 + \nu,\end{aligned} \tag{76'}$$

$$\bar{x}^2 = \alpha x^1 - \frac{1}{2}\alpha^2 (x^2)^2 + \lambda x^2 + \rho,$$

depinzând de constantele arbitrare α, λ, μ, ν, ρ.

19. Trecând la grupul (72), avem, în primul rând, condiţiile pentru conexiune [1] *)

$$\begin{gathered}\gamma^1_{12} = -\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{22} = \lambda,\quad \gamma^0_{11} = 1,\quad \gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = \mu,\quad \gamma^0_{22} = 0\\ -\gamma^1_{11} = \gamma^2_{21} = \nu,\quad \gamma^1_{22} = 0,\quad \gamma^2_{12} = w^2_{12} + \nu,\quad \frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial s^2} = 0\end{gathered} \tag{77}$$

λ, μ, ν fiind invarianţi absoluţi.

*) p. 550.

Făcând în (74) $a = \beta = 1$, $b = 0$, se observă că α poate fi determinat, exceptând cazul când

$$\overline{\gamma}^{*}_{11} = \gamma^{*}_{11}, \quad \gamma^{*}_{22} = 0, \quad \gamma^{*}_{12} + \gamma^{*}_{21} = 0,$$

deci când avem

$$\gamma^{*1}_{212} = 0, \quad \gamma^{*1}_{112} + \gamma^{*2}_{221} = 0, \quad \gamma^{*2}_{112} = \sigma \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s^2} = 0\right). \tag{78}$$

Cum însă

$$\overline{\gamma}^{*}_{12} - \overline{\gamma}^{*}_{21} = \gamma^{*}_{12} - \gamma^{*}_{21},$$

punând $\gamma^{*1}_{112} + \gamma^{*2}_{212} = 2\rho$, rezultă că

$$\gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*2}_{212} = \rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial s^2} = 0 \tag{78'}$$

De asemenea, deoarece $c^0_1 = c^0_2 = 0$, avem încă relațiile

$$\overline{\gamma}^{*0}_{112} + \overline{\gamma}^{*0}_{212}\alpha = \gamma^{*0}_{112}, \quad \overline{\gamma}^{*0}_{212} = \gamma^{*0}_{212}$$

și deci noi condiții de conservare a lui α,

$$\gamma^{*0}_{112} = \tau, \quad \gamma^{*0}_{212} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial s^2} = 0. \tag{78''}$$

Prin urmare, *grupul* (72) *nu se reduce la grupul identitate, dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile* (77), (78), (78') și (78'').

20. Cu aceasta, sistemul de ecuații cu derivate parțiale pe care trebue să-l verifice funcția α din grupul (72), este

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + (\overline{\gamma}^2_{12} + 2\nu)\alpha - \lambda\alpha^2 - \gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{12} - 2\lambda\alpha - \gamma^2_{12} \end{aligned} \tag{79}$$

și în plus mai avem ecuația

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \overline{w}^2_{12} - 2\lambda\alpha - w^2_{12}. \tag{79'}$$

Or, presupunând că luăm pe α ca soluție a ecuației

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = -2\lambda\alpha - \gamma^2_{12},$$

coeficientul $\overline{\gamma}^2_{12}$ devine nul și atunci, grupul (72), care păstrează valoarea $\gamma^2_{12} = 0$, deci și pe $w^2_{12} = -\nu$, va trebui să aibă pe α satisfăcând sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + 2\nu\alpha - \lambda\alpha^2 - \gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= -2\lambda\alpha. \end{aligned} \tag{80}$$

Condiţia lui de integrabilitate constitue o relaţie în termeni finiţi capabilă să determine funcţia α, afară de cazul în care avem condiţiile

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} = -3\lambda\nu,$$
$$\frac{\partial \overline{\gamma}^2_{11}}{\partial \overline{s}^2} + 4\lambda\overline{\gamma}^2_{11} = \frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} + 4\lambda\gamma^2_{11}. \tag{80'}$$

Ţinând seama de relaţia $\gamma^{*2}_{112} = \sigma$, a doua din ele este verificată, deoarece găsim că $\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} + 4\lambda\gamma^2_{11} = \sigma - 1$.

Calculând şi componentele de curbură

$$\gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*2}_{212} = \rho$$

obţinem egalităţile

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\nu + 3\mu - 1 = -\rho,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\nu - 3\mu + 1 = \rho.$$

Din ele deducem, adunându-le, prima ecuaţie din (80') şi apoi

$$3\mu + \rho = 1 \tag{81}$$

iar din $\gamma^{*0}_{112} = \tau$ găsim că

$$-\frac{\partial \mu}{\partial s^1} + 3\lambda = \tau. \tag{81'}$$

Astfel fiind, pot fi luate drept forme ds^1, ds^2 în grupul (73), expresiile

$$ds^1 = m\,(x^1, x^2)\,dx^1,\ ds^2 = p\,(x^1, x^2)\,dx^1 + q\,(x^1, x^2)\,dx^2 \tag{82}$$

m, p, q fiind deocamdată funcţii oarecare de x^1, x^2 iar $m\,q \neq 0$.

Covariantul biliniar al lui ds^1 ne dă

$$\Delta s^1 = \frac{\partial m}{\partial x^2}\,dx^1\,\delta x^2 = 2\lambda\,mq\,dx^1\,\delta x^2,$$

de unde

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = 2\lambda\,mq. \tag{83}$$

Dar, având

$$\frac{\partial}{\partial s^1} = m^{-1}\frac{\partial}{\partial x^1} - p\,q^{-1}\,m^{-1}\frac{\partial}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial s^2} = q^{-1}\frac{\partial}{\partial x^2},$$

ecuaţia $\frac{\partial \lambda}{\partial s^2} = 0$ devine $\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} = 0$, iar prima ecuaţie (80') devine

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} = -3\lambda\,m\nu. \tag{84}$$

Primul membru nedepinzând de x^2, vom avea, derivând în raport cu x^2,

$$\lambda\nu\frac{\partial m}{\partial x^2}=0. \tag{84'}$$

Or, dacă $\frac{\partial m}{\partial x^2}$ ar fi nul, din (83) se vede că λ trebue să fie şi el nul. Invers, $\lambda=0$ atrage după sine $\frac{\partial m}{\partial x^2}=0$. Cum însă m depinde în general de x^2, (84') ne arată că neapărat $\nu=0$ $(w_{12}^2=0)$ şi deci forma ds^2 trebue să fie o diferenţială totală exactă.

In plus, din (84) deducem

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}=0;\quad \lambda=\text{const.}$$

Găsim în felul acesta,

$$\gamma_{11}^1=\gamma_{21}^2=w_{12}^2=0,\quad p=0,\quad q=1, \tag{85}$$

ultimele două egalităţi provenind din faptul că forma ds^2 este reductibilă la forma canonică $ds^2=dx^2$.

21. Relaţia (83) devine atunci

$$\frac{\partial\log m}{\partial x^2}=2\lambda;\quad m=h(x^1)e^{2\lambda x^2},\quad (h=\text{arbitrară}).$$

Efectuând însă asupra lui x^1 o schimbare convenabilă, funcţia $h(x^1)$ poate fi redusă la unitate şi ca atare avem

$$m=e^{2\lambda x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s^1}=e^{-2\lambda x^2}\frac{\partial}{\partial x^1},\quad \frac{\partial}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}. \tag{83'}$$

Considerând ecuaţia (81'), ea se scrie

$$\frac{\partial\mu}{\partial x^1}=(3\lambda-\tau)\,e^{2\lambda x^2} \tag{81''}$$

şi cum primul membru nu depinde de x^2, rezultă că $\tau=3\lambda$, iar $\mu=c$ (constant).

Prin urmare, din (81) deducem $\rho=3c-1$, iar cât priveşte formele ds^1, ds^2 ele sunt acum

$$ds^1=e^{2\lambda x^2}dx^1,\quad ds^2=dx^2. \tag{86}$$

Totodată, cea de a doua ecuaţie (80) ne dă

$$\alpha=g(x^1)e^{-2\lambda x^2},\quad (g=\text{arbitrară}). \tag{87}$$

Pentru a determina şi forma ds^0, este de observat că, având

$$\Delta s^0=(2c-1)\,ds^1\,\delta s^2,\quad \Delta s^1=2\lambda\,ds^1\,\delta s^2$$

rezultă

$$\Delta s^0 - \frac{2c-1}{2\lambda}\Delta s^1 = 0$$

ceea ce ne spune că forma Pfaff

$$d\sigma = ds^0 - \frac{2c-1}{2\lambda} ds^1$$

trebue să fie o diferenţială totală exactă $d\sigma = dx^0$, covariantul său biliniar fiind nul. Prin urmare

$$ds^0 = dx^0 + \frac{2c-1}{2\lambda} ds^1. \tag{87'}$$

Ţinând încă seama de ultimele formule (83'), găsim din relaţia $\gamma^{*2}_{112} = \sigma$ egalitatea

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} + 4\lambda \gamma^2_{11} = \sigma(x^1) - 1. \tag{88}$$

Pe de altă parte, din a doua relaţie (80') deducem că expresia

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} + 4\lambda \gamma^2_{11} = 4\lambda I \tag{89}$$

este un invariant absolut al grupului (73). Urmează atunci, de aici şi din relaţia precedentă, că

$$I = \frac{1}{4\lambda}(\sigma - 1).$$

Cum I nu depinde decât de variabila x^1, integrând ecuaţia (89) în raport cu γ^2_{11}, obţinem valoarea

$$\gamma^2_{11} = I + k(x^1)\, e^{-4\lambda x_2}, \quad [k(x^1) \text{ arbitrară}] \tag{89'}$$

$\overline{\gamma}^2_{11}$ fiind dat printr'o formulă de aceeaşi formă, însă în variabile barate.

Introducând pe ds^1, ds^2 în grupul (73) şi ţinând seama că $d\overline{s}^1$, $d\overline{s}^2$ au aceleaşi expresii relativ la variabilele barate, se găsesc ecuaţiile

$$\frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} = g(x^1), \quad \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} = 1$$

$$e^{2\lambda \overline{x}^2} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} = e^{2\lambda x^2}, \quad \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} = 0.$$

Punând $\dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} = \theta'(x^1)$, θ' fiind o funcţie arbitrară de x^1, avem $g(x^1) = -\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{\theta''}{\theta'}$ şi de asemenea

$$\begin{aligned} \overline{x}^1 &= \theta(x^1), \\ \overline{x}^2 &= x^2 - \frac{1}{2\lambda}\log \theta'(x^1). \end{aligned} \tag{90}$$

Pentru a determina funcția $\theta(x^1)$, să revenim la prima ecuație (80), care devine acum

$$e^{-2\lambda x^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} = \overline{\gamma}^2_{11} - \gamma^2_{11} - \lambda\alpha^2. \tag{91}$$

Introducând în ea valoarea lui α, $\overline{\gamma}^2_{11}$ și γ^2_{11}, obținem ecuația diferențială

$$-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)' = \overline{k}(\overline{x}^1)\,\theta'^2 - k(x^1) - \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2. \tag{92}$$

Or, $\theta(x^1)$ fiind oarecare, o putem alege așa încât să-l anulăm pe $\overline{k}(\overline{x}^1)$. In adevăr, aceasta revine la a lua pe θ drept soluție a ecuației diferențiale

$$\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 + 2\lambda k(x^1).$$

Presupunând că am făcut acest lucru și menținând valoarea $k(x^1) = 0$, rezultă că

$$\gamma^2_{11} = \frac{1}{4\lambda}(\sigma - 1)$$

în timp ce funcția $\theta(x^1)$ trebue să verifice ecuația diferențială

$$\{\theta, x^1\} = 0, \tag{93}$$

adică schwartzianului lui θ egalat cu zero.

Prin urmare, $\theta(x^1)$ este de forma

$$\theta = \frac{\alpha x^1 + \beta}{\gamma x^1 + \delta}, \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{93'}$$

α, δ, β, γ fiind constante arbitrare, iar grupul transformărilor de variabile ce corespunde grupului (73) este

$$\begin{aligned} \overline{x}^1 &= \frac{\alpha x^1 + \beta}{\gamma x^1 + \delta}, \\ \overline{x}^2 &= x^2 - \frac{1}{2\lambda}\log\frac{\Delta}{(\gamma x^1 + \delta)^2}, \\ \overline{x}^0 &= x^0 \end{aligned} \tag{94}$$

și depinde de trei constante arbitrare, variabila x^1 transformându-se după grupul proiectiv al dreptei.

22. Rămâne să vedem acum, care sunt componentele conexiunii spațiului nostru în sistemul de variabile (x).

Pentru aceasta, să observăm mai întâi că avem

$$\begin{aligned} &\lambda^1_1 = e^{2\lambda x^2}, \quad \lambda^1_2 = 0, \quad \lambda^2_1 = 0, \quad \lambda^2_2 = 1, \\ &\lambda^0_1 = \frac{2c-1}{2\lambda}e^{2\lambda x^2}, \quad \lambda^0_2 = 0 \end{aligned} \tag{95}$$

şi apoi, că spaţiul P_2 are pe congruenţele (λ^α), $(\alpha = 0, 1, 2)$ componentele

$$\gamma^1_{11} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^1_{22} = 0, \quad \gamma^1_{12} = -\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{22} = \lambda,$$
$$\gamma^2_{11} = \frac{1}{4\lambda}(\sigma - 1), \quad \gamma^0_{11} = 1, \quad \gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = c, \quad \gamma^0_{22} = 0 \quad (c = \text{const.}). \tag{96}$$

Utilizând formulele (2) ce leagă componentele γ^α_{bc} de $\Gamma^i_{jk}(x)$, găsim uşor valorile

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{\lambda}(1 - 2c)\, e^{2\lambda x^2}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\lambda, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{\sigma - 1}{4\lambda} e^{4\lambda x^2}$$
$$\Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2\lambda}(1 - 2c)\, e^{2\lambda x^2}, \quad \Gamma^2_{22} = -\lambda \tag{96'}$$
$$\Gamma^0_{11} = e^{4\lambda x^2}\left[1 + \left(\frac{2c - 1}{2\lambda}\right)^2\right], \quad \Gamma^0_{12} = -\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda x^2}, \quad \Gamma^0_{22} = 0.$$

Aşa dar avem următoarea

T e o r e m ă. *Conexiunea unui spaţiu P_2 fără torsiune afină, dar având torsiunea proiectivă şi curbura diferite de zero, poate fi redusă la forma canonică* (96').

Grupul de automorfisme al unui astfel de spaţiu depinde de 3 *parametri cel mult, maximul fiind atins când σ este constant şi expresia lui este* (94).

23. Ne rămâne încă de considerat grupul (73), care se prezintă în ipoteza $t^0_{12} = 1$, $t^a_{bc} = 0$, când

$$\gamma^0_{11} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0, \quad \gamma^0_{12} = 1. \tag{97}$$

Spre deosebire de spaţiile P_2 fără curbură, care, *în aceleaşi condiţii nu admit un astfel de grup*, în cazul curburii nenule el este admis.

In adevăr, faţă de transformările (73), ţinând seama că $c^0_1 = c^0_2 = 0$, avem relaţiile

$$\overline{\gamma}^{*0}_{112}\, a = \gamma^{*0}_{112}, \quad \overline{\gamma}^{*0}_{212}\, a^{-1} = \gamma^{*0}_{212}$$

şi funcţia a nu poate fi determinată, dacă $\gamma^{*0}_{112} = \gamma^{*0}_{212} = 0$.

De asemenea, relaţiile provenite din $\overline{f} = f$, $\overline{\varphi} \equiv \varphi$, tot prin (73), anume

$$\overline{\gamma}^*_{12} - \overline{\gamma}^*_{21} = \gamma^*_{12} - \gamma^*_{21},$$
$$\overline{\gamma}^*_{11}\, a^2 = \gamma^*_{11}, \quad \overline{\gamma}^*_{22}\, a^{-2} = \gamma^*_{22},$$
$$\overline{\gamma}^*_{12} + \overline{\gamma}^*_{21} = \gamma^*_{12} + \gamma^*_{21},$$

ne arată că trebue să avem

$$\gamma^{*2}_{121} = 0, \quad \gamma^{*1}_{112} = \sigma, \quad \gamma^{*1}_{212} = 0, \quad \gamma^{*2}_{212} = \rho, \tag{97'}$$

σ, ρ fiind invarianţi şi cum avem în plus $c^2_1 = c^1_1 = 0$, deci

$$\overline{\gamma}^1_{21}\, a^{-1} = \gamma^1_{21}, \quad \overline{\gamma}^1_{22}\, a^{-3} = \gamma^1_{22}, \quad \overline{\gamma}^2_{11}\, a^3 = \gamma^2_{11}, \quad \overline{\gamma}^2_{12}\, a = \gamma^2_{12}$$

rezultă că, pentru ca să nu se determine a, este necesar ca

$$\gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{11}^2 = \gamma_{12}^2 = 0. \tag{97''}$$

Așa fiind, să scriem încă relațiile ce conțin derivatele lui a,

$$\frac{\partial a}{\partial s^1} = \bar{\gamma}_{11}^1 a^2 - \gamma_{11}^1 a, \quad \frac{\partial a}{\partial s^2} = \bar{\gamma}_{12}^1 - \gamma_{12}^1 a.$$

Luându-l pe a ca soluție a ecuației

$$\frac{\partial a}{\partial s^1} = -\gamma_{11}^1 a$$

coeficientul $\bar{\gamma}_{11}^1$ devine nul și rămâne astfel numai pentru $\dfrac{\partial a}{\partial s^1} = 0$.

Deci, în această situație,

$$\gamma_{11}^1 = \gamma_{21}^2 = 0.$$

Considerând apoi sistemul

$$\frac{\partial a}{\partial s^1} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial s^2} = -\gamma_{12}^1 a,$$

putem reduce la zero și pe γ_{12}^1 (deci pe γ_{22}^2), deoarece condiția de integrabilitate este satisfăcută în virtutea egalității $\gamma_{112}^{*1} = 1 + \sigma$ și a faptului că $w_{12}^2 = 0$.

Prin urmare γ_{bc}^a sunt toți nuli și a devine o constantă pură. Cum $w_{12}^\alpha = 0$, formele ds^α din grupul (73) au expresiile

$$ds^\alpha = dx^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 0),$$

ele fiind niște diferențiale totale exacte.

Avem așa dar următoarea

T e o r e m ă. *Conexiunea unui spațiu P_2 fără torsiune afină, cu grup proiectiv de transformări de congruențe* (73), *are forma canonică*

$$\Gamma_{bc}^a = 0, \ (a, b, c = 1, 2), \quad \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = 0, \quad \Gamma_{12}^0 = 1. \tag{97'''}$$

Un astfel de spațiu admite grupul de automorfisme depinzând de 3 *parametri*

$$\bar{x}^1 = a x^1 + c_1, \quad \bar{x}^2 = a^{-1} x^2 + c_2 \tag{97^{IV}}$$

cu a, c_1, c_2 *constante arbitrare.*

In concluzie, *din cele spuse în Partea a II-a, rezultă pentru spațiile P_2 fără torsiune afină, având torsiunea proiectivă și curbura nenule, următoarea clasificare*:

a) Spații P_2 cu grup proiectiv de transformări de congruențe (71) *și cu grup de automorfisme depinzând de* 5 *parametri.*

b) Spații P_2 având grupul (72) *sau* (73) *și grup de automorfisme cu* 3 *parametri. Primele se caracterizează prin forma canonică* (96'), *unde* $\lambda = ct.$ *iar cele de al doilea, prin forma canonică* (97''').

c) Spații P_2 cu grup de congruențe $\overline{ds}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 0)$. Ele pot să aibă un grup de automorfisme cu 2 *parametri, dacă coeficienții w_{bc}^α, γ_{bc}^α sunt constanți.*

PARTEA a III-a

24. *Spaţii P_2, fără torsiune.* Ne vom ocupa, în cele ce urmează, de spaţiile P_2 ce au torsiunea nulă, deci pentru care

$$t_{bc}^{\alpha} = \Gamma_{bc}^{\alpha} - \Gamma_{cb}^{\alpha} - w_{bc}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 0;\ b, c = 1, 2). \tag{98}$$

O primă problemă ce se pune este, natural, aceea de a vedea care sunt grupurile de transformări proiective de congruenţe pe care le poate admite un astfel de spaţiu, în ipoteza că forma invariantă $f \neq 0$ iar φ nedegenerată sau degenerată, precum şi în ipoteza că f, sau f şi φ ar fi identic nule.

In acest scop, să observăm că, dacă $f \neq 0$, prin transformările grupului

$$\begin{aligned} \overline{ds}^a &= c_b^a\, ds^b, \\ \overline{ds}^0 &= ds^0 + c_b^0\, ds^b, \end{aligned} \qquad (a, b = 1, 2) \tag{99}$$

obţinem, din identitatea $\overline{f} = f$, relaţia în termeni finiţi

$$(\overline{\Gamma}_{12}^{*} - \overline{\Gamma}_{21}^{*})\,\Delta = \Gamma_{12}^{*} - \lambda_{21}^{*} \quad (\Delta = c_1^1 c_2^2 - c_2^1 c_1^2 \neq 0), \tag{100}$$

care ne permite să facem

$$\Gamma_{12}^{*} - \Gamma_{21}^{*} = 1, \quad \Delta = 1, \tag{101}$$

deci să reducem pe f la forma canonică

$$f = ds^1\, \delta s^2. \tag{102}$$

Aplicând normalizarea lui Thomas

$$\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{21}^{2} = 0, \quad \Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2} = 0 \tag{103}$$

coeficienţii c_1^0, c_2^0, devin nuli.

Dar, tot prin grupul (99), cu aceeaşi notaţie ca în Partea a II-a, din $\overline{\varphi} = \varphi$ ajungem la relaţiile (74) şi putem spune, printr'un raţionament făcut anterior, că:

Dacă forma pătratică invariantă φ nu este degenerată, grupul (99) se reduce la grupul identitate.

Când φ este degenerată, deci de forma (74″), grupul (99) se reduce la (72) şi deoarece $c_1^0 = c_2^0 = 0$, relaţiile de transformare

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{112}^{*0}\, a + \overline{\Gamma}_{212}^{*0}\, \alpha &= \Gamma_{112}^{*0}, \\ \overline{\Gamma}_{112}^{*0}\, b + \overline{\Gamma}_{212}^{*0}\, \beta &= \Gamma_{212}^{*0}, \end{aligned} \qquad (a\beta - b\alpha = 1) \tag{104}$$

arată că, pentru ca α să nu se determine, este necesar ca

$$\Gamma_{112}^{*0} = \Gamma_{112}^{*0}, \quad \Gamma_{212}^{*0} = 0.$$

In sfârşit, pentru $\varphi \equiv 0$, deci

$$\Gamma_{11}^{*} = \Gamma_{22}^{*} = \Gamma_{12}^{*} + \Gamma_{21}^{*} = 0, \tag{105}$$

ţinând seama de (104), putem avea, dacă $\Gamma_{112}^{*0} = 0$,

$$\Gamma_{112}^{*0} = 1, \quad \Gamma_{212}^{*0} = 0$$

şi ajungem tot la grupul (72).

Același lucru se întâmplă și în cazul $\gamma^{*0}_{112} = 0$, $\gamma^{*0}_{212} \neq 0$, schimbând între ele formele ds^1, ds^2.

Presupunând însă că (104) sunt niște identități în a, b α, β, grupul (99) depinde de trei funcții arbitrare de x^1, x^2, sub forma (71).

Dar, cum vom arăta imediat, *un spațiu P_2 fără torsiune, având $f \neq 0$, nu poate admite grupul* (71) *cu* $a\beta - b\alpha = 1$.

Într'adevăr, pentru grupul (71) relațiile în termeni finiți, date de $c^0_1 = c^0_2 = 0$, anume

$$\overline{\gamma}^0_{ef}\, c^e_b\, c^f_c = \gamma^0_{bc}, \quad (b, c, \ldots = 1, 2)$$

trebue să fie niște identități, deci

$$\gamma^0_{bc} = 0,$$

ceea ce atrage $w^0_{12} = 0$.

Or, $f = r^*_{12}\, ds^1\, \delta s^2$ și, conform cu (101), $r^*_{12} = 1$.

Pe de altă parte,

$$r^*_{12} = \gamma_{12} - \gamma^0_{12} + \gamma^0_{21} - 2w^0_{12}$$

iar

$$r_{12} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial s^2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial s^1} + \gamma_1 w^1_{12} + \gamma_2 w^2_{12}, \quad \text{cu} \quad \gamma_c = \gamma^a_{ac}.$$

Rezultă $\gamma_{12} = 0$ și ca urmare $r^*_{12} = 0$, ceea ce contrazice $r^*_{12} = 1$.

Prin urmare, obținem următoarea

Teoremă. *Grupul de transformări de congruențe al unui spațiu P_2 fără torsiune, pentru care forma invariantă $f \neq 0$ este grupul identitate, ori de forma* (72), *deci depinde numai de o singură funcție arbitrară de variabilele x^1, x^2 și aceasta numai dacă φ este degenerată sau identic nulă.*

Deci: *un spațiu P_2 fără torsiune nu poate admite un grup de automorfisme, cu 5 parametri.*

25. *Cazul $f = 0$, φ nedegenerată.* O primă condiție este

$$\gamma^*_{12} = \gamma^*_{21}. \tag{106}$$

Relațiile de transformare a componentelor curburii

$$\overline{\gamma}^{*0}_{e12}\, c^e_b\, \Delta = \gamma^{*0}_{b12} + c^0_f\, \gamma^{*f}_{b12} \quad (b, c, f = 1, 2) \tag{107}$$

considerate ca un sistem în c^*_f ca necunoscute, pot fi rezolvate în raport cu c^0_1, c^0_2, deoarece determinantul sistemului este chiar discriminantul formei pătratice φ care este diferit de zero, prin ipoteză. Anulându-l pe $\overline{\gamma}^{*0}_{112}$ și $\overline{\gamma}^{*0}_{212}$ cu ajutorul lui c^0_1 și c^0_2 și păstrând mai departe aceste valori nule, rezultă că $c^0_1 = c^0_2 = 0$.

Revenind la (101), în care punem $\gamma^*_{12} = \gamma^*_{21}$ și reducând pe ρ la forma canonică (102), grupul spațiului P_2 conține o singură funcție arbitrară de x^1, x^2, fiind grupul ortogonal sau pseudoortogonal în ds^1, ds^2.

Prin faptul acesta, urmează că *spațiului P_2 i se poate atașa o conexiune metrică invariantă, iar grupul lui de automorfisme va putea să depindă de cel mult 3 parametri.*

26. Dacă $f = 0$, iar φ degenerată, ea este reductibilă la forma (74''), deci avem

$$\gamma^{*1}_{112} = \gamma^{*1}_{212} = \gamma^{*2}_{212} = 0, \quad \gamma^{*2}_{112} = 1. \tag{108}$$

Atunci însă $a = 1$, $b = 0$ şi forma ds^1 devine invariantă pentru grupul (99).

Ţinând seama de valorile $c^1_b = \delta^1_b$, obţinem relaţiile în termeni finiţi date de legea de transformare a conexiunii lui P_2.

$$\overline{\gamma}^1_{ef}\, c^e_b\, c^f_c - \delta^1_c\, c^0_b - \delta^1_b\, c^0_c = \gamma^1_{bc}, \tag{109}$$

care desvoltate se scriu, punând $c^0_1 = \gamma$, $c^0_2 = \delta$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\gamma}^1_{11} + (\overline{\gamma}^1_{12} + \overline{\gamma}^1_{21})\alpha + \overline{\gamma}^1_{22}\alpha^2 - 2\gamma = \gamma^1_{11},\\
&\overline{\gamma}^1_{12}\beta + \overline{\gamma}^1_{22}\alpha\beta - \delta = \gamma^1_{12},\\
&\overline{\gamma}^1_{21}\beta + \overline{\gamma}^1_{22}\alpha\beta - \delta = \gamma^1_{21},\\
&\overline{\gamma}^1_{22}\beta^2 = \gamma^2_{22}.
\end{aligned} \tag{109'}$$

Ele ne arată că, atâta timp cât $\gamma^1_{22} \neq 0$, putem aranja aşa ca să avem

$$\gamma^1_{22} = 1, \quad \beta = 1.$$

A treia relaţie din (109') fiind acum

$$\overline{\gamma}^1_{21} + \alpha - \delta = \gamma^1_{21},$$

ne permite să anulăm, cu ajutorul lui δ, pe $\overline{\gamma}^1_{21}$ şi pentru a păstra valoarea $\gamma^1_{21} = 0$ trebue ca $\alpha = \delta$. Atunci însă γ^1_{12} devine un invariant absolut.

Pe de altă parte, faptul că $c^2_2 = 1$, ne conduce la relaţiile în termeni finiţi

$$\begin{aligned}
&\overline{\gamma}^2_{21} + \overline{\gamma}^2_{22}\alpha - \gamma = \gamma^1_{21}\alpha + \gamma^2_{21},\\
&\overline{\gamma}^2_{22} - 2\delta = \gamma^1_{22}\alpha + \gamma^2_{22}.
\end{aligned} \tag{110}$$

Cum $\gamma^1_{22} = 1$, cea de a doua ne dă posibilitatea ca folosindu-l pe α, să anulăm coeficientul $\overline{\gamma}^2_{22}$, deci să ne reducem la situaţia

$$\gamma^2_{22} = 0, \quad \alpha = \delta = 0.$$

Odată făcut acest lucru, din prima relaţie (109'), care se scrie

$$\overline{\gamma}^1_{11} - 2\gamma = \gamma^1_{11},$$

se vede că putem face totdeauna

$$\gamma^1_{11} = 0, \quad \gamma = 0$$

şi ca atare, grupul spaţiului devine grupul identitate.

Când $\gamma^1_{22} = 0$, din relaţiile (109') obţinem

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{21} = 0, \quad \delta = 0\\
&\overline{\gamma}^1_{12}\beta = \gamma^1_{12}.
\end{aligned}$$

Deci, dacă $\gamma^1_{12} \neq 0$, putem să avem

$$\gamma^1_{12} = 1, \quad \beta = 1$$

având încă

$$\overline{\gamma}^1_{11} + \alpha - 2\gamma = \gamma^1_{11},$$
$$\overline{\gamma}^2_{21} + \gamma^2_{22}\alpha - \gamma = \gamma^2_{21}.$$

Cu ajutorul primei relații obținem

$$\gamma^1_{11} = 0, \quad \alpha = 2\gamma,$$

iar a doua relație ne arată că, pentru $\gamma^2_{22} \neq \frac{1}{2}$, anulându-l pe $\overline{\gamma}^2_{21}$ și menținându-l nul, va trebui ca $\alpha = \gamma = 0$ și recădem peste grupul identitate.

Dacă însă $\gamma^2_{22} = \frac{1}{2}$, α rămâne nedeterminat și grupul spațiului nostru este de forma

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + \frac{1}{2}\,\alpha ds^1 \end{aligned} \tag{111}$$

și conține tot o funcție oarecare de x^1, x^2.

Cum $\Delta = 1$, ținând seama de (108), mai avem relațiile

$$\overline{\gamma}^{*0}_{112} + \overline{\gamma}^{*0}_{212}\alpha = \gamma^{*0}_{112}, \quad \overline{\gamma}^{*0}_{212} = \gamma^{*0}_{212},$$

care ne arată că grupul (111) devine identitatea, afară de cazul când

$$\gamma^{*0}_{212} = 0, \quad \gamma^{*0}_{112} = \sigma, \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial s^2} = 0\right) \tag{111'}$$

σ fiind un invariant absolut.

De asemenea, din $c^0_2 = 0$ mai rezultă

$$\gamma^0_{22} = 0, \quad \overline{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21}. \tag{111''}$$

27. In caz că $\gamma^1_{12} = 0$, făcând mai întâi

$$\gamma^1_{11} = 0, \quad \gamma = 0$$

α și β nu mai pot fi determinați prin relațiile precedente.

Dar, scriind relațiile în termeni finiți provenite din $\gamma = \delta = 0$, anume

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}^0_{11} &+ (\overline{\gamma}^0_{12} + \overline{\gamma}^0_{21})\alpha + \overline{\gamma}^0_{22}\alpha^2 = \gamma^0_{11}, \\ \overline{\gamma}^0_{12}\beta &+ \overline{\gamma}^0_{22}\alpha\beta = \gamma^0_{12}, \\ \overline{\gamma}^0_{21}\beta &+ \overline{\gamma}^0_{22}\alpha\beta = \gamma^0_{21}, \\ \overline{\gamma}^0_{22}\beta^2 &= \gamma^0_{22} \end{aligned} \tag{112}$$

este de observat că, pentru $\gamma^0_{22} \neq 0$, se ajunge la grupul identitate.

Dacă $\gamma^0_{22} = 0$, însă γ^0_{12} sau γ^0_{21} nu este nul, de pildă γ^0_{12}, servindu-ne de β putem avea

$$\gamma^0_{12} = 1, \quad \beta = 1, \quad \bar{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{11},$$

iar prima relaţie din (112) devine

$$\bar{\gamma}^0_{11} + (\gamma^0_{21} + 1)\,\alpha = \gamma^0_{11}. \tag{112'}$$

Prin urmare, atâta timp cât $\gamma^0_{21} \neq -1$, obţinem grupul identitate. Când $\gamma^0_{21} = -1$, nu se mai determină prin (112') iar $\bar{\gamma}^0_{11} = \gamma^0_{11}$. Dar, revenind la (110), acest lucru este totuşi posibil, afară de cazul în care $\gamma^2_{22} = 0$, $\bar{\gamma}^2_{21} = \gamma^2_{21}$ şi când grupul spaţiului este de forma (105).

Tot grupul identitate se obţine şi în ipoteza $\gamma^0_{22} = \gamma^0_{12} = 0$, $\gamma^0_{21} \neq 0$.

In sfârşit, în cazul

$$\gamma^0_{22} = \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = 0,$$

relaţiile (112) nu mai constitue legături pentru α, β, aşa încât grupul lui P_2 depinde de două funcţii arbitrare de x^1, x^2, având expresia

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0. \end{aligned} \tag{113}$$

Concluzia ce se desprinde astfel este următoarea:

Dacă forma invariantă $f \neq 0$, iar φ degenerată, grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului P_2 (fără torsiune) este grupul identitate ori depinde de o singură funcţie arbitrară de x^1, x^2 sub forma (105) *sau* (111), *afară de cazul când sunt îndeplinite condiţiile* (108) *împreună cu*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{22} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0, \quad \gamma_{11} = \nu, \\ &\gamma^2_{12} - \gamma^2_{21} = w^2_{12}, \quad w^1_{12} = 0, \quad w^0_{12} = 0, \quad \gamma^{*0}_{112} = \gamma^{*0}_{212} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial s^2} = 0 \end{aligned} \tag{113'}$$

când el este de forma (113), *cu α, β funcţii oarecare de variabilele x^1, x^2.*

28. Să revenim la cazul $f \neq 0$, φ degenerată. Grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului P_2 are, după cum am arătat, expresia

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{114}$$

şi forma ds^0 este, la fel ca ds^1, invariantă.

Relaţiile în termeni finiţi provenite din egalităţile $c^1_b = \delta^1_b$, anume

$$\bar{\gamma}^1_{ef}\, c^e_b\, c^f_c = \gamma^1_{bc},$$

constitue cel puţin o legătură pentru α, exceptând cazul când am avea

$$\gamma^1_{22} = \gamma^1_{12} + \gamma^1_{21} = 0$$

când γ^1_{11}, γ^1_{12}, γ^1_{21} devin invarianţi absoluţi ai grupului.

Considerând și relațiile date de $c_1^0 = c_2^0 = 0$, adică

$$\overline{\gamma}_{ef}^0 c_b^e c_c^f = \gamma_{bc}^0,$$

va trebui, pentru ca funcția α să nu se determine, ca

$$\gamma_{22}^0 = \gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 = 0,$$

γ_{11}^0, γ_{12}^0, γ_{21}^0 fiind invarianți absoluți.

De asemenea, relația provenită din $c_2^2 = 1$ ne dă în plus invariantul

$$\overline{\gamma}_{21}^2 = \gamma_{21}^2.$$

Ca atare, componentele conexiunii pe congruențele (λ^α) ale spațiului sunt acum

$$\gamma_{11}^0 = \nu, \quad \gamma_{22}^1 = \gamma_{22}^0 = 0, \quad \gamma_{12}^1 = -\gamma_{21}^1 = -\gamma_{22}^2 = \lambda, \quad -\gamma_{11}^1 = \gamma_{21}^2 = \rho$$

$$\gamma_{12}^0 = -\gamma_{21}^0 = \mu, \quad \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 = w_{12}^2, \quad \frac{\partial(\lambda, \mu, \nu, \rho)}{\partial s^2} = 0 \tag{114'}$$

și mai avem încă egalitățile $w_{12}^1 = 2\lambda$, $w_{12}^0 = 2\mu$.

In ceea ce privește funcția α din grupul (105), ea trebue să verifice sistemul de primul ordin

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \overline{\gamma}_{11}^2 + (\gamma_{12}^2 + 2\rho)\alpha - \lambda\alpha^2 - \gamma_{11}^2,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \overline{\gamma}_{12}^2 - 2\lambda\alpha - \gamma_{12}^2 \tag{115}$$

și totodată ecuația

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \overline{w}_{12}^2 - 2\lambda\alpha - w_{12}^2.$$

Presupunând că l-am anulat pe $\overline{\gamma}_{12}^2$ cu ajutorul lui α și menținând nul acest coeficient, vom avea

$$\gamma_{12}^2 = 0, \quad w_{12}^2 = -\rho, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = -2\lambda\alpha. \tag{115'}$$

Pe de altă parte, din condițiile impuse de curbură, două sunt identic verificate și anume $\gamma_{212}^{*1} = \gamma_{212}^{*0} = 0$, pe câtă vreme din $\gamma_{112}^{*1} = \gamma_{212}^{*2} = \frac{1}{2}$ obținem egalitățile

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\rho + 3\mu + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\rho - 3\mu - \frac{1}{2} = 0$$

din care scoatem

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\rho = 0, \quad \mu = -\frac{1}{6}$$

şi atunci

$$\gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = -\frac{1}{6}, \quad w^0_{12} = -\frac{1}{3}.$$

In sfârşit, condiţiile $\gamma^{*2}_{212} = \varepsilon$, (± 1), $\gamma^{*0}_{112} = \sigma$, ne mai dau relaţiile

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} + 4\lambda\gamma^2_{11} = \varepsilon - \nu, \quad 3\lambda\nu = \sigma. \tag{116}$$

29. Luând drept forme ds^1, ds^2 aceleaşi expresii ca în § 19 şi făcând acelaşi raţionament, urmează că trebue să avem $\rho = 0$, $(w^2_{12} = 0)$ şi prin urmare $\lambda = c$ (constant), $w^1_{12} = 2c$, $\nu = \frac{1}{3c}\sigma$.

Astfel fiind, formele ds^1, ds^2 sunt acum

$$ds^1 = m(x^1, x^2)\, dx^1, \quad ds^2 = dx^2 \tag{117}$$

şi calculul covariantului biliniar Δs^1 ne dă

$$m = h(x^1)\, e^{2cx^2}$$

cu $h(x^1)$ arbitrară. Schimbând convenabil pe x^1, putem face însă $h = 1$ şi ca atare

$$ds^1 = e^{2cx^2} dx^1, \quad ds^2 = dx^2. \tag{117'}$$

Dar atunci

$$\frac{\partial}{\partial s^1} = e^{-2cx^2}\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}$$

aşa încât relaţia (116) devine

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} + 4c\,\gamma^2_{11} = \varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma(x^1), \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

şi integrând-o obţinem

$$\gamma^2_{11} = \frac{1}{4c}\left(\varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma\right) + k(x^1)\, e^{-4cx^2} \tag{118}$$

$k(x^1)$ fiind o funcţie oarecare.

Expresia formei ds^0 se capătă şi ea uşor, ţinând seama că

$$\Delta s^0 = -\frac{1}{3} ds^1\, \delta s^2, \quad \Delta s^1 = 2c\, ds^1\, \delta s^2$$

deci avem egalitatea

$$\Delta s^0 + \frac{1}{6c}\Delta s^1 = 0,$$

care ne arată că forma

$$d\tau = ds^0 + \frac{1}{6c} ds^1$$

trebue să fie o diferențială totală exactă, $d\tau = dx^0$, deoarece covariantul său biliniar este nul. Deducem imediat

$$ds^0 = dx^0 - \frac{1}{6c} e^{2cx^2} dx^1. \tag{119}$$

Introducând valorile (117) și (119) în grupul (105) ca și expresiile de aceeași formă pentru $d\bar{s}^\alpha$, ($\alpha = 0,1,2$), găsim că transformările de variabile care corespund acestui grup sunt de forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \theta(x^1), \\ \bar{x}^2 &= x^2 - \log \theta'(x^1) \\ \bar{x}^0 &= x^0 \end{aligned} \tag{120}$$

funcția $\theta(x^1)$ fiind pentru moment oarecare.

30. Sistemul pe care-l verifică α fiind

$$\begin{aligned} e^{-2cx^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} &= \bar{\gamma}^2_{11} - \gamma^2_{11} - c\alpha^2, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^2} &= -2c\alpha, \end{aligned} \tag{121}$$

deducem mai întâi

$$\alpha = g(x^1) e^{-2cx^2} = -\frac{1}{2c}\frac{\theta''}{\theta'} e^{-2cx^2}$$

și cum printr'o transformare de variabile avem

$$\bar{\gamma}^2_{11} = \frac{1}{4c}\left(\varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma\right) + \bar{k}(\bar{x}^1) e^{-4c\bar{x}^2},$$

prima ecuație (121) devine

$$-\frac{1}{2c}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)' = \bar{k}(\bar{x}^1)\theta'^2(x^1) - k(x^1) - \frac{1}{4c}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2.$$

Or, $\theta(x)$ fiind arbitrară, luând-o ca soluție a ecuației diferențiale

$$\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 + 2ck(x^1),$$

va rezulta $\overline{k}(\overline{x}^1) = 0$ şi menţinând valoarea $k(x^1) = 0$, rezultă că θ trebue să satisfacă ecuaţia schwartziană

$$\{\theta, x^1\} = 0 \tag{122}$$

deci este de forma

$$\theta = \frac{ax^1 + b}{a'x^1 + b'}, \tag{122'}$$

cu a, b, a', b' constante arbitrare având determinantul diferit de zero.

In definitiv avem

$$\gamma^2_{11} = \frac{1}{4c}\left(\varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma\right), \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{123}$$

iar transformările de variabile (120) sunt

$$\begin{aligned} \overline{x}^1 &= \frac{ax^1 + b}{a'x^1 + b'}, \\ \overline{x}^2 &= x^2 - \log\frac{\Delta}{(a'x^1 + b')^2}, \qquad (\Delta = ab' - a'b \neq 0) \\ \overline{x}^0 &= x^0 \end{aligned} \tag{124}$$

şi depind de trei constante arbitrare.

Aşa dar, teorema ce rezultă are următorul enunţ:

Dacă spaţiul P_2 este fără torsiune, însă forma $f \neq 0$ iar φ degenerată, conexiunea sa γ^α_{bc} ($\alpha = 0,1,2$; $b,c = 1,2$) poate fi scrisă sub forma canonică

$$\begin{aligned} &\gamma^0_{11} = \frac{1}{3c}\sigma, \ \gamma^1_{11} = \gamma^0_{22} = \gamma^1_{22} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = 0, \ \gamma^1_{22} = -\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{22} = c, \\ &\gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = -\frac{1}{6}, \ \gamma^2_{11} = \frac{1}{4c}\left(\varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma\right), \ \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \tag{125}$$

$\sigma = \sigma(x^1)$ fiind invariantul dat de $\gamma^{*0}_{112} = \sigma$, iar c o constantă arbitrară.

Forma canonică a conexiunii acestui spaţiu, în sistemul de variabile (x) este

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^0_{22} = 0, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -c \\ &\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2c}e^{4cx^2}\left(\varepsilon - \frac{1}{3c}\sigma\right), \ \Gamma^2_{22} = -c, \ \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\sigma e^{4cx^2}, \ \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = \frac{1}{6}e^{2cx^2} \end{aligned} \tag{125'}$$

şi este păstrată, pentru σ constant, de transformările de variabile (124).

Grupul de automorfisme al unui spaţiu P_2 având conexiunea (125') *poate depinde de 3 parametri şi aceasta numai când σ este constant.*

31. După cum am văzut, grupul proiectiv de transformări de congruenţe al unui spaţiu P_2 fără torsiune, cu $f = 0$ iar φ degenerată, putea avea forma (111)

$$\begin{aligned} d\overline{s}^1 &= ds^1 \\ d\overline{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2 \\ d\overline{s}^0 &= ds^0 + \frac{1}{2}\alpha\, ds^1, \end{aligned}$$

în cazul în care sunt îndeplinite condițiile

$$\gamma_{11}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = 0,\ \gamma_{12}^1 = 1,\ \gamma_{22}^2 = \frac{1}{2},\ w_{12}^1 = 1,\ \gamma_{22}^0 = 0$$

$$\gamma_{12}^0 - \gamma_{21}^0 = w_{12}^0,\ \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 = w_{12}^2,\ \gamma_{21}^2 = \mu,\ \gamma_{21}^0 = \lambda \tag{126}$$

$$\gamma_{112}^{*1} = \gamma_{212}^{*1} = \gamma_{212}^{*2} = 0,\ \gamma_{112}^{*2} = \varepsilon,\ \varepsilon = \pm 1$$

$$\gamma_{212}^{*0} = 0,\ \gamma_{112}^{*0} = \rho,\ \frac{\partial(\lambda, \mu, \rho)}{\partial s^2} = 0.$$

Ținând seama de acest lucru, funcția α trebue să verifice sistemul

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \overline{\gamma}_{11}^2 + (\overline{\gamma}_{12}^2 + \mu)\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \gamma_{11}^2,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \overline{\gamma}_{12}^2 - \alpha - \gamma_{12}^2 \tag{127}$$

și în același timp sistemul

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = 2\gamma_{11}^0 + 2\,(\overline{\gamma}_{12}^0 + \lambda)\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 = 2\gamma_{11}^0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 2\overline{\gamma}_{12}^0 - \alpha - 2\gamma_{12}^0. \tag{127'}$$

Deducem de aici invariantul absolut

$$\overline{\gamma}_{12}^2 - 2\overline{\gamma}_{12}^0 = \gamma_{12}^2 - 2\gamma_{12}^0, \tag{128}$$

precum și relația în termeni finiți

$$\overline{\gamma}_{11}^2 - 2\overline{\gamma}_{11}^0 + [\overline{\gamma}_{12}^2 + \mu - 2\,(\overline{\gamma}_{12}^0 + \lambda)]\,\alpha = \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^0$$

care trebuind să fie o identitate în α, ne dă

$$\overline{\gamma}_{11}^2 - 2\overline{\gamma}_{12}^0 = \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{12}^0,\quad \gamma_{12}^2 - 2\gamma_{12} = 2\lambda - \mu.$$

Din aceste egalități deducem ușor

$$\gamma_{12}^0 = \lambda + w_{12}^0,\quad \gamma_{12}^2 = 4\lambda - \mu + 2w_{12}^0,\quad w_{12}^2 = 4\lambda - 2\mu + 2w_{12}^0. \tag{129}$$

Calculând însă componentele curburii, din $\gamma_{212}^{*0} = 0$ obținem $\lambda = 0$, deci $w_{12}^2 = 2w_{12}^0 - 2\mu$, iar din $\gamma_{112}^{*1} = 0$, găsim $\mu = 0$. Prin urmare $\gamma_{21}^0 = \gamma_{21}^2 = 0$.

Tot astfel, din $\gamma_{112}^{*2} = \varepsilon$ și $\gamma_{112}^{*0} = \rho$, avem

$$\frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial s^2} + \frac{3}{2}\gamma_{11}^2 + \gamma_{11}^0 = \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial s^2} + 2\gamma_{11}^0 = \rho. \tag{130}$$

Anulându-l pe $\bar{\gamma}_{12}^2$ şi păstrând valoarea $\gamma_{12}^2 = 0$, vom avea $\gamma_{12}^0 = 0$, deci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}_{11}^2 - \gamma_{11}^2 - \frac{1}{2}\alpha^2, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= -\alpha. \end{aligned} \tag{131}$$

Condiţia de integrabilitate a acestui sistem fiind

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{11}^2}{\partial \bar{s}^2} + 2\bar{\gamma}_{11}^2 = \frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial s^2} + 2\gamma_{11}^2 \tag{131'}$$

expresia ce intervine este un invariant $I\left(\frac{\partial I}{\partial s^2} = 0\right)$. Punând

$$\gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^0 = \sigma, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s^2} = 0$$

prima dintre relaţiile (130) se scrie sub forma

$$I = \varepsilon + \frac{1}{2}\sigma, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{132}$$

32. Observând că $w_{12}^1 = 1$, $w_{12}^2 = w_{12}^0 = 0$, printr'un raţionament făcut anterior, se vede că putem lua drept forme ds^α, $(\alpha = 1, 2, 0)$ expresiile

$$ds^1 = e^{x^2}\, dx^1, \quad ds^2 = dx^2, \quad ds^0 = dx^0 \tag{133}$$

astfel încât, integrând ecuaţiile (130), care acum devin

$$\frac{d\gamma_{11}^2}{dx^2} + 2\gamma_{11}^2 = I, \quad \frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial x^2} + 2\gamma_{11}^0 = \rho \tag{130'}$$

obţinem

$$\gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} I + k\,(x^1)\, e^{-2x^2}, \quad \gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}\rho + k'\,(x^1)\, e^{-2x^2} \tag{134}$$

k şi k' fiind două funcţii oarecare de variabila x^1.

Dar, deoarece

$$\frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial x^2},$$

rezultă că avem $2k'\,(x^1) = k\,(x^1)$.

Pe de altă parte, introducând expresiile lui ds^1 şi ds^2 în grupul (111), se găsesc uşor drept transformări de variabile ce-i corespund, ţinând seama că a doua ecuaţie (131) ne dă $\alpha = g\,(x^1)\; e^{-x^2}$, următoarele formule

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \theta\,(x^1), \\ \bar{x}^2 &= x^2 - \log \theta'\,(x^1), \\ \bar{x}^0 &= x^0 + \tau\,(x^1) \end{aligned} \tag{135}$$

$\theta(x^1)$ fiind legată de funcția $g(x^1)$ și $\tau(x^1)$ prin relațiile

$$g(x^1) = -\frac{\theta''}{\theta'}, \quad \tau'(x^1) = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}. \tag{135'}$$

Dat fiind că, față de o transformare de variabile, avem

$$\bar{\gamma}^2_{11} = \frac{I}{2} + \bar{k}(\bar{x}^1)e^{-2\bar{x}^2}$$

prima ecuație a sistemului (131) devine

$$-\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)' = \bar{k}(\bar{x}^1)\theta'^2(x^1) - k(x^1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2$$

și cum $\theta(x^1)$ este arbitrară, luând-o astfel încât să anulăm pe $\bar{k}(\bar{x}^1)$, valorile $k(x^1) = k'(x^1) = 0$ vor fi păstrate numai dacă $\theta(x^1)$ este soluție a ecuației $\{\theta, n^1\} = 0$.

Rezultă așa dar pentru $\theta(x^1)$ expresia

$$\theta = \frac{ax^1 + b}{cx^1 + d}, \quad (\Delta = ad - bc \neq 0) \tag{136}$$

în care a,b,c,d sunt constante arbitrare, iar pentru γ^2_{11} și γ^0_{11} valorile

$$\gamma^2_{11} = \frac{5}{6}\varepsilon - \frac{2}{3}\rho, \quad \gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\rho.$$

Cu aceasta, transformările de variabile ce corespund grupului (111) sunt

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{ax^1 + b}{cx^1 + d}, \\ \bar{x}^2 &= x^2 - \log\frac{\Delta}{(cx^1 + d)^2}, \\ \bar{x}^0 &= x^0 - \frac{c}{cx^1 + d}, \end{aligned} \tag{137}$$

a,b,c,d fiind constante oarecare cu determinantul $\Delta = ad - bc \neq 0$.

După cum se observă, variabila x^1 se transformă după grupul proiectiv al dreptei, la fel ca și în cazurile dela §§ 20 și 29.

Astfel putem enunța următoarea

Teorema. *Conexiunea unui spațiu P_2 fără torsiune, pentru care $f = 0$ iar φ degenerată, poate fi totdeauna redusă, pe congruențele (λ^α), la forma canonică*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0 \\ &\gamma^1_{12} = 1, \ \gamma^2_{22} = \frac{1}{2}, \ \gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\rho, \ \gamma^2_{11} = \frac{5}{6}\varepsilon - \frac{2}{3}\rho \end{aligned} \tag{138}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, iar ρ invariantul dela (126), *funcție numai de variabila x^1.*

In plus mai avem şi rezultatul:

Forma canonică (138) *este păstrată de transformările de variabile* (137) *care depind de trei constante arbitrare, dacă* ρ *este constant.*

Un spaţiu P_2 *cu conexiune* (138) *admite un grup de automorfisme cu* 3 *parametri, dacă* ρ *este constant, altfel grupul este cu* 2 *parametri.*

Pentru a găsi forma canonică a conexiunii spaţiului nostru în sistemul de variabile (x), observăm că

$$\lambda_1^1 = e^{x^2},\ \lambda_2^1 = 0,\ \lambda_1^2 = 0,\ \lambda_2^2 = 1,\ \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0$$

şi formulele cunoscute (2) ne dau valorile lui $\Gamma_{jk}^i(x)$ căutate, anume

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0,\ \Gamma_{11}^2 = \left(\frac{5}{6}\varepsilon - \frac{2}{3}\rho\right) e^{4x^2} \\ &\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2},\ \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}\rho e^{4x^2},\ \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = 0, \end{aligned} \tag{138'}$$

cu $\rho = \rho(x^1)$ invariant, iar $\varepsilon = \pm 1$.

33. Un alt grup de transformări de congruenţe depinzând de o singură funcţie, care se prezintă pentru un spaţiu P_2 fără torsiune cu $f = 0$ şi φ degenerată, este

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1,\quad d\bar{s}^0 = ds^0 \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + ds^2 \end{aligned} \tag{139}$$

şi anume în condiţiile

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{22}^0 = \gamma_{22}^2 = 0,\ \gamma_{11} = \nu,\ \Gamma_{21}^2 = \rho \\ &\gamma_{12}^0 = -\gamma_{21}^0 = 1,\ \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 = w_{12}^2,\ w_{12}^1 = 0,\ w_{12}^0 = 0, \frac{\partial(\nu, \rho)}{\partial s^2} = 0. \end{aligned} \tag{139'}$$

Condiţiile impuse de curbură, pentru ca grupul să depindă de α, sunt acum

$$\gamma_{112}^{*1} = \gamma_{212}^{*1} = \gamma_{212}^{*2} = 0,\ \gamma_{112}^{*2} = 1,\ \gamma_{212}^{*0} = 0,\ \gamma_{212}^{*0} = \sigma,\ \frac{\partial\sigma}{\partial s^2} = 0. \tag{140}$$

Calculând însă pe $\gamma_{112}^{*1} = 0$, se ajunge la o imposibilitate.

Prin urmare:

Grupul (139) *este incompatibil cu un spaţiu* P_2 *fără torsiune, pentru care* $f = 0$ *iar* φ *degenerată.*

34. Ne mai rămâne de studiat un singur caz, în ipoteza $f = 0$, φ degenerată, anume acela al grupului (113),

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 \end{aligned} \tag{113}$$

care intervine când avem condiţiile (108) şi (113'), § 25.

După cum se constată cu uşurinţă, sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin, pe care trebue să le verifice funcţiile α şi β sunt chiar (23), § 9, astfel încât, refăcând raţionamentul respectiv, ajungem la sistemul în α,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^1} = \overline{\gamma}^2_{11} - \beta \gamma^2_{11}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x^2} = 0, \tag{141}$$

β fiind o constantă.

Având $w^\lambda_{12} = 0$, $(\lambda = 1, 2, 0)$, formele ds^λ ce convin grupului (113) sunt diferenţiale totale exacte,

$$ds^\lambda = dx^\lambda \tag{142}$$

iar transformările de variabile corespunzătoare aceluiaşi grup, se scriu

$$\begin{aligned} \overline{x}^1 &= x^1 + a, \\ \overline{x}^2 &= \beta\, x^2 + \theta\,(x^1), \\ \overline{x}^0 &= x^0, \end{aligned} \tag{143}$$

cu a constantă arbitrară, iar $\theta\,(x^1)$ trebuind să verifice ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$\theta'' = \overline{\gamma}^2_{11} - \beta \gamma^2_{11}. \tag{144}$$

Pe de altă parte, condiţia $\gamma^{*2}_{112} = 1$ ne dă

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} = 1 - \nu; \quad \gamma^2_{11} = (1 - \nu)\, x^2 + \varphi\,(x^1), \tag{145}$$

φ fiind oarecare, astfel încât, observând că $\overline{\gamma}^2_{11}$ este de aceeaşi formă, iar ν invariant, şi introducând valorile respective în (144), obţinem ecuaţia

$$\theta'' - (1 - \nu)\,\theta = \overline{\varphi} - \beta\varphi. \tag{144'}$$

Luându-l însă pe $\theta(x^1)$ ca soluţie a ecuaţiei

$$\theta'' - (1 - \nu)\,\theta = -\beta\varphi,$$

$\overline{\varphi}\,(x^1)$ rezultă nul şi păstrând valoarea $\varphi = 0$, va trebui să avem

$$\theta'' - (1 - \nu)\,\theta = 0, \tag{146}$$

ecuaţie ce determină pe $\theta\,(x^1)$.

Componentele conexiunii lui P_2 pe congruenţele (λ^α) au astfel valorile

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{bc} = 0, \quad (b, c = 1, 2), \quad \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0 \\ &\gamma^0_{11} = \nu, \quad \gamma^2_{11} = (1 - \nu)\, x^2, \end{aligned} \tag{147}$$

ν fiind un invariant depinzând numai de x^1.

Deoarece

$$\lambda^1_1 = \lambda^2_2 = 1, \quad \lambda^1_2 = \lambda^2_1 = \lambda^0_\varphi = 0$$

găsim, pentru componentele $\Gamma^i_{jk}(x)$ aceeaşi formă canonică

$$\Gamma^1_{jk} = 0, \ (j, k = 1, 2), \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{22} = 0$$
$$\Gamma^0_{11} = \nu, \quad \Gamma^2_{11} = (1 - \nu)\, x^2, \tag{147'}$$

ceea ce este explicabil, deoarece formele ds^α fiind diferenţiale totale exacte, variabilele s^α coincid cu respectiv x^1, x^2, x^0.

In concluzie avem următoarea:

T e o r e m ă. *Conexiunea unui spaţiu P_2 fără torsiune, cu $f = 0$ şi φ degenerată, având grupul proiectiv de transformări de congruenţe* (113), *poate fi redusă la forma canonică* (147) *sau* (147'), *care este păstrată, când ν este constant, de transformările de variabile*

$$\bar{x}^1 = x^1 + a, \quad \bar{x}^2 = \beta x^2 + b\theta_1 + c\theta_2, \quad \bar{x}^0 = x^0 \tag{148}$$

β, a, b, c *fiind constante arbitrare, iar* θ_1, θ_2 *soluţii independente ale ecuaţiei diferenţiale* (146).

Grupul de automorfisme al unui spaţiu (147') *depinde, dacă ν este constant, de 4 parametri* [2] *).

35. Să presupunem acum că cele două forme invariante f şi φ ale spaţiului P (fără torsiune) sunt identic nule. Atunci

$$\Upsilon^{*1}_{112} = \Upsilon^{*1}_{212} = \Upsilon^{*2}_{112} = \Upsilon^{*2}_{212} = 0 \tag{149}$$

şi cel puţin una din componentele Υ^{*0}_{112}, Υ^{*0}_{212} este diferită de zero.

Relaţiile de transformare

$$\begin{aligned} (\bar{\Upsilon}^{*0}_{112} c^1_1 + \bar{\Upsilon}^{*0}_{212} c^2_1)\, \Delta &= \Upsilon^{*0}_{112}, \\ (\bar{\Upsilon}^{*0}_{112} c^1_2 + \bar{\Upsilon}^{*0}_{212} c^2_2)\, \Delta &= \Upsilon^{*0}_{212}, \end{aligned} \qquad (\Delta = c^1_1 c^2_2 - c^1_2 c^2_1) \tag{150}$$

ne arată că putem presupune

$$\Upsilon^{*0}_{112} = 1, \quad \Upsilon^{*0}_{212} = 0, \tag{150'}$$

deci $c^1_2 = 0$, $c^2_2 = \dfrac{1}{(c^1_1)^2}$, astfel încât, grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului este, în cazul acesta, de forma

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= a\, ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + \frac{1}{a^2}\, ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + \gamma\, ds^1 + \delta\, ds^2, \end{aligned} \tag{151}$$

cu a, α, γ, δ funcţii oarecare de x^1, x^2.

In primul rând, având $c^1_2 = 0$, găsim relaţiile în termeni finiţi

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}^1_{21}\, a^{-1} + \bar{\Upsilon}^1_{22}\, a^{-2}\, \alpha - a\, \delta &= \Upsilon^1_{21}\, a, \\ \bar{\Upsilon}^1_{22}\, a^{-3} &= \Upsilon^1_{22}. \end{aligned} \tag{152}$$

*) p. 400.

Din ele se vede că, pentru $\gamma_{22}^1 \neq 0$, situația ce se prezintă este

$$\gamma_{22}^1 = 1, \quad a = 1$$

și anulându-l pe $\overline{\gamma}_{21}^1$ din prima relație (152), valoarea $\gamma_{21}^1 = 0$ se menține numai dacă $\delta = \alpha$.

Apoi, din $\dfrac{\partial a}{\partial s^1} = \dfrac{\partial a}{\partial s^2} = 0$ scoatem ecuațiile

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma}_{11}^1 + \overline{\gamma}_{12}^1 \alpha + \alpha^2 - 2\gamma = \gamma_{11}^1, \quad \overline{\gamma}_{12}^1 = \gamma_{12}^1 \\ &\overline{\gamma}_{21}^2 + \overline{\gamma}_{22}^2 \alpha - \alpha^2 - \gamma = \gamma_{21}^2, \\ &\overline{\gamma}_{22}^2 - 3\alpha = \gamma_{22}^2. \end{aligned} \tag{153}$$

Anulând coeficientul $\overline{\gamma}_{22}^2$ din ultima ecuație, vom avea

$$\gamma_{22}^2 = 0, \quad \alpha = \delta = 0, \tag{153'}$$

și pe urmă, anulându-l și pe $\overline{\gamma}_{11}^1$ cu ajutorul lui γ, va rezulta

$$\gamma_{11}^1 = 0, \quad \gamma = 0, \tag{153''}$$

astfel încât grupul (151) devine grupul identitate.

36. Dacă $\gamma_{22}^1 = 0$, din prima relație (152) putem face încă

$$\gamma_{21}^1 = 0, \quad \delta = 0.$$

Astfel fiind, $c_2^0 = 0$ ne conduce la relațiile

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma}_{21}^0 a^{-1} + \overline{\gamma}_{22}^0 a^{-2} \alpha = \gamma_{21}^0, \\ &\overline{\gamma}_{22}^0 a^{-4} = \gamma_{22}^0. \end{aligned} \tag{154}$$

Presupunând pe $\gamma_{22}^0 \neq 0$, un raționament simplu face să ajungem la grupul identitate. Această ipoteză trebue însă eliminată, *deoarece* γ_{22}^0 *este întotdeauna nul.* In adevăr, condiția $\gamma_{212}^{*1} = 0$ ne dă

$$\gamma_{212}^1 = \gamma_{22}^0$$

și pentru $\gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = 0$ găsim $\gamma_{212}^1 = 0$, adică $\gamma_{22}^0 = 0$.

Fie atunci $\gamma_{22}^0 = 0$, iar $\gamma_{21}^0 \neq 0$. In acest caz, reducând pe γ_{21}^0 la unitate și menținându-l astfel, vom avea

$$\gamma_{21}^0 = 1, \quad a = 1.$$

Pe de altă parte, egalitatea $c_2^2 = \dfrac{1}{(c_1^1)^2}$ derivat în raport cu s^2, ne dă relația în termeni finiți

$$(\overline{\gamma}_{22}^2 + 2\overline{\gamma}_{12}^1)\, a^{-2} = 2\gamma = \gamma_{22}^2 + 2\gamma_{12}^1, \tag{155}$$

care permite să facem întotdeauna

$$\gamma_{22}^2 + 2\gamma_{12}^1 = 0, \quad \gamma = 0. \tag{156}$$

Derivând aceeaşi egalitate în raport cu s^1, găsim de asemenea că

$$(\overline{\gamma}^2_{21} + 2\overline{\gamma}^1_{11})\, a = \gamma^2_{21} + 2\gamma^1_{11}. \tag{157}$$

Cât priveşte α, el este legat de relaţiile date de $\gamma = 0$ şi $\frac{\partial a}{\partial s^1} = \frac{\partial a}{\partial s^2} = 0$,

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma}^0_{11} + (\overline{\gamma}^0_{12} + \overline{\gamma}^0_{21})\,\alpha = \gamma^0_{11}, \\ &\overline{\gamma}^1_{11} + \overline{\gamma}^1_{12}\,\alpha = \gamma^1_{11}, \quad \overline{\gamma}^2_{21} + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha = \gamma^2_{21}, \end{aligned} \tag{158}$$

γ^0_{12}, γ^1_{12}, γ^2_{22}, fiind invarianţi absoluţi ai grupului (151), deci derivatele lor în raport cu s^2 sunt nule.

Deducem de aici că grupul (151) poate fi redus la grupul identitate ($\alpha = 0$), afară de cazul când

$$\gamma^0_{11} = -1, \quad \gamma^1_{12} = \gamma^2_{22} = 0, \quad w^1_{12} = 0, \quad \overline{\gamma}^a_{a1} = \gamma^a_{a1} \tag{158'}$$

şi când el depinde de α.

Dacă $\gamma^0_{21} = 0$, servindu-ne de (157) în ipoteza că $\gamma^2_{21} + 2\gamma^1_{11} \neq 0$, vom putea avea

$$\gamma^2_{21} + 2\gamma^1_{11} = 1, \quad a = 1 \tag{159}$$

α verificând tot (158) cu $\gamma^0_{21} = 0$.

Deci, pentru a nu recădea peste grupul identitate, va trebui ca în plus,

$$\gamma^1_{12} = \gamma^2_{22} = \gamma^0_{12} = 0, \quad w^0_{12} = 0, \quad \frac{\partial \gamma^0_{11}}{\partial s^2} = 0. \tag{159'}$$

Când însă $\gamma^2_{21} + 2\gamma^1_{11} = 0$, *coeficientul* γ^0_{12} *trebue neapărat să fie diferit de zero*, deoarece altfel se ajunge la o contradicţie cu condiţia $\gamma^{*0}_{112} = 1$.

In adevăr, presupunând $\gamma^0_{12} = 0$, α nu se mai determină prin (158), iar $\overline{\gamma}^0_{11} = \gamma^0_{11}$, deci $\frac{\partial \gamma^0_{11}}{\partial s^2} = 0$. Ţinând însă seama că

$$\frac{\partial a}{\partial s^2} = \overline{\gamma}^1_{11}\, a^2 + \overline{\gamma}^1_{12}\, a\, \alpha - \gamma^1_{11}\, a, \tag{160}$$

$$\frac{\partial a}{\partial s^2} = \overline{\gamma}^1_{12}\, a^{-1} - \gamma^1_{12}\, a,$$

se vede că-l putem anula pe $\overline{\gamma}^1_{12}$ întotdeauna, luându-l pe a ca soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial \log a}{\partial s^2} = -\gamma^1_{12} \tag{160'}$$

şi atunci

$$\gamma^1_{12} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial s^2} = 0; \quad \gamma^2_{22} = 0, \quad w^1_{12} = 0.$$

Introducând valorile de mai sus ale coeficienților γ_{bc}^{α} găsiți, în condiția $\gamma_{112}^{*0} = 1$, se ajunge la o imposibilitate.

37. Dat fiind că $\gamma_{12}^{0} \neq 0$, relația

$$\overline{\gamma}_{11}^{0} + \overline{\gamma}_{12}^{0}\alpha = \gamma_{11}^{0}, \quad \overline{\gamma}_{12}^{0} = \gamma_{12}^{0} \tag{161}$$

ne dă

$$\gamma_{11}^{0} = 0, \quad \alpha = 0. \tag{161'}$$

Din $\dfrac{\partial\alpha}{\partial s^1} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial s^2} = 0$ găsim apoi relațiile în termeni finiți

$$\overline{\gamma}_{11}^{2}\, a^4 = \gamma_{11}^{2}, \quad \overline{\gamma}_{12}^{2}\, a = \gamma_{12}^{2}. \tag{162}$$

Prin urmare, atâta timp cât cel puțin unul din coeficienții γ_{12}^{2}, γ_{11}^{2} este diferit de zero, ajungem la grupul identitate. Dimpotrivă, dacă

$$\gamma_{11}^{2} = \gamma_{12}^{2} = 0, \tag{162'}$$

grupul (151) depinde de a, adică tot de o singură funcție arbitrară de x^1, x^2.

38. Rămâne să mai vedem dacă grupurile cu α sau a semnalate mai sus, pot fi efectiv admise de spațiul P_2 sau nu.

Să ne ocupăm întâi de grupul

$$d\overline{s}^1 = ds^1, \quad d\overline{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\overline{s}^0 = ds^0. \tag{163}$$

Condițiile în care el intervine sunt

$$\begin{gathered} \gamma_{21}^{1} = \gamma_{22}^{1} = \gamma_{22}^{0} = 0, \quad \gamma_{12}^{0} = -\gamma_{21}^{0} = -1 \\ \gamma_{12}^{1} = \gamma_{22}^{2} = 0, \quad w_{12}^{1} = 0, \quad \frac{\partial\gamma_{11}^{1}}{\partial s^2} = \frac{\partial\gamma_{21}^{2}}{\partial s^2} = 0. \end{gathered} \tag{163'}$$

Or, calculând pe $\gamma_{212}^{*2} = 0$ (sau $\gamma_{112}^{*1} = 0$), găsim $w_{12}^{0} = 1$ și $w_{12}^{0} = -2$, ceea ce este imposibil. Așa dar:

Grupul (153) *este incompatibil cu condițiile* (163') *și* (149).

39. Este ușor de arătat că *spațiul P_2 nu poate admite, în condițiile impuse, un grup de forma*

$$\begin{aligned} d\overline{s} &= a ds^1, \quad d\overline{s}^0 = ds^0 \\ d\overline{s}^2 &= a^{-2} ds^1, \end{aligned} \tag{164}$$

care intervine când avem condițiile

$$\begin{gathered} \gamma_{22}^{1} = \gamma_{21}^{1} = \gamma_{22}^{0} = 0, \quad \gamma_{21}^{0} = \gamma_{11}^{2} = \gamma_{12}^{2} = \gamma_{11}^{0} = 0, \quad \gamma_{12}^{1} = w_{12}^{1}, \quad \gamma_{21}^{2} = w_{21}^{2} \\ \gamma_{22}^{2} + 2\gamma_{12}^{1} = 0, \quad \gamma_{21}^{2} + 2\gamma_{11}^{1} = 0, \quad \gamma_{12}^{0} = w_{12}^{0}, \quad \frac{\partial\gamma_{12}^{0}}{\partial s^{1,2}} = 0 \end{gathered} \tag{164'}$$

Pentru aceasta să calculăm pe $\gamma_{112}^{*1} = 0$ și $\gamma_{212}^{*2} = 0$, adică

$$\gamma_{112}^{1} = \gamma_{12}^{0} + w_{12}^{0}, \quad \gamma_{212}^{1} = w_{12}^{0}.$$

Vom găsi ecuaţiile

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_{11}^{1}}{\partial s^{2}} - \frac{\partial \gamma_{12}^{1}}{\partial s^{1}} + \gamma_{11}^{1}\gamma_{12}^{1} - \gamma_{12}^{1}\gamma_{21}^{2} - 2\gamma_{12}^{0} = 0,\\
&\frac{\partial \gamma_{21}^{2}}{\partial s^{2}} - \frac{\partial \gamma_{22}^{2}}{\partial s^{1}} + \gamma_{21}^{2}\gamma_{12}^{1} - \gamma_{22}^{2}\gamma_{21}^{2} - \gamma_{12}^{0} = 0.
\end{aligned} \tag{165}$$

Inmulţind prima ecuaţie cu 2 şi adunându-le membru cu membru, obţinem, în baza primelor două egalităţi din al doilea rând al condiţiilor (164′), că $\gamma_{12}^{0} = 0$, *contrar ipotezei.*

In consecinţă avem următorul rezultat:

Un spaţiu P_2 fără torsiune, pentru care $f = \varphi \equiv 0$, nu admite — în condiţiile (164′) *— grupul* (164).

40. Din cele arătate în Partea a III-a, urmează că *spaţiile P_2 fără torsiune se pot clasifica astfel:*

a) *Spaţii P_2 fără torsiune, având grupul de transformări de congruenţe* (113) *şi grup de automorfisme cu 4 parametri. Ele sunt caracterizate prin aceea că forma $f = 0$ iar φ degenerată şi forma canonică* (147′) *cu ν constant.*

b) *Spaţii P_2 fără torsiune, cu grup de transformări de congruenţe* (105) *sau* (111), *admiţând un grup de automorfisme cu 3 parametri.*

Primele se caracterizează prin $f \neq 0$, φ degenerată şi forma canonică (125′) *cu σ constant.*

Cele de al doilea au caracteristic $f = 0$, φ degenerată şi forma canonică (138′) *în care ρ este constant.*

c) *Spaţii P_2 fără torsiune, cu grup $d\bar{s}^{\alpha} = ds^{\alpha}$, ($\alpha = 1, 2, 0$). Ele se prezintă, în particular, pentru $f = \varphi \equiv 0$. Toate însă admit un grup maxim de automorfisme cu 2 parametri, pentru w_{bc}^{α}, γ_{bc}^{α} ($\alpha = 1, 2, 0$) constanţi.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ P_2

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Эта работа является продолжением другой [1] и содержит классификацию пространств с проективной связностью P_2 и двумя измерениями с кручением и кривизной, по группам проективных преобразований конгруэнций (3), которые они допускают. Даются соответствующие канонические формы связности в принятой системе конгруэнций (λ^{α}), ($\alpha = 1, 2, 0$) и в системе переменной (x) во всех случаях, в которых группа (3) не является тождественной группой. Применяемый метод есть метод конгруэнции проф. Г. Врэнчану [2].

Пусть P_2 двумерное пространство с проективной связностью, отнесенное к конгруэнциям (λ^{α}), дуги которой даны (1), а коэффициенты связности на (λ^{α}), γ_{bc}^{α} даны (2), $\Gamma_{jk_2}^{i}$ составляющие связности пространства в переменных x^1, x^2.

Предполагая что:

a) Аффинное и проективное кручение, составляющих (5), и кривизна ненулевые, доказывается, что проективная группа преобразо-

вания конгруэнций пространства P_2 приводится к тождественной группе, кроме случая когда имеем условия (8), (8′) или (52′), (54), (54′), когда группа является формы (9) с двумя произвольными функциями переменных x^1, x^2 или (52), имея только одну функцию переменных x^1, x^2 и далее, что пространство P_2 с ненулевым аффинным кручением и кривизной можно классифицировать нижеследующим способом:

1. Пространства P_2 с группой преобразований конгруэнций (9) и с группой автоморфизмов с 4 параметрами. Они характеризуются тем, что формы ds^1, ds^0 являются инвариантными точными полными дифференциалами и канонической формой (34′), в которой инварианты μ и ρ постоянны.

2. Пространства P_2, допускающие группу конгруэнций (52) и группу автоморфизмов, зависящую от трех параметров. Они имеют форму ds^1, точный полный дифференциал и каноническую форму (70) с постоянными λ, μ, ν.

3. Пространства P_2, группа которых (3) является тождеством $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 0)$. Если коэффициенты $w^\alpha_{bc}, \gamma^\alpha_{bc}$ постоянны, они имеют максимальную группу автоморфизмов с 2 параметрами.

б) Аффинное кручение пространства P_2 нулевое, но его проективное кручение и кривизна отличны от нуля. Прежде всего нужно отметить, что в этом случае пространство P_2 действительно допускает проективную группу преобразований конгруэнций с 3 произвольными функциями x^1, x^2 и группу автоморфизмов с 5 параметрами, что не имеет места, если кручение P_2 нулевое.

Также оно допускает группу преобразования конгруэнций формы (72) или (73), именно в условиях (77), (78), (78′), (78″) или (97), (97′), (97″) и его группа автоморфизмов имеет в этом случае не более чем 3 параметра.

Далее нужно заметить, что переменная x^1 преобразуется в первом случае соответственно с проективной группой прямой, что не имело места в случае нулевой кривизны, ни в соответствующем положении, ни во всех других.

в) Когда аффинное и проективное нулевые пространства P_2 нулевые, существенную роль играют инвариантные квадратичные формы f и φ, первое из которых кососимметрично.

Если $f \neq 0$, группа (3) пространства P_2 приводится к тождественной группе или является ортогональной (псевдоортогональной: в ds^1, ds^2 группой, кроме случая, когда φ вырожденное или тождественно нулю, или когда она имеет форму (105).

В случае ортогональной (псевдоортогональной) группы к пространству P_2 можно присоединить метрическую инвариантную связность и его группа автоморфизмов может зависить не больше чем от 3 параметров. Следовательно, с нашей точки зрения задачу можно считать решенной.

Группа автоморфизмов пространства P_2 с группой (105) зависит действительно от 3 параметров.

Итак, для пространств P_2 с аффинным нулевым кручением, но с отличными от нуля проективным кручением и кривизной $\neq 0$, имеем следующую классификацию:

1. Пространства P_2 с группой конгруэнций (71) и допускающие группу автоморфизмов с 5 параметрами.

2. Пространства P_2, допускающие группу преобразования конгруэнций (72) или (73) и группу автоморфизмов с 3 параметрами. Они имеют каноническую форму (96′) с постоянным λ или соответственно (97^{IV}).

3. Пространства P_2, для которых группа конгруэнций (3) является тождественной. Они могут иметь группу автоморфизмов с двумя параметрами, только если w_{bc}^{α} и γ_{bc}^{α} постоянны.

Если форма $f=0$, а φ выраженное группой (3) пространства P_2 является (111) или (113), причем последняя зависит от двух произвольных функций x^1, x^2. Группы автоморфизмов пространства имеют 3 соответственно 4 параметра, и действительно осуществимы.

Нужно заметить, что в случае группы (105) и (111) переменная x^1 преобразуется также проективной группой прямой.

Что касается пространства P_2 без кручения, классификация следующая:

а) Пространства P_2 без кручения, имеющие группу преобразования конгруэнций (113) и группу автоморфизмов с 4 параметрами. Они охарактеризованы $f=0$, вырожденной φ и канонической (147), где ν постоянна.

б) Пространства P_2 без кручения с группой (3) формы (105) или (111), допускающие группу автоморфизмов с 3 параметрами.

Первые характеризуются $f\neq 0$, выраженной φ и канонической формой (125′) с постоянным σ. Вторые имеют $f=0$, выраженную φ и связность (138′), где ρ постоянно.

в) Пространства P_2 без кручения с тождественной группой $d\bar{s}^{\alpha}=ds$, $(\alpha=1,2,0)$. Они имеют группу автоморфизмов с не более чем двумя параметрами и только если w_{bc}^{α}, γ_{bc}^{α} постоянны.

CLASSIFICATION DES ESPACES P_2

(RÉSUMÉ)

Ce travail fait suite à un autre [1] et contient la classification des espaces à connexion projective P_2, à deux dimensions, avec torsion et courbure, suivant les groupes de transformations projectives de congruences (3) qu'ils admettent. On donne les formes canoniques respectives de la connexion dans le système de congruences (λ^{α}), $(\alpha=1, 2, 0)$ adopté, de même que dans le système de variables (x), dans tous les cas où le groupe (3) n'est pas le groupe identité. La méthode employée est celle des congruences, de Gh. Vrănceanu [2].

Soit P_2 un espace à connexion projective à deux dimensions, rapporté aux congruences (λ^{α}), dont les arcs sont (1) et les coefficients de connexion sur les (λ^{α}), γ_{bc}^{α}, donnés par (2), Γ_{jk}^{i} étant les composants de sa connexion dans les variables x^1, x^2.

En supposant:

a) La torsion affine et projective — de composants (5) — et la courbure non-nulles, on démontre d'abord que le groupe projectif de transformations

de congruences de l'espace P_2 se réduit au groupe identité, sauf le cas où l'on a les conditions (8), (8′) ou (52′), (54), (54′) lorsque le groupe est de la forme (9), avec deux fonctions arbitraires des variables x^1, x^2, ou (52) ayant une seule fonction de x^1, x^2.

Ensuite, les espaces P_2 à torsion affine et courbure non-nulles, peuvent être classifiés de la manière suivante:

1°. Espaces P_2 à groupe de transformations de congruences (9) et groupe d'automorphismes à 4 paramètres. Ils sont caractérisés par le fait que les formes ds^1, ds^0 sont des formes invariantes différentielles totales exactes et par la forme canonique (34′) où les invariants μ et ρ sont constants.

2°. Espaces P_2 admettant le groupe de congruences (52) et un groupe d'automorphismes dépendant de 3 paramètres. Ceux-ci ont la forme ds^1 différentielle totale exacte et la forme canonique (70), avec λ, μ, ν constantes.

3°. Espaces P_2 dont le groupe (3) est l'identité $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 0)$. Ils ont, si les coefficients w_{bc}^α, γ_{bc}^α sont constants, un groupe maximum d'automorphismes à 2 paramètres.

b) La torsion affine est nulle, mais la torsion projective et la courbure sont différentes de zéro. On doit tout d'abord observer que, dans ce cas, l'espace P_2 admet effectivement un groupe projectif de transformations de congruences avec 3 fonctions arbitraires de x^1, x^2 et un groupe d'automorphismes à 5 paramètres, ce qui n'a pas lieu si la torsion de P_2 est nulle. De même, il admet un groupe de congruences de la forme (72) ou (73), à savoir dans les conditions (77), (78), (78′), (78″) ou (97), (97′), (97″) et son groupe d'automorphismes est alors à 3 paramètres tout au plus.

Ensuite, le fait que la variable x^1 se transforme, dans le premier cas, suivant le groupe projectif de la droite, ce qui n'avait pas lieu dans le cas de la courbure nulle, dans la même situation, et d'ailleurs dans les autres non plus.

c) Quand les torsions affine et projective de P_2 sont nulles, un rôle essentiel est joué par les formes quadratiques invariantes f et φ, dont la première est symétrique gauche.

Si $f \neq 0$, le groupe (3) de l'espace P_2 se réduit au groupe identité ou est le groupe orthogonal (pseudo-orthogonal) en ds^1, ds^2, sauf le cas où φ est dégénérée ou identiquement nulle et que le groupe a la forme (105).

Dans le cas du groupe orthogonal (pseudo-orthogonal), on peut attacher à l'espace P_2 une connexion métrique invariante et son groupe d'automorphismes peut dépendre de 3 paramètres au plus. De notre point de vue, le problème peut donc être considéré résolu.

Le groupe d'automorphismes d'un espace P_2 à groupe (105) dépend de 3 paramètres, effectivement.

Ainsi, *on a la classification suivante, pour les espaces P_2 à torsion affine nulle, mais à torsion projective et courbure $\neq 0$.*

1. Espaces P_2 à groupe de congruences (71) et admettant un groupe d'automorphismes à 5 paramètres.

2. Espaces P_2 admettant le groupe de transformations de congruences (72) ou (73) et à groupe d'automorphismes à 3 paramètres. Ils possèdent la forme canonique (96′), avec λ constant, ou (97^{IV}), respectivement.

3. Espaces P_2 pour lesquels le groupe de congruences est le groupe identité. Ils possèdent un groupe d'automorphismes à 2 paramètres, seulement si w_{bc}^α et γ_{bc}^α sont constants.

Quand la forme $f=0$ et φ est dégénérée, le groupe (3) de l'espace P_2 est (111) ou (113), le dernier dépendant de deux fonctions arbitraires de x^1, x^2. Ses groupes d'automorphismes sont à 3, respectivement 4 paramètres, effectivement atteints.

Il faut remarquer ici, que dans le cas du groupe (105) et (111) la variable x^1 se transforme aussi d'après le groupe projectif de la droite.

En ce qui concerne le cas des espaces P_2 sans torsion, la classification est la suivante:

a) Espaces P_2 sans torsion, ayant le groupe de transformations de congruences (113) et un groupe d'automorphismes à 4 paramètres. Ils sont caractérisés par $f = 0$, φ dégénérée et la forme canonique (147) dans laquelle ν est constant.

b) Espaces P_2 sans torsion, à groupe (3) de la forme (105) ou (111), admettant un groupe d'automorphismes à 3 paramètres.

Les premiers sont caractérisés par $f \neq 0$, φ dégénérée et la forme canonique (125′) avec σ constant. Les seconds, par $f = 0$, φ dégénérée et la connexion (138′) où ρ est constant.

c) Espaces P_2 sans torsion à groupe $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 0)$. Ils ont un groupe d'automorphismes à 2 paramètres au plus et cela si w^α_{bc}, γ^α_{bc} sont des constantes.

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. Petrescu, Studii şi Cercetări Matematice, t. III, Nr. 3—4, 1952, p. 529.
2. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Bucureşti, 1952, v. I.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul IV, Nr. 3—4, 1953

GRUPURILE DE MIŞCARE TRANSITIVE ALE SPAŢIILOR RIEMANNIENE V_5

DE

C. TELEMAN

Intr'o lucrare recentă [1] Gh. Vrănceanu a considerat grupurile de mişcare transitive ale spaţiilor V_4, în legătură cu o problemă pusă de I. P. Egorov şi anume aceea de a găsi numărul maxim al parametrilor grupului de mişcare al unui V_n neseparabil.

Un spaţiu V_n se numeşte (după E. Cartan) reductibil, dacă putem alege un sistem de coordonate astfel încât metrica spaţiului să se scrie ca suma a două metrice în variabile diferite, deci dacă spaţiul V_n poate fi considerat ca produsul direct a două spaţii V_p, V_q, unde $p + q = n$.

O teoremă datorită lui E. Cartan arată că spaţiile V_n simetrice, având grupurile de stabilitate separabile, sunt spaţii reductibile [2].

Se numeşte grup separabil un grup care se poate descompune în produsul (direct) a două grupuri cu parametri independenţi şi operând asupra a două sisteme de variabile diferite.

Pe de altă parte, Gh. Vrănceanu a arătat că spaţiile V_n cu grupuri transitive, ale căror grupuri de stabilitate G_r sunt separabile şi sunt produse directe de grupuri complete de rotaţie $G_{p(p-1)/2}$, $G_{q(q-1)/2}$, unde $p + q = n$ sunt de asemenea spaţii reductibile.

Dacă grupul de stabilitate G_r se descompune într'un produs (nu direct) de grupuri $G_{p(p-1)/2}$, $G_{q(q-1)/2}$, adică dacă parametrii grupului $G_{p(p-1)/2}$ depind de parametrii grupului $G_{q(q-1)/2}$, atunci se poate întâmpla ca spaţiul V_n să nu fie reductibil.

Aceasta rezultă din exemplul dat de Gh. Vrănceanu [1], şi anume, spaţiul V_4 (nesimetric) cu grup transitiv de mişcări, având grupul de stabilitate definit de operatorul $X_{12} + kX_{34}$.

Grupurile G_r, care lasă invariante varietăţi liniare (reale), se numesc reductibile [2]; aceste grupuri devin separabile, dacă se descompun în subgrupuri cu parametri independenţi în variabile diferite.

In lucrarea de faţă, urmând metoda dată de Gh. Vrănceanu [1], se face o clasificare a spaţiilor V_5 cu grupuri transitive de mişcări şi cu curbură variabilă, plecând dela grupurile de stabilitate, care sunt subgrupuri ale grupului complet de rotaţii din spaţiul euclidian E_5 cu cinci dimensiuni; acest grup are 10 parametri.

In prima parte a lucrării se regăsesc pe o cale directă rezultatele lui S. Medici [3], privind clasificarrea grupurilor de rotaţii din E_5. Se arată astfel

că în E_5 există, exceptând grupul complet G_{10}, un singur grup de rotaţii neseparabil: grupul G_3 dat de formulele (13). Celelalte grupuri, înafară de grupul simplectic ortogonal (17) şi de subgrupul lui (10), sunt produse directe de grupuri complete de rotaţii în două, trei sau patru variabile.

In partea a doua se arată că grupul (13) nu poate fi grupul de stabilitate complet al unui V_5 cu grup transitiv de mişcări. Rezultă deci că grupurile de stabilitate ale spaţiilor V_5 cu grupuri transitive şi cu curbură variabilă sunt separabile.

In ultima parte a lucrării se studiază spaţiile V_5 având grupurile de stabilitate separabile. Aceste spaţii au un sistem de forme Pfaff invariant faţă de grupul de automorfisme.

Vom numi spaţiu V_n separabil un spaţiu al cărui grup de transformări în el însuşi invariază două sau mai multe sisteme Pfaff complimentare. Această definiţie este în legătură cu definiţia dată de G h. V r ă n c e a n u spaţiilor V_n reductibile [4]*), cărora li se asociază o formă pătratică invariantă, de rangul $m < n$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu V_n să fie separabil este ca grupul de stabilitate să fie un grup de rotaţii reductibil (real).

Rezultă că spaţiile V_5 cu curbură variabilă sunt spaţii separabile.

Clasificând spaţiile V_5 separabile, cu grup transitiv de mişcări, arătăm că:

Grupul complet de rotaţii G_6 în patru variabile poate fi grup de stabilitate numai în spaţiile V_5 reductibile, ale căror metrici se pot scrie ca suma unei metrici cu curbură constantă în patru variabile şi a pătratului unei diferenţiale totale exacte (G h. V r ă n c e a n u). Aceste spaţii au un grup maxim de mişcări, cu 11 parametri (I. P. E g o r o v).

Spaţiile V_5 cu grupul de stabilitate (18) sunt reductibile, descompunându-se în produsul direct a două spaţii cu curbură constantă V_3 şi V_2.

Spaţiile V_5 cu grupul de stabilitate (17) au metrica

$$ds^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2 + (ds^4)^2 + (ds^5)^2, \tag{50}$$

cu $ds^1, \ldots, ds^5$ daţi de formulele (52), (53) sau (52′), (53′). Aceste spaţii sunt spaţiile ireductibile cu grup maxim G_9 de mişcări. Spaţiile din această categorie nu pot fi spaţii ale lui Einstein decât dacă avem relaţia (55); dar în acest caz ele sunt cu curbură constantă şi deci G_9 nu este grupul complet de mişcări.

Grupul de rotaţii (10) nu poate fi grupul de stabilitate complet al unui V_5 cu grup transitiv de mişcări, iar spaţiile V_5 având grupul de stabilitate (16) sunt reductibile. Deci, un spaţiu V_5 ireductibil şi cu curbură variabilă nu poate avea un grup transitiv de mişcări cu 8 parametri.

Spaţiile având metrica (50) cu $ds^1, \ldots, ds^5$ daţi de (60′), (61), (62) au un grup transitiv de mişcări cu 7 parametri, grupul de stabilitate fiind G_2 dat de (3).

I. Grupurile de rotaţii din E_5

Grupurile $G_r (r = 1, 2, 3, 4, 5)$

Grupurile G_1. Transformările unui grup de rotaţii G_1 sunt generate de un operator de forma

$$X = \alpha X_{12} + \beta X_{13} + \gamma X_{14} + \delta X + \ldots + \mu X_{45}, \tag{1}$$

unde

$$X_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

*) p. 56.

Printr'o transformare ortogonală, aplicată simultan variabilelor x^i şi $y^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, forma biliniară alternată X poate fi adusă la expresia canonică

$$X = X_{12} + \lambda X_{34}, \tag{2}$$

unde X_{12}, X_{34} sunt exprimate în noile coordonate.

Grupurile G_2. Fie X dat de (2) şi Y dat de (1) operatorii lui G_2. Efectuând o transformare ortogonală de forma

$$\overline{x}^1 = x^1 \cos\alpha - x^2 \sin\alpha, \quad \overline{x}^2 = x^1 \sin\alpha + x^2 \cos\alpha,$$

$$\overline{x}^3 = x^3 \cos\beta - x^4 \sin\beta, \quad \overline{x}^4 = x^4 \sin\beta + x^4 \cos\beta,$$

$$\overline{x}^5 = x^5,$$

putem anula coeficienţii lui X_{14} şi X_{23} din Y, deci putem lua

$$X = X_{12} + \lambda X_{34}, \tag{1'}$$

$$Y = \alpha X_{13} + mX_{24} + \gamma X_{15} + nX_{25} + pX_{34} + qX_{35} + rX_{45}. \tag{2'}$$

Egalitatea $(XY) = aX + bY$ ne dă $a = 0$, $\gamma = n = q = r = 0$, deci grupul G_2 este într'un E_4 şi se ştie atunci că poate fi adus la forma canonică [1]

$$X = X_{12}, \qquad Y = X_{34}. \tag{3}$$

Grupurile G_3. Este uşor de văzut că un G_3 nu poate conţine un G_2 real, deci dacă alegem ca primi operatori pe X şi Y daţi de (1') şi (2'), putem lua pe al treilea operator

$$Z = (XY)$$

deci

$$Z = (m - \lambda\alpha) X_{14} + nX_{15} + (-\alpha + \lambda m) X_{23} - \gamma X_{25} + \lambda r X_{35} + \lambda q X_{45}. \tag{4}$$

Trebue să avem

$$(XZ) = hY + kZ,$$

de unde

$$hp = 0 \tag{5}$$

şi

$$(1 + h + \lambda^2)\alpha - 2\lambda m = 2\lambda\alpha - (1 + h + \lambda^2) m = 0, \tag{5'}$$

$$-\lambda k\alpha + km = -k\alpha + \lambda km = 0, \tag{5''}$$

$$(h + 1)\gamma + kn = -k\gamma + (h + 1) n = 0, \tag{6}$$

$$-\lambda kq + (h + \lambda^2) r = (h + \lambda^2) q + \lambda kr = 0. \tag{7}$$

Dacă avem $k \neq 0$, putem lua $k = 1$ şi din (5'') deducem

$$m = \lambda\alpha, \quad \alpha = \lambda m,$$

deci avem sau $\alpha = m = 0$ sau $\lambda = \pm 1$, $\alpha = \pm m$.

Relaţiile (6) ne dau $\gamma = n = 0$ deci pentru $\alpha = m = 0$ trebue să luăm $\lambda = 0$, $h = 0$ în (7); obţinem atunci $Z = 0$.

Pentru $\lambda = 1$, deci $\alpha = m$, deducem din (6) şi (7) $\gamma = n = q = r = 0$ şi avem de asemenea $Z = 0$.

Cazul $\lambda = -1$ se deduce din cel precedent prin permutarea indicilor 3 şi 4.

Trebue să avem deci $k = 0$.

Presupunem $h \neq -1$; relaţiile (6) dau $\gamma = n = 0$. Dacă $\lambda = 0$, din (5') rezultă $\alpha = m = 0$, deci (4) ne dă $Z = 0$.

Fie atunci $\lambda \neq 0$, $h \neq 1$; din (5') deducem că sau $\alpha = m = 0$, deci

$$X = X_{12} + \lambda X_{34}, \quad Y = pX_{34} + q X_{35} + rX_{45}, \quad Z = \lambda (rX_{35} - qX_{45}) \tag{8}$$

şi paranteza (YZ) ne dă, ţinând seama de coeficientul lui X_{34}, $\lambda=0$, deci $Z = 0$, sau $4\lambda^2 = (1 + h + \lambda^2)^2$, deci

$$\pm 2\lambda = 1 + h + \lambda^2.$$

Schimbând eventual indicii 3 şi 4 între ei, putem lua în acest caz $2\lambda = 1 + h + \lambda^2$, deci din (5') rezultă $\alpha = m$.

Dacă $h + \lambda^2 \neq 0$ deci şi $\lambda \neq \frac{1}{2}$, avem din (7) $q = r = 0$ şi deci

$$X = X_{12} + \lambda X_{34}, \quad Y = pX_{34} + \alpha(X_{13}+X_{24}), \quad Z=\alpha(1-\lambda)(X_{14}-X_{23}). \tag{9}$$

Formând paranteza

$$(YZ) = p\alpha\,(1-\lambda)\,(X_{13} + X_{24}) + 2\alpha^2\,(1 - \lambda)\,(X_{12} - X_{34}),$$

obţinem $p = 0$, $\lambda = -1$ şi avem grupul din E_4

$$X = X_{12} - X_{34}, \quad Y = X_{13} + X_{24}, \quad Z = X_{14} - X_{23}. \tag{10}$$

Luând, în aceleaşi ipoteze ($\lambda \neq 0$, $h \neq -1$, $2\lambda = 1 + h + \lambda^2$), $h + \lambda^2 = 0$, deci $\lambda = \frac{1}{2}$ şi $h = -\frac{1}{4}$, avem din (5) $p = 0$ şi deci putem lua pentru operatorii X, Y, Z

$$\begin{aligned} X &= 2X_{12} + X_{34}, \quad Y = \alpha\,(X_{13} + X_{24}) + qX_{35} + r\,X_{15}, \\ Z &= \alpha\,(X_{14} - X_{23}) + r\,X_{35} - q\,X_{45}. \end{aligned} \tag{11}$$

Efectuând schimbarea de operatori

$$(q^2 + r^2)\,U = q\,Y + r\,Z, \quad (q^2 + r^2)\,V = r\,Y - q\,Z,$$

avem

$$\begin{aligned} U &= X_{35} + mq\,X_{13} + mq\,X_{24} + mr\,X_{14} - mr\,X_{23}, \\ V &= X_{45} + mr\,X_{13} + mr\,X_{24} - mq\,X_{14} + mq\,X_{23}, \end{aligned} \tag{12}$$

unde $m = \alpha/(q^2 + r^2)$ sau, punând $q' = mq$, $r' = mr$,

$$\begin{aligned} U &= X_{35} + q'\,X_{13} + q'\,X_{24} + r'\,X_{14} - r'\,X_{23}, \\ V &= X_{45} + r'\,X_{13} + r'\,X_{24} - q'\,X_{14} + q'\,X_{23}. \end{aligned} \tag{12'}$$

Fie $r'/q' = \operatorname{tg}\theta$; făcând transformarea de coordonate

$$\overline{x}^1 = x^1\cos\theta - x^2\sin\theta, \quad \overline{x}^2 = x^1\sin\theta + x^2\cos\theta,$$
$$\overline{x}^i = x^i \qquad (i = 3,\ 4,\ 5),$$

vom avea, ştergând barele,

$$X = 2X_{12} + X_{34}, \quad Y = X_{35} + m(X_{13} + X_{24}),$$
$$Z = X_{45} + m(-X_{14} + X_{23}). \tag{12''}$$

Paranteza

$$(YZ) = -2m^2X_{12} - (1 - 2m^2)X_{34}$$

ne dă

$$m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Luând semnul + pentru m, avem grupul

$$X = 2X_{12} + X_{34}, \quad Y = X_{35} + \frac{1}{\sqrt{3}}(X_{13} + X_{24}),$$
$$Z = X_{45} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-X_{14} + X_{23}). \tag{13}$$

Grupul corespunzând valorii lui $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ se deduce din (13), făcând transformarea

$$\overline{x}^1 = -x^1, \quad \overline{x}^2 = -x^2, \quad \overline{x}^i = x^i \qquad (i = 3,\ 4,\ 5).$$

Să presupunem acum că $h = -1$, deci din (5) rezultă $p = 0$.
Dacă $\lambda = \pm 1$, de exemplu $\lambda = 1$, din (5) avem $\alpha = m = 0$ şi deci

$$X = X_{12} + X_{34}, \quad Y = \gamma X_{15} + nX_{25} + qX_{35} + rX_{45},$$
$$Z = nX_{15} - \gamma X_{25} + rX_{35} - qX_{45} \tag{13'}$$

sau, efectuând transformarea

$$\overline{x}^5 = x^5, \quad \overline{x}^1 = x^1\cos\alpha + x^2\sin\alpha, \quad \overline{x}^2 = x^1\sin\alpha - x^2\cos\alpha \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{\gamma}\right),$$

$$\overline{x}^3 = x^3\cos\beta + x^4\sin\beta, \quad \overline{x}^4 = x^3\sin\beta - \overline{x}^4\cos\beta \left(\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{q}\right),$$

avem

$$X = X_{12} + X_{34}, \quad Y = aX_{15} + bX_{35}, \quad Z = aX_{25} + bX_{45} \tag{14}$$

şi paranteza (YZ) ne dă $a = b = 0$.

Deci, dacă $h = -1$ avem $\lambda \neq \pm 1$ şi din (7) deducem $q = r = 0$. Pentru $\lambda = 0$, obţinem

$$X = X_{12}, \quad Y = \alpha X_{13} + mX_{24} + \gamma X_{15} + nX_{25},$$
$$Z = mX_{14} - \alpha X_{23} + nX_{15} - \gamma X_{25}. \tag{15}$$

Anulând coeficienţii lui X_{34}, X_{35}, X_{45} din paranteza (YZ) obţinem $\alpha m = \alpha n = m\gamma = 0$ şi avem sau $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ şi obţinem grupul adus la forma canonică

$$X = X_{12}, \quad Y = X_{25}, \quad Z = X_{15}, \tag{16}$$

sau $\alpha = m = 0$ şi obţinem acelaşi grup din E_3.

Să considerăm în sfârşit cazul $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm 1$.

Dacă $\lambda \neq \pm 2$, ecuaţiile (5′) ne dau $\alpha = m = 0$ şi obţinem grupul (16).

Dacă $\lambda = \pm 2$, obţinem grupul (13), deoarece este suficient să permutăm între ei indicii 1, 3 şi 2, 4.

Avem deci următoarea

T e o r e m ă. *Grupurile G_1 şi G_2 din E_5 sunt într'un E_4 şi sunt generate de operatorii* (2) *şi* (3). *Grupurile G_3 sunt de asemenea într'un E_4 sau E_3* [(10) *şi* (16)], *exceptând grupul* (13).

Grupurile G_4. Să presupunem că G_4 conţine operatorul

$$X = X_{12}$$

şi fie al doilea operator al lui G_4

$$Y = \alpha X_{13} + mX_{24} + \beta X_{14} + \delta X_{23} + \gamma X_{15} + pX_{34}.$$

Dacă $\gamma = 0$, G_4 este într'un E_4 şi are forma canonică

$$X = X_{12}, \quad Y = X_{34}, \quad U = X_{13} + X_{24}, \quad V = X_{14} - X_{23}. \tag{17}$$

Să presupunem atunci $\gamma = 1$, deci

$$Y = X_{15} + \alpha X_{13} + mX_{24} + \beta X_{14} + \delta X_{23} + pX_{34}.$$

Putem lua pentru al treilea operator al lui G_4

$$Z = (XY) = -X_{25} + \delta X_{13} + mX_{14} - \alpha X_{23} - \beta X_{24}.$$

Fie în sfârşit operatorul lui G_4

$$U = aX_{13} + bX_{14} + dX_{23} + cX_{24} + fX_{34} + qX_{35} + rX_{45}$$

liniar independent de X, Y, Z. Coeficienţii f, q, r nu pot fi toţi nuli, deoarece dacă ar fi aşa, parantezele (UY), (UZ) ar conţine cel puţin unul din termenii X_{35}, X_{45}, care nu apar în niciunul din operatorii X, Y, Z, U.

Putem alege atunci în locul lui U operatorul

$$V = U + [X(XU)] = fX_{34} + qX_{35} + rX_{45}.$$

Printr'o rotaţie convenabilă în spaţiul (x^3, x^4, x^5), putem aduce operatorul V la forma canonică

$$V = X_{34}.$$

Deci G_4 conţine operatorii independenţi $X = X_{12}$, $V = X_{34}$.

Fie atunci al treilea operator

$$Y = \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \gamma X_{15} + \delta X_{23} + mX_{24} + pX_{35},$$

unde putem presupune $\gamma = 1$ şi să considerăm operatorul

$$Z = (XY) = \delta X_{13} + mX_{14} - \alpha X_{23} - \beta X_{24} - X_{25}$$

şi apoi

$$U = -(XZ) = \alpha X_{13} + \beta X_{14} + X_{15} + \delta X_{23} + m X_{24}.$$

Formând parantezele (VZ), (VU) obţinem $\alpha = \beta = \delta = m = 0$ şi avem grupul

$$X = X_{12}, \quad Y = X_{15}, \quad Z = X_{25}, \quad U = X_{34}. \tag{18}$$

Să presupunem acum că G_4 conţine operatorul $X = X_{12} + \lambda X_{34}$ cu $\lambda \neq 0$.

Putem alege alţi doi operatori

$$U = X_{15} + \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \delta X_{23} + m X_{24} + p X_{34} + q X_{35} + r X_{45},$$

$$Y = X_{25} + \alpha' X_{13} + \beta' X_{14} + \delta' X_{23} + m' X_{24} + p' X_{34} + q' X_{35} + r' X_{45}$$

şi pentru al patrulea vom lua

$$V = \alpha'' X_{13} + \beta'' X_{14} + \delta'' X_{23} + m'' X_{24} + p'' X_{34} + q'' X_{35} + r'' X_{45}.$$

Dacă q'' şi r'' sunt nuli, X şi V formează un G_2 şi cădem peste cazul precedent.

Să presupunem deci că cel puţin unul din coeficienţii q'', r'' este diferit de zero şi făcând eventual o rotaţie în planul (x^3, x^4) putem lua

$$V = X_{35} + \alpha'' X_{13} + \beta'' X_{14} + \delta'' X_{23} + m'' X_{24} + p'' X_{34}.$$

Paranteza (XV) ne dă însă, ţinând seama de termenul în X_{45}, $\lambda = 0$, deci *Singurele grupuri G_4 din E_4 sunt grupurile separabile* (17) *şi* (18).

Grupurile G_5. Raţionamentul precedent ne arată că dacă G_5 conţine operatorul X_{12} atunci el conţine un al doilea operator permutabil cu X_{12}, deci putem lua $X = X_{12}$, $Y = X_{34}$ şi fie al treilea operator

$$U = X_{15} + \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \delta X_{23} + m X_{24}.$$

Adunând lui U operatorul $[Y(YU)]$, deducem că G_5 conţine pe X_{15} şi formând paranteza (X, X_{15}), deducem că G_5 conţine operatorii

$$X_{12}, \quad X_{34}, \quad X_{15}, \quad X_{25}.$$

Luând atunci ca al cincilea operator

$$X = \alpha X_{13} + m X_{24} + r X_{35},$$

parantezele (X, X_{12}), (X, X_{34}) ne arată că $\alpha = m = r = 0$. Deci dacă există grupuri G_5, ele trebue să conţină numai operatori cu forma canonică $X = X_{12} + \lambda X_{34}$ $(\lambda \neq 0)$.

Am văzut că putem atunci alege pentru al doilea operator al lui G_5

$$V = X_{35} + \alpha'' X_{13} + \beta'' X_{14} + \delta'' X_{23} + m'' X_{24} + p'' X_{34},$$

unde putem presupune $\beta'' = \delta'' = 0$, şi fie

$$U = (XV) = -\lambda X_{45} + \ldots.$$

Am arătat că putem aduce sistemul de operatori X, U, V, la forma canonică (12″)

$$X = 2X_{12} + X_{34}, \quad U = X_{35} + m(X_{13} + X_{24}),$$

$$V = X_{45} + m(-X_{14} + X_{23}).$$

Considerând acum operatorii lui G_5, liniar independenţi de X, U, V,

$$Y = \gamma X_{15} + \alpha X_{13} + \beta X_{14} + \delta X_{23} + m X_{24} + p X_{34},$$

$$Z = n X_{25} + \alpha' X_{13} + \beta' X_{14} + \delta' X_{23} + m' X_{24} + p' X_{34},$$

putem presupune $Z = (X\,Y)$ şi trebue atunci să avem

$$(XZ) = h\,Y + k\,Z,$$

de unde, ţinând seama de rezultatele privitoare la grupurile G_3, deducem că dacă $\gamma = n = 0$, atunci $X = X_{12} + X_{34}$, iar dacă $\gamma \neq 0$, $n \neq 0$, atunci avem $X = X_{12} + 2X_{34}$.

Comparând cu expresia lui X găsită mai sus, deducem următoarea

Teoremă. *Nu există grupuri G_5 în E_5.*

Grupurile G_r ($r = 6, 7, 8, 9$)

Un grup G_r ($r > 5$) conţine întotdeauna un subgrup $G'_{r'}$ din E_4, cu $r' = 2, 3, 4$.

Intr'adevăr, X_i fiind operatorii lui G_r, putem să presupunem că am rezolvat patru din ei în raport cu X_{15}, X_{25}, X_{35}, X_{45} şi atunci obţinem sisteme de 2, 3, 4, 5 operatori numai în variabilele x^1, x^2, x^3, x^4 şi, evident, aceşti operatori trebue să formeze grupuri G_2, G_3, G_4, G_5.

Nu există însă G_5 în E_4, deci rămâne să vedem care din grupurile din E_4 pot fi conţinute într'un grup din E_5 cu 6, 7 sau 8 parametri.

Dacă un grup G_r conţine grupul G_2 definit de

$$X = X_{12}, \quad Y = X_{34},$$

este uşor de văzut că G_r este sau grupul complet de rotaţii G_6 din E_4 dat de X_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$), sau grupul G_{10} din E_5 dat de X_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$).

Acelaşi rezultat se obţine dacă se consideră unul din grupurile (10), (16), (17).

Am obţinut în rezumat următorul rezultat:

Exceptând grupul complet de rotaţii din E_5, singurele grupuri de rotaţii, care nu sunt într'un E_4, sunt grupurile (13) *cu 3 parametri şi* (18) *cu 4 parametri.*

II. Spaţiile riemanniene V_5 cu grup transitiv de mişcări şi cu grup de stabilitate neseparabil

Să arătăm acum, utilizând metoda dată de Gh. Vrănceanu [1], că grupul de rotaţii neseparabil

$$X = X_{12} + 2X_{34}, \quad Y = \sqrt{3}\,X_{25} + X_{13} + X_{24}, \qquad (19)$$

$$Z = \sqrt{3}\,X_{15} - X_{14} + X_{23}$$

nu poate fi conţinut într'un grup transitiv de mişcări G_8.

Fie într'adevăr

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \alpha^k_{ij} x^j \frac{\partial f}{\partial x^k} + \ldots \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

operatorii care formează împreună cu X, Y, Z grupul transitiv G_8.

Avem relaţiile de structură de forma

$$(X\,Y) = Z, \qquad (Z\,X) = Y, \qquad (YZ) = X \tag{20}$$

$$(A_1 X) = A_2 + \ldots \qquad (A_2 X) = -A_1 + \ldots \qquad (A_3 X) = 2A_4 + \ldots$$

$$(A_1 Y) = A_3 + \ldots \qquad (A_2 Y) = A_4 + \sqrt{3}\,A_5 + \ldots \qquad (A_3 Y) = -A_1 + \ldots$$

$$(A_1 Z) = A_4 + \sqrt{3}\,A_5 + \ldots \qquad (A_2 Z) = A_3 + \ldots \qquad (A_3 Z) = -A_2 + \ldots$$

$$(A_4 X) = -2A_3 + \ldots \qquad (A_4 Z) = A_1 + \ldots \qquad (A_5 Y) = -\sqrt{3}\,A_2 + \ldots$$

$$(A_4 Y) = -A_2 + \ldots \qquad (A_5 X) = 0 + \ldots \qquad (A_5 Z) = -\sqrt{3}\,A_1 + \ldots,$$

punctele ţinând locul termenilor ce conţin variabilele x^i.

Putem alege convenabil operatorii A_i astfel încât să avem

$$(A_1 X) = A_2, \; (A_1 Y) = A_3, \; (A_1 Z) = -A_4 + \sqrt{3}\,A_5 \tag{21}$$

$$(A_2 Y) = A_4 + \sqrt{3}\,A_5, \quad (A_2 X) = -A_1 + mY + nZ \tag{21'}$$

şi fie

$$(A_2 Z) = A_3 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z. \tag{22}$$

Identitatea lui Jacobi formată cu X, Y şi A_1 ne dă

$$(A_3 X) = 2A_4. \tag{23}$$

Apoi, din identitatea formată cu A_1, X, Z, deducem

$$(A_4 X) - \sqrt{3}\,(A_5 X) + 2A_3 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \tag{24}$$

şi din (A_1, Y, Z),

$$(A_4 Y) - \sqrt{3}\,(A_5 Y) + (A_3 Z) - A_2 = 0. \tag{25}$$

Identitatea formată cu A_2, X, Y dă

$$(A_4 X) + \sqrt{3}\,(A_5 X) + 2A_3 + (n + \alpha) X + \beta Y + \gamma Z = 0$$

şi, comparând cu (24), se obţine

$$(A_4 X) = -2A_3 - \left(\frac{n}{2} + \alpha\right) X - \beta Y - \gamma Z \tag{26}$$

$$(A_5 X) = -\frac{n}{2\sqrt{3}}\, X. \tag{27}$$

Formând identitatea Jacobi cu operatorii A_2, X, Z, avem

$$(A_3 X) = 2A_4 + mX - \gamma Y + \beta Z,$$

de unde, comparând cu (23),

$$m = \beta = \gamma = 0. \tag{26'}$$

Identitatea (A_2, Y, Z) dă

$$(A_4 Z) + \sqrt{3}\,(A_5 Z) - (A_3 Y) + A_1 - nZ - \alpha Z = 0, \tag{28}$$

iar din (A_3, X, Y) se deduce

$$2(A_4 Y) - (A_3 Z) - [(A_3 Y) X] = 0,$$

sau, punând

$$(A_3 Y) = -A_1 + aX + bY + cZ, \tag{29}$$

$$(A_3 Z) = -A_2 + pX + qY + rZ, \tag{30}$$

se găseşte

$$(A_4 Y) = -A_2 + \frac{p}{2} X + \frac{c+q}{2} Y + \frac{r-b}{2} Z. \tag{31}$$

Identitatea (A_5, X, Y) este deci verificată, iar identitatea (A_5, X, Z) ne arată că $n=0$, deci $q=\alpha=0$ şi deci şi identitatea (A_5, X, Z) este verificată.

Ţinând seama de relaţia (31) în (25), avem

$$(A_5 Y) = -\sqrt{3} A_2 + \frac{3p}{2\sqrt{3}} X + \frac{c+3q}{2\sqrt{3}} Y + \frac{3r-b}{2\sqrt{3}} Z. \tag{32}$$

Identitatea (A_3, X, Z) dă

$$(A_4 Z) = A_1 - \frac{a}{2} X - \frac{b-r}{2} Y - \frac{n+q}{2} Z \tag{33}$$

şi din (28) rezultă, ţinând seama de (29),

$$(A_5 Z) = -\sqrt{3} A_1 + \frac{3a}{2\sqrt{3}} X + \frac{3b-r}{2\sqrt{3}} Y + \frac{3n+q+2c+2\alpha}{2\sqrt{3}} Z. \tag{34}$$

Formând identitatea cu A_3, Z, Y, găsim

$$a = p = 0, \qquad r = -b. \tag{34'}$$

Identitatea formată cu A_4, X, Y dă

$$\alpha = n + q - \frac{3c}{2} \tag{34''}$$

şi identitatea (A_4, X, Z) dă, ţinând seama de (34″),

$$q = 2(n-c), \qquad \alpha = 3n - \frac{7c}{2}. \tag{35}$$

In sfârşit, din identitatea (A_4, Y, Z) deducem

$$c = 0, \quad \text{deci} \quad q = 2n, \quad \alpha = 3n \tag{35'}$$

şi deci şi identitatea (A_5, Y, Z) este verificată.

Ţinând seama de relaţiile (26′), (34′), (35′), (35″) în formulele (21′), (22), (23), (26), (27), (29), (30), (31), (32), (33) şi (34) şi notând

$$\overline{A}_5 = \sqrt{3} A_5,$$

avem relaţiile de structură pentru G_8

$$\left.\begin{array}{llll} (A_1X)=A_2, & (A_2X)=-A_1, & (A_3X)=2A_4, & (A_4X)=-2A_3, \\ (A_1Y)=A_3, & (A_2Y)=\overline{A}_5+A_4, & (A_3Y)=-A_1-bY, & (A_4Y)=-A_2-bZ, \\ (A_1Z)=\overline{A}_5-A_4, & (A_2Z)=A_3, & (A_3Z)=-A_2-bZ, & (A_4Z)=A_1-bY, \\ (\overline{A}_5X)=0, & (\overline{A}_5Y)=-3A_2-2bZ, & (\overline{A}_5Z)=-3A_1+2bY. & \end{array}\right\} \quad (36)$$

Ţinând seama de relaţiile de structură ale lui G_8, date de (20) şi (36) în identităţile Iacobi, formate cu operatorii A_i, A_j şi X, Y sau Z, obţinem succesiv din (A_1, A_2, X)

$$(A_1, A_2) = \alpha X + k\overline{A}_5; \quad (36')$$

din (A_1, A_3, Y)

$$(A_1 A_3) = bA_1 - 3mA_4 + m\overline{A}_5 - mbX + nY; \quad (36'')$$

din (A_2, A_3, Z)

$$(A_2 A_3) = -bA_2 + 3m'A_4 + m'\overline{A}_5 - m'bX + n'Z; \quad (37)$$

din (A_3, A_4, X)

$$(A_3 A_4) = \alpha' X + k'\overline{A}_5; \quad (37')$$

din (A_3, A_4, Y)

$$\begin{aligned} (A_1 A_4) = {} & (3k' + b) A_2 + 3m'A_4 + m'\overline{A}_5 + \\ & + (-\alpha' + 2bk' + 2b^2 + n') Z - m'bX; \end{aligned} \quad (38)$$

din (A_3, A_4, Z)

$$(A_2 \ A_4) = (3k' + b) A_1 + 3mA_4 - m\overline{A}_5 + (\alpha' - 2bk' - 2b^2 - n) Y + mbX. \quad (39)$$

Ţinând seama de relaţiile (37) şi (38) în identitatea (A_1, A_2, Y), avem

$$(A_1 \overline{A}_5) = -(3k + 3k' + 2b) A_2 + (\alpha + \alpha' - 2bk - 2bk' - 2b^2) Z, \quad (40)$$

iar identitatea (A_1, A_2, Z) ne dă, ţinând seama de (36'') şi (39),

$$(A_2 \ \overline{A}_5) = (3k + 3k' + 2b) A_1 + (\alpha + \alpha' - 2bk - 2bk' - 2b^2) Y. \quad (41)$$

Identitatea formată cu A_1, A_3, X dă

$$m = m' = k' = 0, \quad -2\alpha' + 4b^2 + 3n' + n = 0, \quad (41')$$

iar identitatea formată cu A_2, A_3, X ne arată că

$$n' + 3n - 2\alpha' + 4b^2 = 0$$

şi, comparând cu (41'), găsim

$$n' = n, \quad \alpha' = 2n + 2b^2. \quad (42)$$

Identitatea (A_1, A_3, Z) ne dă

$$(A_3 \overline{A}_5) = 2bA_4 - (k + 2b)\overline{A}_5 - (n + \alpha - \alpha') X, \quad (42')$$

iar din identitatea (A_1, A_4, X) deducem

$$4n - 2\alpha' + 2b^2 = 0,$$

de unde, comparând cu (42),

$$b = 0, \qquad \alpha' = 2n. \tag{43}$$

Din identitatea formată cu A_1, A_4, Y deducem

$$\alpha = n, \qquad K = 0. \tag{44}$$

şi identitatea (A_1, A_4, Z) dă

$$(A_4 \bar{A}_5) = 0 \tag{45}$$

Relaţiile (36′), (36″), (37), (37′), (38), (39), (40), (41), (42′), (45) se scriu, ţinând seama de (41′), (42), (43), (44),

$$(A_1 A_2) = n X, \quad (A_1 A_3) = nY, \quad (A_1 A_4) = -nZ, \quad (A_1 \bar{A}_5) = 3nZ$$

$$(A_2 A_3) = n Z, \quad (A_2 A_4) = n Y, \quad (A_2 \bar{A}_5) = 3 nY$$

$$(A_3 A_4) = 2n Y, \quad (A_3 \bar{A}_5) = (A_4 \bar{A}_5) = 0.$$

In sfârşit, ţinând seama de aceste relaţii în identitatea formată cu A_2, A_3 şi A_4, obţinem $n = 0$, deci A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 formează un grup G_5 de translaţii.

Aceasta înseamnă că spaţiul V_5 este euclidian.

Avem deci următoarea

Teoremă. *Grupul de rotaţii* (19) *nu poate fi grupul complet de stabilitate al unui spaţiu* V_5 *cu grup transitiv de mişcări.*

III. Spaţiile riemanniene V_5 cu grupuri de stabilitate separabile şi cu grupuri transitive de mişcări

Vom studia acum spaţiile V_5 având ca grupuri de stabilitate grupurile de rotaţii în trei sau patru variabile date de formulele (2), (3), (10), (16), (17), (18), şi grupul complet de rotaţii G_6 din E_4.

După o teoremă a lui E. Cartan, spaţiile V_n simetrice, având grupuri de stabilitate separabile, sunt reductibile, adică metrica lor se descompune în suma a două metrici cu variabile separate [2]*).

Avem deci următoarea

Teoremă. *Spaţiile* V_5 *simetrice cu curbură variabilă sunt reductibile.*

Gh. Vrănceanu a arătat că spaţiile V_n cu grup transitiv de mişcări şi ale căror grupuri de stabilitate sunt produse directe de grupuri complete de rotaţii în spaţii euclidiene E_p, E_q $(p + q = n)$ sunt reductibile [4]**). Deci:

Spaţiile V_5 *cu grupuri transitive de mişcări şi având grupurile de stabilitate* (18) *sau* G_6 *sunt reductibile.*

In general, ţinând seama că grupurile de stabilitate ale spaţiilor V_5 sunt separabile, avem următoarea

Teoremă***). *Spaţiile* V_5 *cu curbură variabilă sunt separabile.*

---

*) p. 233.
**) p. 28.
***) Gh. Vrănceanu.

Intr'adevăr, grupurile de stabilitate fiind separabile, în fiecare punct O al spaţiului V_5 există două varietăţi liniare complimentare invariate de grupul de stabilitate al punctului O şi varietăţile liniare ale diferitelor puncte se corespund prin transformările grupului complet de mişcări G_r a lui V_5. Prin urmare, grupul G_r invariază două sisteme complimentare de forme Pfaff, deci spaţiul V_5 este separabil.

Proprietatea este generală şi se poate enunţa astfel:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu să fie separabil este ca grupul de stabilitate să fie reductibil (real).

Spaţiile V_5 având grupul de stabilitate (17). Grupul de rotaţii (17) poate fi conţinut într'un grup transitiv G_9 având structura

$$\left.\begin{aligned}
&(XY)=0,\quad (XU)=-(YU)=V,\quad (YV)=-(XV)=U,\quad (UV)=2X-2Y\\
&(A_1Y)=(A_2Y)=(A_3X)=(A_4X)=0,\quad (A_2X)=(A_3U)=(A_4V)=-A_1\\
&(A_1X)=(A_3V)=-(A_4U)=A_2,\quad (A_1U)=-(A_2V)=-(A_4Y)=A_3\\
&(A_1V)=(A_2U)=(A_3Y)=A_4\\
&(A_1A_2)=-4\lambda X-2\lambda Y+\mu A_5,\quad (A_3A_4)=-2\lambda X-4\lambda Y+\mu A_5\\
&(A_5X)=(A_5Y)=(A_5U)=(A_5V)=(A_5A_i)=0\quad (i=1,2,3,4)\\
&(A_1A_3)=(A_2A_4)=-\lambda U,\quad (A_2A_3)=-(A_1A_4)=\lambda V
\end{aligned}\right\}\quad (46)$$

unde A_α $(\alpha=1,\ldots,5)$ sunt operatori de forma

$$A_\alpha=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}+\ldots,$$

termenii nescrişi fiind de ordinul I cel puţin în variabilele x^α.

Punând

$$X=A_6,\quad Y=A_7,\quad U=A_8,\quad V=A_9,$$

structura (46) se scrie

$$(A_iA_j)=C_{ij}^hA_h,\qquad (47)$$

unde constantele C_{ij}^h nenule au valorile

$$\left.\begin{aligned}
&c_{26}^1=c_{38}^1=c_{49}^1=-1,\quad c_{16}^2=c_{39}^2=-c_{48}^2=1,\quad c_{18}^3=-c_{29}^3=-c_{47}^3=1,\\
&c_{19}^4=c_{28}^4=c_{37}^4=1,\quad c_{12}^5=c_{34}^5=\mu,\\
&c_{89}^6=2,\quad c_{12}^6=-4\lambda,\quad c_{34}^6=-2\lambda,\quad c_{89}^7=-2,\quad c_{12}^7=-2\lambda,\quad c_{34}^7=-4\lambda,\\
&c_{13}^8=c_{24}^8=-\lambda,\quad c_{79}^8=-c_{69}^8=1,\quad c_{23}^9=-c_{14}^9=\lambda,\quad c_{68}^9=-c_{78}^9=1.
\end{aligned}\right\}\quad (47')$$

Notând cu $ds^1,\ldots,ds^9$ formele Pfaff invariante din spaţiul parametrilor a^i ai grupului G_9, ecuaţiile Maurer—Cartan

$$\Delta s^i=c_{jk}^i[ds^j\,ds^k]$$

se scriu

$$\left.\begin{aligned}
\Delta s^1 &= -[ds^2\, ds^6] - [ds^3\, ds^8] - [ds^4\, ds^9] \\
\Delta s^2 &= [ds^1\, ds^6] + [ds^3\, ds^9] - [ds^4\, ds^8] \\
\Delta s^3 &= [ds^1\, ds^8] - [ds^2\, ds^9] - [ds^4\, ds^7] \\
\Delta s^4 &= [ds^1\, ds^9] + [ds^2\, ds^8] + [ds^3\, ds^7] \\
\Delta s^5 &= \mu\,[ds^1\, ds^2] + \mu\,[ds^3\, ds^4]
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta s^6 &= -4\lambda\,[ds^1\, ds^2] - 2\lambda\,[ds^3\, ds^4] + 2\,[ds^8\, ds^9] \\
\Delta s^7 &= -2\lambda\,[ds^1\, ds^2] - 4\lambda\,[ds^3\, ds^4] - 2\,[ds^8\, ds^9] \\
\Delta s^8 &= -\lambda\,[ds^1\, ds^3] - \lambda\,[ds^2\, ds^4] - [ds^6\, ds^9] + [ds^7\, ds^9] \\
\Delta s^9 &= \lambda\,[ds^2\, ds^3] - \lambda\,[ds^1\, ds^4] + [ds^6\, ds^8] - [ds^7\, ds^8]
\end{aligned}\right\} \tag{48'}$$

Relaţiile (48) ne arată că sistemele Pfaff

$$ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = 0 \quad \text{şi} \quad ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = ds^5 = 0$$

sunt complet integrabile; putem deci să facem printr'o transformare convenabilă a parametrilor a^i, astfel încât

$$\begin{aligned}
ds^h &= \lambda^h_k\, da^k \qquad (h, k = 1, \ldots, 4) \\
ds^5 &= \lambda^5_k\, da^k + \lambda^5_5\, da^5,
\end{aligned} \tag{48''}$$

unde λ^h_k, λ^5_k, λ^5_5 sunt funcţii de $a^1, \ldots, a^9$ cu $\lambda^5_5 \,|\, \lambda^h_k \,| \neq 0$.

Să considerăm forma pătratică

$$ds_1^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^4)^2 \tag{49}$$

şi să arătăm că ds_1^2 nu depinde de variabilele a^6, a^7, a^8, a^9 şi a^5.

Intr'adevăr, considerând două elemente liniare da, δa [5],

$$(da^1, \ldots, da^4, da^5 = \ldots = da^9 = 0),$$

$$(\delta a^1 = \delta a^2 = \delta a^3 = \delta a^4 = 0,\ \delta a^5,\ \delta a^6, \ldots, \delta a^9),$$

avem $\delta s^i = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $d\delta s^i = 0$, deci $\delta ds^i = \Delta s^i$, de unde, ţinând seama de relaţiile (48),

$$\begin{aligned}
\delta ds^1 &= -ds^2\, \delta s^6 - ds^3\, \delta s^8 - ds^4\, \delta s^9 \\
\delta ds^2 &= ds^1\, \delta s^6 + ds^3\, \delta s^9 - ds^4\, \delta s^8 \\
\delta ds^3 &= ds^1\, \delta s^8 - ds^2\, \delta s^9 - ds^4\, \delta s^7 \\
\delta ds^4 &= ds^1\, \delta s^9 + ds^2\, \delta s^8 + ds^3\, \delta s^7
\end{aligned}$$

şi deci,

$$\delta\,(ds_1^2) = 2 \sum_1^4 ds^i\, \delta ds^i = 0.$$

La fel se arată că forma Pfaff ds^5 nu depinde de variabilele a^6, a^7, a^8, a^9 şi deci forma pătratică

$$ds^2 = ds_1^2 + (ds^5)^2 \tag{50'}$$

este independentă de $a^6, \ldots, a^9$.

Să presupunem că a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 sunt coordonatele x^α ale unui punct variabil din V_5 şi că $a^6, \ldots, a^9$ sunt variabilele secundare care intervin în ecuaţiile de echivalenţă cu el însuşi ale spaţiului V_5. Dând valori fixe acestor variabile, să căutăm o soluţie particulară a sistemului (48), (48'), de forma

$$ds^\alpha = A^\alpha_\beta \, ds^\beta \quad (\alpha = 6, 7, 8, 9; \quad \beta = 1, 2, \ldots, 5).$$

Găsim astfel

$$ds^6 = 2m\, ds^2, ds^7 = m\, ds^2, ds^8 = m\, ds^3, ds^9 = m ds^4 \; (m^2 = -\lambda)$$

şi ecuaţiile (48) devin

$$\begin{aligned} &\Delta s^1 = 0, \; \Delta s^2 = 2m\,[ds^1\, ds^2] + 2m\,[ds^3\, ds^4] \\ &\Delta s^3 = m\,[ds^1\, ds^3], \; \Delta s^4 = m\,[ds^1\, ds^4] \\ &\Delta s^5 = \mu\,[ds^1\, ds^2] + \mu\,[ds^3\, ds^4]. \end{aligned} \tag{51}$$

Sistemul (51) are soluţia, pentru $m \neq 0$,

$$\left.\begin{aligned} &ds^1 = dx^1, \; ds^2 = e^{-2mx^1}(dx^2 - 2mx^3\, dx^4) \\ &ds^3 = e^{-mx^1} dx^3, \quad ds^4 = e^{-mx^1} dx^4 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$ds^5 = dx^5 + \frac{\mu}{2m} e^{-2mx^1} dx^2 - \mu x^3 e^{-2mx^1} dx^4. \tag{53}$$

Dacă $m = 0$, avem soluţia

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = dx^2, \quad ds^3 = dx^3, \quad ds^4 = dx^4 \tag{52'}$$

$$ds^5 = dx^5 - \mu x^1\, dx^2 - \mu x^3\, dx^4. \tag{53'}$$

Metrica spaţiului V_5 este

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^5)^2, \tag{54}$$

unde ds^i au valorile (52), (53) sau (52'), (53').

Spaţiile V_5 astfel obţinute sunt spaţii cu formă Pfaff invariantă ds^5. Forma pătratică (49) este de asemenea un invariant; se observă de altfel că ds_1^2 este metrica unui spaţiu Vrănceanu V_4 [1] în variabilele x^1, x^2, x^3, x^4 dacă $m \neq 0$ şi metrica unui spaţiu euclidian E_4 dacă $m = 0$.

Dacă $\mu = 0$, spaţiile [(52), (53)] sunt reductibile; ele sunt produsul direct al unui spaţiu Vrănceanu care posedă un grup G_8 şi al unei drepte euclidiene.

Coeficienţii de rotaţie ai lui Ricci se deduc din formula [6]*)

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}\left(w^a_{bc} + w^b_{ca} + w^c_{ba}\right),$$

unde w^a_{bc} sunt coeficienţii covarianţilor biliniari (51).

*) p. 50, vol. I.

Avem, pentru coeficienţii γ^a_{bc} nenuli,

$$-\gamma^1_{22}=\gamma^2_{12}=2m,\quad \gamma^2_{34}=-\gamma^2_{43}=-\gamma^3_{24}=-\gamma^3_{23}=\gamma^4_{32}=m,$$

$$-\gamma^1_{33}=\gamma^3_{13}=m,\ -\gamma^1_{44}=\gamma^4_{14}=m,\ \gamma^5_{12}=-\gamma^5_{21}=-\gamma^1_{25}=-\gamma^1_{52}=$$

$$=\gamma^2_{15}=\gamma^2_{51}=\frac{\mu}{2}$$

$$\gamma^5_{34}=-\gamma^5_{43}=-\gamma^3_{45}=-\gamma^3_{54}=\gamma^4_{35}=\gamma^4_{53}=\frac{\mu}{2}.$$

Tonsorul de curbură contractat are componentele γ_{ii},

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=\gamma_{44}=-6m^2-\frac{\mu^2}{2},\quad \gamma_{55}=\mu^2,$$

deci spaţiile V_5 sunt spaţii ale lui Einstein dacă

$$-4m^2=4\lambda=\mu^2. \tag{55}$$

In acest caz însă, spaţiul este cu curbură constantă pozitivă $K=4\lambda=\mu^2$.

Rezultatul era de aşteptat, deoarece un spaţiu V_5 cu curbură constantă pozitivă K poate fi privit ca o hipersferă în spaţiul euclidian E_6. Spaţiul V_5 are atunci ca grup de mişcări grupul de rotaţii simplectic G^*_9, definit de operatorii

$$X_{13}+X_{24},\ X_{14}-X_{23},\ X_{12},\ X_{34},\ X_{12}+X_{34}+X_{56},\ X_{15}+X_{26},$$
$$X_{35}+X_{46},\ X_{16}-X_{25},\ X_{36}-X_{45},$$

iar grupul de stabilitate al unui punct oarecare, de exemplu al punctului P având în E_6 coordonatele $x^1=\ldots=x^5=0$, $x^5=\frac{1}{\sqrt{K}}$, este grupul (17).

In rezumat, avem următoarea

Teoremă. *Spaţiile V_5 neseparabile, cu grup maxim transitiv G_9 de mişcări, sunt spaţiile cu formă Pfaff invariantă având grupul de stabilitate* (17) *şi metrica dată de formulele* [(54), (52), (53)] sau [(54), (52′), (53′)] *cu* $\mu\neq 0$. *Structura grupului G_9 este definită de relaţiile* (47), (47′) *cu* $\lambda=-m^2$. *Dacă* $\mu^2=-4m^2=4\lambda$, *spaţiul V_5 este cu curbură constantă şi deci G_9 nu este grupul complet de mişcări; acesta este singurul caz în care V_5 este un spaţiu al lui Einstein.*

Spaţiile V_5 au un grup simplu transitiv, real, dacă m este real, având structura

$$(X_1X_2)=2mX_2+\mu X_5,\quad (X_1X_3)=mX_3,\quad (X_1X_4)=mX_4,\quad (X_1X_5)=0$$

$$(X_2X_3)=(X_2X_4)=(X_2X_5)=(X_3X_5)=(X_4X_5)=0,\quad (X_3X_4)=2mX_2+\mu X_5.$$

Spaţiile V_5 având grupul de stabilitate 10. Grupul cu trei parametri.

$$X=X_{12}-X_{34},\quad Y=X_{13}+X_{24},\quad Z=X_{14}-X_{23} \tag{10}$$

este conţinut într'un grup G_8 transitiv în cinci variabile, depinzând de trei constante arbitrare α, β, γ.

Intr'adevăr, considerând cinci operatori de forma

$$A_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \ldots \ (\alpha = 1, \ldots, 5),$$

se găseşte structura

$$\left.\begin{aligned}
&(XY) = 2Z, \quad (YZ) = 2X, \quad (ZX) = 2Y \\
&-(A_2X) = -(A_3Y) = -(A_4Z) = A_1, \quad (A_1X) = -(A_4Y) = (A_3Z) = A_2 \\
&(A_4X) = -(A_1Y) = (A_2Z) = A_3, \quad -(A_3X) = (A_2Y) = (A_1Z) = A_4 \\
&(A_1A_2) = (A_3A_4) = \alpha A_5, \ (A_1A_3) = -(A_2A_4) = \beta A_5, \ (A_1A_4) = (A_2A_3) = \gamma A_5 \\
&(A_5X) = (A_5Y) = (A_5Z) = (A_hA_5) = 0 \quad (h = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Notând $X = A_6$, $Y = A_7$, $Z = A_8$, ecuaţiile Maurer-Cartan ale grupului G_8 sunt

$$\left.\begin{aligned}
\Delta s^1 &= -[ds^2\, ds^6] - [ds^3\, ds^7] - [ds^4\, ds^8] \\
\Delta s^2 &= \ \ [ds^1\, ds^6] + [ds^3\, ds^8] - [ds^4\, ds^7] \\
\Delta s^3 &= -[ds^1\, ds^7] + [ds^2\, ds^8] - [ds^4\, ds^6] \\
\Delta s^4 &= \ \ [ds^1\, ds^8] + [ds^2\, ds^7] - [ds^3\, ds^6] \\
\Delta s^5 &= \alpha[ds^1\, ds^2] + \alpha[ds^3\, ds^4] + \beta[ds^1\, ds^3] - \\
&\qquad - \beta[ds^2\, ds^4] + \gamma[ds^1\, ds^4] + \gamma[ds^2\, ds^3] \\
\Delta s^6 &= 2[ds^7\, ds^8], \ \Delta s^7 = -2[ds^6\, ds^8], \ \Delta s^8 = 2[ds^6\, ds^7].
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Putem şi aici să ne folosim de formulele (48″) şi interpretând parametrii $a^1, \ldots, a^5$ drept coordonatele curente în V_5, se verifică uşor că formulele (49) şi ds^5 nu depind de variabilele secundare a^6, a^7, a^8, deci forma pătratică (54) este metrica lui V_5.

Relaţiile (56) ne arată că operatorii A_α definesc un grup G_5 simplu transitiv în V_5; ecuaţiile Maurer-Cartan ale acestui grup sunt

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta s^1 = \Delta s^2 = \Delta s^3 = \Delta s^4 = 0, \\
\Delta s^5 &= \alpha[ds^1\, ds^2] + \alpha[ds^3\, ds^4] + \beta[ds^1\, ds^3] - \beta[ds^2\, ds^4] + \\
&\quad + \gamma[ds^1\, ds^4] - \gamma[ds^2\, ds^3]
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

şi ele se pot deduce din relaţiile (57), dând valori fixe variabilelor secundare şi folosind soluţia particulară

$$ds^6 = ds^7 = ds^8 = 0.$$

Sistemul (58) are soluţia

$$\left.\begin{aligned}
&ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = dx^2, \quad ds^3 = dx^3, \quad ds^4 = dx^4, \\
&ds^5 = dx^5 + (\alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4)dx^1 + (\gamma x^3 - \beta x^4)\, dx^2 + \alpha x^4\, dx^3
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

şi metrica spaţiului V_5 este

$$ds^2 = [1 + (\alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4)^2]\ (dx^1)^2 + 2\,dx^1\,(\alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4)\ [(\gamma x^3 - \beta x^4)\,dx^2 + \alpha x^4\,dx^3 + dx^5]$$
$$+ [1 + (\gamma x^3 - \beta x^4)^2]\,(dx^2)^2 + 2\,dx^2\,(\gamma x^3 - \beta x^4)\,(\alpha x^4\,dx^3 + dx^5) +$$
$$+ [1 + \alpha^2\,(x^4)^2]\,(dx^3)^2 + 2\,\alpha x^4\,dx^3\,dx^5 + (dx^4)^2 + (dx^5)^2.$$

Dacă $\beta = \gamma = 0$, obţinem spaţiile [(54), (52′), (53′)] şi deci G_8 nu este grupul complet de mişcări.

Să observăm însă că printr'o transformare ortogonală cu coeficienţi constanţi, aplicată formulelor $ds^1, \ldots, ds^4$, putem aduce covariantul biliniar ΔS^5 din (58) la forma canonică

$$\Delta s^5 = \alpha\,[ds^1\,ds^2] + \alpha\,[ds^3\,ds^4]$$

şi obţinem atunci spaţiile [(54), (52′), (53′)], deci

Grupul de rotaţie (10) *nu poate fi conţinut într'un grup transitiv complet* G_8 *de mişcări în* V_5.

Se arată uşor că spaţiile V_5 având grupul de stabilitate (16) sunt separabile, metrica lor fiind de forma

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

unde ds_1^2 este o metrică cu curbură constantă în variabilele x^1, x^2, x^5, iar ds_2^2 o metrică în variabilele x^3, x^4, cu grup simplu transitiv de mişcări.

Avem deci următorul rezultat:

Spaţiile V_5 *neseparabile nu pot avea un grup complet transitiv cu* 8 *parametri.*

Spaţiile V_5 **având grupul de stabilitate** G_2 **dat de (3).** Aceste spaţii au fost găsite de St. Petrescu ca spaţii V_5 în care se poate scufunda un spaţiu neolonom V_5^4 cu grup transitiv de mişcări G [7] *).

Structura grupului G_7 se poate scrie

$$(XY) = 0, \quad (A_1X) = A_2, \quad (A_2X) = -A_1, \quad (A_1A_2) = k_1X + \alpha A_5,$$
$$(A_3Y) = A_4, \quad (A_4Y) = -A_3, \quad (A_3A_4) = k_2\,Y + \beta A_5, \quad (A_5X) = (A_5Y) = 0$$
$$(A_1A_5) = (A_2A_5) = (A_3A_5) = (A_4A_5) = 0,$$
$$(A_1A_3) = (A_1A_4) = (A_2A_3) = (A_2A_4) = 0,$$

iar ecuaţiile Maurer-Cartan sunt

$$\left.\begin{aligned}
\Delta s^1 &= -[ds^2\,d\sigma_1] \\
\Delta s^2 &= \ \ [ds^1\,d\sigma_1] \\
\Delta s^3 &= -[ds^4\,d\sigma_2] \\
\Delta s^4 &= \ \ [ds^3\,d\sigma_2] \\
\Delta s^5 &= \alpha\,[ds^1\,ds^2] + \beta\,[ds^3\,ds^4] \\
\Delta\sigma_1 &= k_1\,[ds^1\,ds^2] \\
\Delta\sigma_2 &= k_2\,[ds^3\,ds^4],
\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

*). p. 65.

unde $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ au indicii operatorilor X, Y. Aceste relaţii sunt satisfăcute dacă luăm în V_5

$$ds^1 = \frac{dx^1}{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]}, \quad ds^2 = \frac{dx^2}{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} \tag{60'}$$

$$ds^3 = \frac{dx^3}{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]}, \quad ds^4 = \frac{dx^4}{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]} \tag{61}$$

$$ds^5 = dx^5 - \frac{\alpha}{2}\frac{x^2\,dx^1 - x^1\,dx^2}{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} - \frac{\beta}{2}\frac{x^4\,dx^3 - x^3\,dx^4}{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]}. \tag{62}$$

Metrica spaţiului V_5 se poate scrie

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + (ds^5)^2, \tag{63}$$

unde ds_1^2, ds_2^2 sunt metricile a două spaţii de curbură constantă

$$ds_1^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{\left\{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]\right\}^2}, \quad ds_2^2 = \frac{(dx^3)^2 + (dx^4)^2}{\left\{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]\right\}^2}. \tag{64}$$

In sfârşit avem deci următoarea

T e o r e m ă. *Spaţiile V_5, având grupul de stabilitate* (3) *şi cu grup transitiv de mişcări, au metrica* (63), *unde ds_1^2, ds_2^2 sunt metrici cu curbură constantă date de* (64), *iar ds^5 este o formă Pfaff invariantă şi este dată de formula* (62).

Pentru $k_1 = k_2 = 0$, $\alpha = \beta$ se obţin spaţiile [(52'), (53'), (54)].

Să observăm din structura (60) că dacă spaţiile $d\sigma_1^2$, $d\sigma_2^2$ au curburile negative, metrica (63) are un grup simplu transitiv de mişcări.

Se demonstrează că grupul cu un parametru (2) poate fi grupul de stabilitate al unui V_5 cu grup complet de mişcări G_6, numai dacă avem $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$ şi atunci, pentru $k \neq 0$, metrica lui V_5 este de forma $ds_1^2 + (ds^5)^2$, unde ds_1^2 este metrica unui V_4 neeuclidian cu grup de mişcări G_5 iar ds^5 o formă Pfaff invariantă.

ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ V_5

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В одной из предыдущих работ профессор Г. Врынчану изучил транзитивные группы движения пространств V_4 в связи с задачей, поставленной И. П. Егоровым: определение наибольшего числа параметров группы движения пространства Эйнштейна, не являющегося приводи-

мым пространством. Приводимым римановым пространством называют пространство, метрика которого может быть разложена на сумму 2 метрик с различными переменными.

Приводимые пространства V_n являются частными случаями одного класса римановых пространств, определенных Г. Врынчану [1, стр. 30]; это пространства V_n, для которых ортогональная группа преобразований конгруенций оставляет инвариантными две системы дополнительных форм Пфаффа.

Называем сепарабильным пространством V_n, пространство Римана, группа движений которого имеет в качестве инвариантов две или больше систем Пфаффа. Доказывается, что для того, чтобы пространство V_n с транзитивной группой движений было сепарабильным, необходимо и достаточно, чтобы группа устойчивости точки из V_n была приводимой.

Целью этой работы является классификация пространств Римана V_5 с транзитивными группами движения.

В первой главе находим снова результаты С. Медичи [3], относящиеся к группам вращения с пятью переменными. Показывается таким образом, что существует только одна несепарабильная группа в евклидовом пространстве E_5; это группа G_3 данная формулами:

$$X = 2X_{12} + X_{34}, \quad Y = X_{35} + \frac{1}{\sqrt{3}}(X_{13} + X_{24}), \quad Z = X_{45} + \frac{1}{\sqrt{3}}(X_{23} - X_{14}) \tag{13}$$

$$\left(X_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

Все другие группы являются сепарабильными; нижеследующие формулы дают канонические формулы бесконечно малых преобразований групп V_5, отличных от (13).

$$G_1\colon\ X = X_{12} + \lambda X_{34} \tag{2}$$

$$G_2\colon\ X = X_{12},\ Y = X_{34} \tag{3}$$

$$G_3\colon\ X = X_{12} - X_{34},\ Y = X_{13} + X_{24},\ Z = X_{14} - X_{23} \tag{10}$$

$$G_3'\colon\ X = X_{12},\ Y = X_{25},\ Z = X_{15} \tag{16}$$

$$G_4\colon\ X = X_{12},\ Y = X_{34},\ U = X_{13} + X_{24},\ V = X_{14} - X_{23} \tag{17}$$

$$G_4'\colon\ X = X_{12},\ Y = X_{15},\ Z = X_{25},\ U = X_{34} \tag{18}$$

$$G_6\colon\ X = X_{12},\ Y = X_{13},\ Z = X_{14},\ U = X_{23},\ V = X_{24},\ W = X_{34} \tag{18'}$$

Во второй главе показывается, что группа (13) не может быть полной группой устойчивости пространства V_5 с транзитивной группой движения, доказывая, что пространство V_5, которое имеет (13) в качестве группы устойчивости, является евклидовым.

Известно, по общей теореме [1, стр. 28], что пространства V_5, с транзитивными группами G_{11} или G_9, имеющие в качестве групп устойчивости (18′) или (18), приводимы.

В последней главе, находятся пространства V_5 с транзитивной группой движения G_9, имеющие в качестве группы устойчивости группу,

dată prin formulele (17). Aceste spații V_5 sunt ireductibile, cu grupă maximală transitivă de mișcări. Metrica acestor spații poate fi adusă la forma canonică

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^{-4mx^1}(dx^2 - 2mx^3\,dx^4)^2 + e^{-2mx^1}(dx^3)^2 + \\ + e^{-2mx^1}(dx^4)^2 + \left(dx^5 + \frac{\mu}{2m}e^{-2mx^1}dx^2 - \mu x^3 e^{-2mx^1}dx^4\right)^2 \qquad (52,\ 53)$$

sau

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (dx^4)^2 + (dx^5 - \mu x^1\,dx^2 - \mu x^3\,dx^4)^2. \quad (52',\ 53')$$

Pentru $\mu = 0$, spațiile indicate mai sus sunt reductibile; aceste spații sunt produsul direct al spațiului V_4 Vrânceanu cu o dreaptă.

Spațiile (52, 53) sunt spații Einstein dacă $\mu^2 = -4m^2$, dar în acest caz se obțin spații V_5 cu curbură constantă pozitivă $K = \mu^2$.

Pentru $\mu^2 \neq -4m^2$, se obțin spații separabile care admit ca invariant forma Pfaff

$$ds^5 = dx^5 + \frac{\mu}{2m}e^{-2mx^1}dx^2 - \mu x^3 e^{-2mx^1}dx^4$$

Dacă $-m^2 > 0$, adică m este pur imaginar, atunci grupa de mișcări a metricii (52, 53) este izomorfă cu grupa complexă simplă G_9, ortogonală în șase variabile.

Se arată mai departe că grupa (10) nu poate fi grupa de stabilitate a unui spațiu V_5 cu grupă transitivă, în timp ce spațiile V_5 cu grupa de stabilitate (16) și grupă transitivă sunt reductibile. Deci spațiile V_5 nu pot avea grupă transitivă cu opt parametri.

În sfârșit, se dă metrica spațiilor V_5 cu grupă transitivă G_7 și care admit grupa de stabilitate (3):

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{\left\{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]\right\}^2} + \frac{(dx^3)^2 + (dx^4)^2}{\left\{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]\right\}^2} + \\ + \left(dx^5 - \frac{\alpha}{2}\frac{x^2\,dx^1 - x^1\,dx^2}{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} - \frac{\beta}{2}\frac{x^4\,dx^3 - x^3\,dx^4}{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]}\right)^2$$

aceste spații sunt reductibile, dacă α sau β sunt nule.

LES GROUPES TRANSITIFS DE MOUVEMENT DES ESPACES DE RIEMANN V_5

(RÉSUMÉ)

Dans un travail récent, le professeur Gh. Vrănceanu a étudié les groupes transitifs de mouvement des espaces V_4 en relation avec un problème posé par I. P. Egorov: la détermination du nombre maximum des paramètres du groupe de mouvement d'un espace d'Einstein, qui n'est pas un espace réductible. On appelle espace de Riemann réductible un espace dont la métrique peut être décomposée en une somme de deux métriques à variables différentes.

Les espaces réductibles V_n sont des cas particuliers d'une classe d'espaces de Riemann définis par Gh. Vrănceanu [1, page 30]; ce sont les espaces V_n dont le groupe orthogonal des transformations de congruences laisse invariants deux systèmes complémentaires de formes de Pfaff.

Nous appelons espace V_n séparable, un espace de Riemann dont le groupe de mouvement a comme invariants deux ou plusieurs systèmes de Pfaff. On démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace V_n à groupe de mouvement transitif soit séparable est que le groupe de stabilité d'un point de V_n soit réductible.

Le but de ce travail est la classification des espaces de Riemann V_5 à groupes transitifs de mouvement.

Dans le premier chapitre, on retrouve les résultats de S. Medici [3] concernant les groupes de rotation en cinq variables. On montre ainsi qu'il y a un seul groupe non séparable dans l'espace euclidien E_5; c'est le groupe G_3 donné par les formules:

$$X = 2X_{12} + X_{34},\ Y = X_{35} + \frac{1}{\sqrt{3}}(X_{13} + X_{24}),\quad Z = X_{15} + \frac{1}{\sqrt{3}}(X_{23} - X_{14}) \tag{13}$$

$$\left(X_{ij} = x^i \frac{\partial f}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

Tous les autres groupes sont des groupes séparables; les formules suivantes donnent les formes canoniques des transformations infinitésimales des groupes de V_5 autres que (13)

$$G_1 : X = X_{12} + \lambda X_{34} \tag{2}$$

$$G_2 : X = X_{12},\ Y = X_{34} \tag{3}$$

$$G_3 : X = X_{12} - X_{34}, Y = X_{13} + X_{24}, Z = X_{14} - X_{23} \tag{10}$$

$$G_3' : X = X_{12}, Y = X_{25}, Z = X_{15} \tag{16}$$

$$G_4 : X = X_{12},\ Y = X_{34},\ U = X_{13} + X_{24},\ V = X_{14} - X_{23} \tag{17}$$

$$G_4' : X = X_{12},\ Y = X_{15},\ Z = X_{25},\ U = X_{34} \tag{18}$$

$$G_6 : X = X_{12},\ Y = X_{13},\ Z = X_{14},\ U = X_{23},\ V = X_{24},\ W = X_{34} \tag{18'}$$

Dans le second chapitre, on montre que le groupe (13) ne peut pas être le groupe complet de stabilité d'un V_5 à groupe transitif de mouvement, en mon-

trant qu'un espace V_5 qui possède le (13) comme groupe de stabilité, est un espace euclidien.

On sait, d'après un théorème général [1, page 28], que les espaces V_5 à groupes transitifs G_{11} ou G_9, ayant les groupes de stabilité (18′) ou (18), sont réductibles.

Dans le dernier chapitre, on trouve les espaces V_5 à groupe transitif de mouvement G_9, ayant le groupe de stabilité donné par les formules (17). Ce sont les espaces V_5 irréductibles, à groupe maximum transitif de mouvement. Leur métrique peut être réduite à la forme canonique

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^{-4mx^1}(dx^2 - 2mx^3\,dx^4)^2 + e^{-2mx^1}(dx^3)^2 + \\ + e^{-2mx^1}(dx^4)^2 + \left(dx^5 + \frac{\mu}{2m}e^{-2mx^1}dx^2 - \mu x^3 e^{-2mx^1}dx^4\right)^2 \qquad (52, 53)$$

ou

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^4)^2 + (dx^5 - \mu x^1\,dx^2 - \mu x^3\,dx^4)^2 \qquad (52', 53')$$

Pour $\mu = 0$, les formules précédentes donnent des espaces réductibles; c'est le produit direct d'un espace V_4 de Vrănceanu et d'une droite.

Les espaces (52, 53) sont des espaces d'Einstein si $\mu^2 = -4m^2$, mais, dans ce cas, on a les espaces V_5 à courbure constante positive

$$K = \mu^2$$

Pour $\mu^2 \neq -4m^2$, on a des espaces séparables ayant la forme de Pfaff

$$ds^5 = dx^5 + \frac{\mu}{2m}e^{-2mx^1}dx^2 - \mu x^3 e^{-2mx^1}dx^4$$

invariante.

Si l'on a $-m^2 > 0$, donc m est purement imaginaire, le groupe de mouvement de la métrique (52,53) est isomorphe au groupe sympléctique G_9 orthogonal en six variables.

On montre ensuite que le groupe (10) ne peut pas être le groupe complet de stabilité d'un V_5 à groupe transitif; tandis que les espaces V_5 à groupe de stabilité (16) et à groupe transitif sont réductibles. Les espaces V_5 ne peuvent donc pas avoir un groupe transitif à huit paramètres.

Enfin, on donne la métrique des espaces V_5 à groupe transitif G_7 et ayant le groupe de stabilité (3):

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{\left\{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]\right\}^2} + \frac{(dx^3)^2 + (dx^4)^2}{\left\{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]\right\}^2} + \\ + \left(dx^5 - \frac{\alpha}{2}\frac{x^2dx^1 - x^1dx^2}{1 + \frac{k_1}{4}[(x^1)^2 + (x^2)^2]} - \frac{\beta}{2}\frac{x^4dx^3 - x^3dx^4}{1 + \frac{k_2}{4}[(x^3)^2 + (x^4)^2]}\right)^2$$

espaces qui sont réductibles si α ou β sont nuls.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vrănceanu, Studii şi Cercetări Matematice, t. IV, Nr. 1—2, 1953, p. 121.
2. E. Cartan, Bull. de la Soc. Math., 1926, v. 54, p. 233.
3. S. Medici, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1907, v. X, p. 159.
4. Gh. Vrănceanu, Studii şi Cercetări Matematice, t. II, fasc. II, 1951, p. 1.
5. H. Weyl, *The classical groups*. Princetown, 1936.
6. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Bucureşti, 1952, v. I. 1951, v. II.
7. St. Petrescu, Disquisitiones Math. et Phys., 1943, v. III, fasc. 1—2.